# 3 LA INTEGRAL DEFINIDA

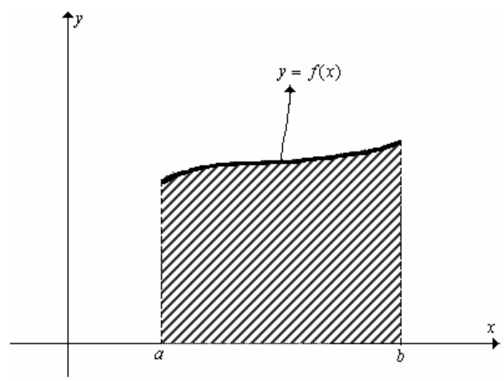
3.1 DEFINICIÓN
3.2 TEOREMA DE INTEGRABILIDAD
3.3 TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO
3.4 PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA
3.4.1 PROPIEDAD DE LINEALIDAD
3.4.2 PROPIEDAD DE ADITIVIDAD
3.4.3 PROPIEDAD DE COMPARACIÓN
3.4.4 PROPIEDAD DE ACOTAMIENTO
3.4.5 PROPIEDAD DE SUSTITUCIÓN
3.4.6 PROPIEDAD DE SIMETRÍA
3.4.7 PROPIEDAD DE PERIODICIDAD
3.4.8 PROPIEDAD DE LA DERIVADA DE UNA INTEGRAL

**Objetivo:**

Se pretende que el estudiante calcule integrales definidas aplicando teoremas y propiedades

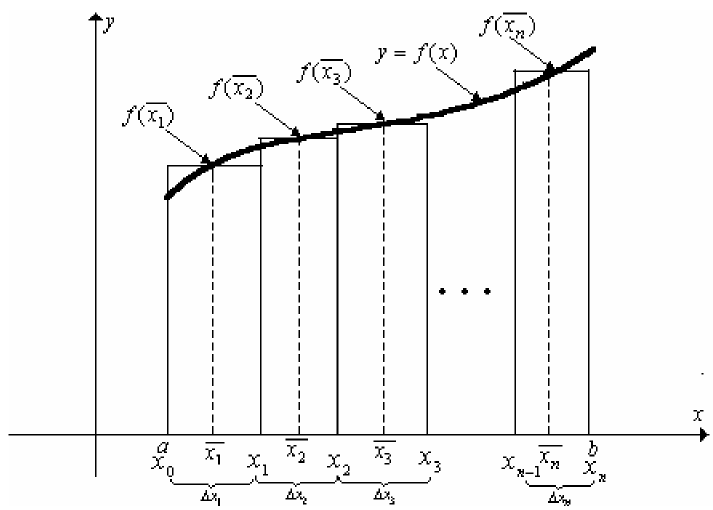
# 3.1 DEFINICIÓN

Ya se ha mencionado que un problema a resolver es la determinación del área bajo una curva $y = f(x)$.




El cálculo integral proporciona las herramientas para dar solución a esta problemática.

Dividiendo la región en "$n$" rectángulos. Observe la figura:




Las bases de los rectángulos son de dimensión no necesariamente igual. Las alturas de cada rectángulo estarían dadas por el respectivo valor que se obtiene en la función $f$ con el punto (observe la figura) que se ha denotado como $\bar{x}$. El área del primer rectángulo sería $\boxed{A_1 = f(\bar{x}_1)\Delta x_1}$, el área del segundo rectángulo sería $\boxed{A_2 = f(\bar{x}_2)\Delta x_2}$ ; y así , el área del n-ésimo rectángulo sería $\boxed{A_n = f(\bar{x}_n)\Delta x_n}$.

$x_n$

Observe que si tomamos $\overline{x}_1 = x_1$, $\overline{x}_2 = x_2$, $\overline{x}_3 = x_3$, ..., $\overline{x}_i = x_i$, se tienen **rectángulos circunscritos**; en cambio si se toma $\overline{x}_1 = x_0$, $\overline{x}_2 = x_1$, $\overline{x}_3 = x_2$, ..., $\overline{x}_i = x_{i-1}$ se tendrían **rectángulos inscritos**.

La suma de las áreas de los $n$ rectángulos sería:

$$f\left(\overline{x}_1\right)\Delta x_1 + f\left(\overline{x}_2\right)\Delta x_2 + f\left(\overline{x}_3\right)\Delta x_3 + \ldots + f\left(\overline{x}_n\right)\Delta x_n$$

Que de manera abreviada tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x}_i\right)\Delta x_i$$

Bien, lo que se quiere es el área de la región, por tanto se debería considerar una suma de una cantidad muy, pero muy grande de rectángulos, es decir una suma infinita. Por tanto, el área de la región estaría dada por:

$$A = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x}_i\right)\Delta x_i\right]$$

De aquí surge la **definición** de Integral Definida.

Sea $f$ una función que está definida en el intervalo $[a,b]$. Al $\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x}_i\right)\Delta x_i\right]$ se le denomina la integral definida (o integral de Riemann) de $f$ de "$a$" a "$b$" y se denota de la siguiente manera: $\int_a^b f(x)dx$.
Además, si existe este límite decimos que $f$ es integrable en $[a,b]$.

Ahora, con el siguiente teorema dejamos sentado el hecho de cuando una función es integrable.

## 3.2 TEOREMA DE INTEGRABILIDAD

Si $f$ es acotada en $[a,b]$ y si $f$ es continua a excepción de un número finito de puntos, entonces $f$ es integrable $[a,b]$. En particular si $f$ es continua en todo $[a,b]$ entonces es integrable en $[a,b]$

### *Ejemplo*

Hallar el área bajo la curva $f(x) = x^2$ en $[1,3]$

SOLUCIÓN:

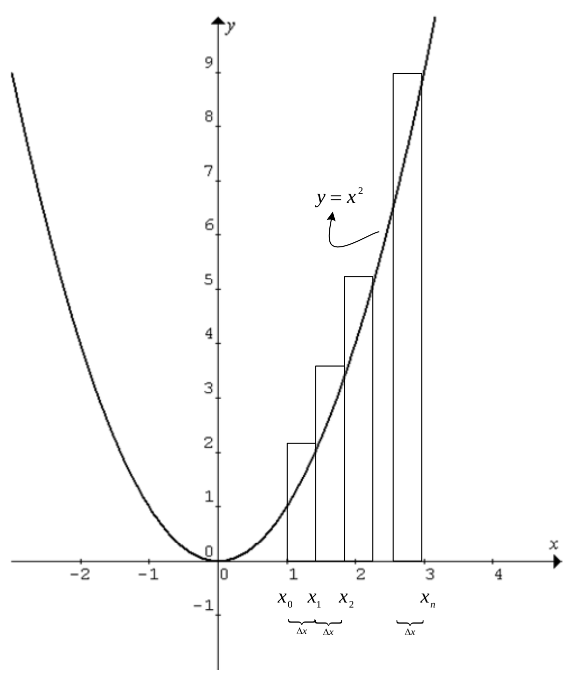
Aplicando la definición (Suma de Riemann) se tiene:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} [\, f(\bar{x}_1)\Delta x_1 + f(\bar{x}_2)\Delta x_2 + f(\bar{x}_3)\Delta x_3 + \ldots + f(\bar{x}_n)\Delta x_n]$$

PRIMER MÉTODO. RECTANGULOS CIRCUNSCRITOS.

Escogemos $\bar{x}_1 = x_1$, $\bar{x}_2 = x_2$, $\bar{x}_3 = x_3$, ..., $\bar{x}_i = x_i$

Representando la región, tenemos:




Ahora bien, observe que si tomamos a todas las particiones de igual dimensión, tendríamos

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$$

y

$$x_0 = a = 1$$
$$x_1 = x_0 + \Delta x = 1 + \frac{2}{n}$$
$$x_2 = x_1 + \Delta x = x_0 + 2\Delta x = 1 + 2\left(\frac{2}{n}\right) = 1 + \frac{4}{n},$$
$$x_3 = x_2 + \Delta x = x_0 + 3\Delta x = 1 + 3\left(\frac{2}{n}\right) = 1 + \frac{6}{n}$$
$$\vdots$$
$$x_i = x_0 + i\Delta x = 1 + i\Delta x = 1 + i\left(\frac{2}{n}\right)$$

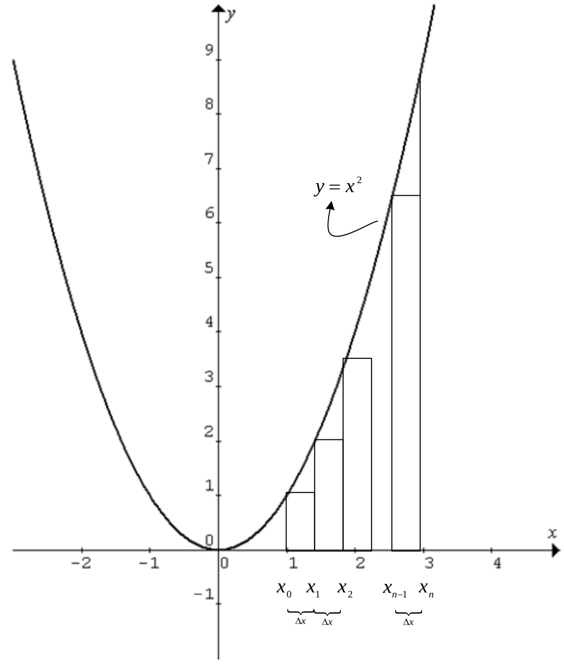
Entonces:

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{n\to\infty}\left[f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \cdots f(x_n)\Delta x\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(1 + i\frac{2}{n}\right)^2 \frac{2}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1 + i\frac{4}{n} + i^2\frac{4}{n^2}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}1 + \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}i + \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left[n + \frac{4}{n}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{4}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left[n + 2(n+1) + \frac{2(n+1)(2n+1)}{3n}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left[3n + 2 + \frac{4n^2 + 6n + 2}{3n}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left[3n + 2 + \frac{4n}{3} + 2 + \frac{2}{3n}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[6 + \frac{8}{n} + \frac{8}{3} + \frac{4}{3n^2}\right] \\
A &= \frac{26}{3}
\end{aligned}$$

SEGUNDO MÉTODO. RECTANGULOS INSCRITOS.

Escogemos $\overline{x}_1 = x_0$, $\overline{x}_2 = x_1$, $\overline{x}_3 = x_2$, ..., $\overline{x}_i = x_{i-1}$

Representando la región, tenemos:




Ahora, igual que el método anterior:

$$\boxed{\Delta x = \frac{2}{n}} \quad \text{y} \quad \boxed{x_i = 1 + i\left(\frac{2}{n}\right)}$$

Entonces:

$$A = \lim_{n\to\infty}\left[f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots f(x_{n-1})\Delta x\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\left(1+i\frac{2}{n}\right)^2\frac{2}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(1+i\frac{4}{n}+i^2\frac{4}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left[\sum_{i=0}^{n-1}1+\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left[(n-1)+\frac{4}{n}\frac{(n-1)(n)}{2}+\frac{4}{n^2}\frac{(n-1)(n)[2(n-1)+1]}{6}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left[n-1+2(n-1)+\frac{2(n-1)(2n-1)}{3n}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left[3n-3+\frac{4n^2-6n+2}{3n}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left[3n-3+\frac{4n}{3}-2+\frac{2}{3n}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[6-\frac{10}{n}+\frac{8}{3}+\frac{4}{3n^2}\right]$$

$$A = \frac{26}{3}$$

Note que el asunto no es tan sencillo. Se podría volver aún más engorroso si la función $f$ tuviese regla de correspondencia compleja.

El teorema siguiente nos permitirá evaluar integrales definidas de una manera muy rápida y sencilla, liberándonos de la ideas de calcular integrales definidas empleando su definición.

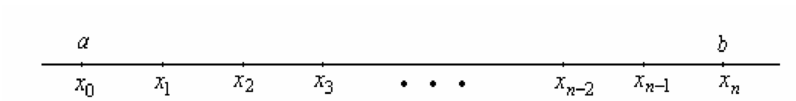
## 3.3 TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

> Sea $f$ continua en $[a,b]$ y sea $F$ cualquier antiderivada de $f$ en $[a,b]$ entonces:
>
> $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

***Demostración:***

En la expresión $F(b)-F(a)$, haciendo $b = x_n$ y $a = x_0$ tenemos:

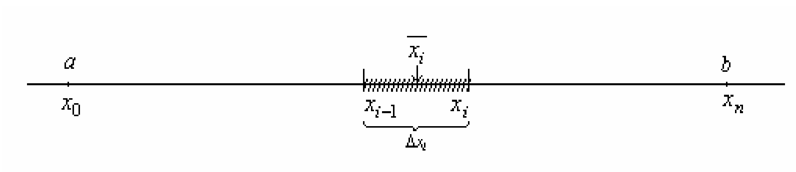
$$F(b)-F(a) = F(x_n) - F(x_0)$$




Restando y sumando términos, resulta:

$$\begin{aligned} F(b)-F(a) &= F(x_n) - F(x_0) \\ &= [F(x_n)-F(x_{n-1})] + [F(x_{n-1})-F(x_{n-2})] + F(x_{n-2}) - \ldots - F(x_1) + [F(x_1)-F(x_0)] \\ &= \sum_{i=1}^{n} [F(x_i)-F(x_{i-1})] \end{aligned}$$

Aplicando el teorema del valor medio para derivadas a $F$ en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$




Como $F$ es continua y diferenciable en $[x_{i-1}, x_i]$ entonces $\exists \bar{x}_i$ tal que $F'(\bar{x}_i) = \dfrac{F(x_i)-F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$

Como $F'(\bar{x}_i) = f(\bar{x}_i)$ y $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ entonces:

$$f(\bar{x}_i) = \frac{F(x_i)-F(x_{i-1})}{\Delta x_i}$$

Despejando resulta: $F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(\bar{x}_i)\Delta x_i$.

Reemplazando en $F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{n}\left[F(x_i)-F(x_{i-1})\right]$ tenemos: $F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$

Tomando límite queda:

$$\lim_{n\to\infty}\left[F(b)-F(a)\right]=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

$$F(b)-F(a)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx$$

La parte derecha de la última igualdad, por definición es la integral definida de $f$ en $[a,b]$.

Por tanto $F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$ L.Q.Q.D.

---

## *Ejemplo*

Hallar el área bajo la curva $y=x^2$ en $[1,3]$

SOLUCIÓN:

El área bajo la curva estará dada por $A=\int_1^3 x^2dx$ , aplicando el teorema fundamental del calculo

$$A=\int_1^3 x^2dx=\left(\frac{x^3}{3}+C\right)\Bigg|_1^3=\left(\frac{3^3}{3}+C-\frac{1^3}{3}-C\right)=\frac{27}{3}-\frac{1}{3}=\frac{26}{3}$$

---

Hemos dado solución a una gran problemática.

Observe que $\int_a^a f(x)dx=0$ y $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$ ¿Porqué?

# 3.4 PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

## 3.4.1 PROPIEDAD DE LINEALIDAD

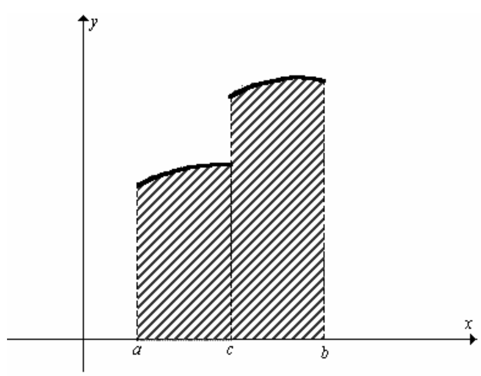
Suponga que $f$ y $g$ son integrables en el intervalo $[a,b]$ y sea $k \in R$, entonces:

1. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b [f(x)]dx \pm \int_a^b [g(x)]dx$
2. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

## 3.4.2 PROPIEDAD DE ADITIVIDAD

Si $f$ es integrable en un intervalo que contiene a los puntos a, b y c (no importar su orden), entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$




*Demostración:*

Por el teorema fundamental del cálculo:

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

**PREGUNTA**: ¿Verdadero o falso?

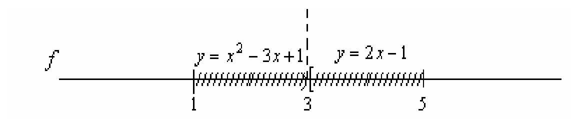
$$\int_1^3 x^2dx = \int_1^5 x^2dx + \int_5^3 x^2dx$$

## Ejemplo 1

Calcular $\int_{1}^{5} f(x)dx$ donde $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & ;x\geq 3 \\ x^2-3x+1 & ;x<3 \end{cases}$

SOLUCIÓN:

Como $f$ tiene dos reglas de correspondencia, es decir:




Entonces aplicando la propiedad de aditividad, tenemos:

$$\int_{1}^{5} f(x)dx = \int_{1}^{3}\left(x^2-3x+1\right)dx + \int_{3}^{5}\left(2x-1\right)dx$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+x\right)\Bigg|_1^3+\left(\frac{2x^2}{2}-x\right)\Bigg|_3^5$$

$$=\left[\left(9-\frac{27}{2}+3\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+1\right)\right]+\left[\left(25-5\right)-\left(9-3\right)\right]$$

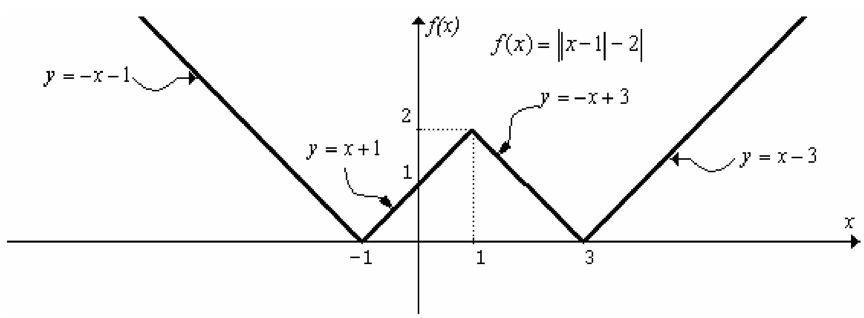
$$=\frac{38}{3}$$

## Ejemplo 2

Calcular $\int_{-2}^{4}\left|\left|x-1\right|-2\right|dx$

SOLUCIÓN:

Para obtener las reglas de correspondencia que definen a $f$, obtenemos la gráfica de $y=\left|\left|x-1\right|-2\right|$




Entonces:

$$\int_{-2}^{4}\left||x-1|-2\right|dx=\int_{-2}^{-1}(-x-1)dx+\int_{-1}^{1}(x+1)dx+\int_{1}^{3}(-x+3)dx+\int_{3}^{4}(x-3)dx$$
$$=\left(-\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_{-2}^{-1}+\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-1}^{1}+\left(-\frac{x^2}{2}+3x\right)\Bigg|_{1}^{3}+\left(\frac{x^2}{2}-3x\right)\Bigg|_{3}^{4}$$
$$=\left[\left(-\frac{1}{2}+1\right)-(-2+2)\right]+\left[\left(\frac{1}{2}+1\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]+\left[\left(-\frac{9}{2}+9\right)-\left(-\frac{1}{2}+3\right)\right]+\left[(8-12)-\left(\frac{9}{2}-9\right)\right]$$
$$=5$$

---

### 3.4.3 PROPIEDAD DE COMPARACIÓN

Si $f$ y $g$ son integrables en $[a,b]$ y si $f(x)\leq g(x)$, $\forall x\in[a,b]$; entonces: $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$

### 3.4.4 PROPIEDAD DE ACOTAMIENTO

Si $f$ es integrable en $[a,b]$ y si $m\leq f(x)\leq M$ , $\forall x\in[a,b]$; entonces:

$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$$

### 3.4.5 PROPIEDAD DE SUSTITUCIÓN

Supóngase que $g$ tiene una derivada continua en $[a,b]$ y sea $f$ continua en el rango de $g$. Entonces:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)dx=\int_{t=g(a)}^{t=g(b)} f(t)dt \quad \text{donde } t=g(x)$$

*Ejemplo*

Calcular $\displaystyle\int_{\pi^2/9}^{\pi^2/4}\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

SOLUCIÓN:

Tomando el cambio de variable $t=\sqrt{x}$ entonces tenemos $dx=2\sqrt{x}dt$, y para los límites de integración $\begin{cases} x=\pi^2/4 \Rightarrow t=\pi/2 \\ x=\pi^2/9 \Rightarrow t=\pi/3 \end{cases}$ por tanto la integral en términos de $t$ sería:

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sqrt{x}} 2\sqrt{x}dt = 2\int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos t dt = 2\operatorname{sen} t\Big|_{\pi/3}^{\pi/2} = 2\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{2} - 2\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{3}$$

$$= 2(1) - 2\frac{\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}$$

---

Note que para resolver la integral anterior no es necesario aplicar la propiedad de sustitución; la integral puede ser resulta como en el caso de las integrales indefinidas y luego ser evaluada para x. ¿cómo sería?.

### 3.4.6 PROPIEDAD DE SIMETRÍA

1. Si $f$ es una función PAR entonces:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

2. Si $f$ es una función IMPAR entonces:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Demostraremos sólo la primera parte, la segunda es de forma análoga y se recomienda al lector que la realice.

***DEMOSTRACIÓN***

Aplicando la propiedad de aditividad $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$

Para la primera integral aplicando la propiedad de sustitución:
Si tomamos el cambio de variable $t=-x$ entonces $dt=-dx$ y para los límites de integración $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=-a \Rightarrow t=a \end{cases}$. Sustituyendo resulta $\displaystyle\int_{a}^{0} f(-t)[-dt] = -\int_{a}^{0} f(-t)dt$

Por hipótesis $f$ es una función par, por tanto se cumple que $f(-t)=f(t)$ y además si invertimos los límites de integración, tenemos: $-\int_a^0 f(-t)dt=\int_0^a f(t)dt$

la última integral si $t=x$ queda $\int_a^0 f(-t)[-dt]=\int_0^a f(x)dx$

Finalmente $\int_{-a}^a f(x)dx=\int_0^a f(x)dx+\int_0^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$ L.Q.Q.D.

---

## Ejemplo

Calcular $\int_{-5}^{5}\frac{x^5}{x^2+4}dx$

SOLUCIÓN:

Obtengamos primero $f(-x)$ para $f(x)=\frac{x^5}{x^2+4}$.

$$f(-x)=\frac{(-x)^5}{(-x)^2+4}=-\frac{x^5}{x^2+4}$$

Observe $f(-x)=-f(x)$, por tanto $f$ es una función impar y por la propiedad de simetría, rápidamente concluimos que:

$$\int_{-5}^{5}\frac{x^5}{x^2+4}dx=0$$

---

### 3.4.7 PROPIEDAD DE PERIODICIDAD

Si $f$ es periódica con período $T$, entonces:

$$\int_{a+T}^{b+T} f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

## DEMOSTRACIÓN

En la integral $\int_{a+T}^{b+T} f(x)dx$, haciendo cambio de variable $t=x-T$.

Del cambio de variable se obtiene $x = t + T$ , $dx = dt$ y los límites para la nueva variable son:
$\begin{cases} x = b + T \Rightarrow t = b \\ x = a + T \Rightarrow t = a \end{cases}$

Reemplazando, resulta: $\int_{a+T}^{b+T} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(t+T)dt$ y como, por hipótesis, $f$ es una función periódica se cumple que $f(t+T) = f(t)$, entonces $\int_{a}^{b} f(t+T)dt = \int_{a}^{b} f(t)dt$

Que finalmente, si $t = x$ quedaría $\int_{a+T}^{b+T} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$ L.Q.Q.D.

---

### 3.4.8 PROPIEDAD DE LA DERIVADA DE UNA INTEGRAL

Algunos autores le llaman Segundo Teorema fundamental del Cálculo.

> Sea $f$ continua en $[a,b]$ y sea "$x$" un punto variable de $(a,b)$. Entonces:
> $$\frac{d}{dx}\left[\int_{a}^{x} f(t)dt\right] = f(x)$$

### *Ejemplo 1*

Calcular $D_x\left[\int_{2}^{x} \frac{t^{3/2}}{\sqrt{t^2+17}}dt\right]$

SOLUCIÓN:

Aplicando la propiedad anterior, rápidamente concluimos que:

$$D_x\left[\int_{2}^{x} \frac{t^{3/2}}{\sqrt{t^2+17}}dt\right] = \frac{x^{3/2}}{\sqrt{x^2+17}}$$

---

## Ejemplo 2

Calcular $D_x\left[\int_x^2 \frac{t^{3/2}}{\sqrt{t^2+17}}\,dt\right]$

SOLUCIÓN:
Invirtiendo los límites de integración y aplicando la propiedad, concluimos que:

$$D_x\left[-\int_2^x \frac{t^{3/2}}{\sqrt{t^2+17}}\,dt\right] = -\frac{x^{3/2}}{\sqrt{x^2+17}}$$

La propiedad anterior puede ser generalizada de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^{u(x)} f(t)\,dt\right] = \left[f(u)\right]\frac{du}{dx}$$

## Ejemplo 3

Calcular $D_x\left[\int_2^{x^3} \frac{t^{3/2}}{\sqrt{t^2+17}}\,dt\right]$

SOLUCIÓN:
Aplicando la propiedad, concluimos que:

$$D_x\left[\int_2^{x^3} \frac{t^{3/2}}{\sqrt{t^2+17}}\,dt\right] = \frac{\left(x^3\right)^{3/2}}{\sqrt{\left(x^3\right)^2+17}}\left(3x^2\right) = \frac{3x^{13/2}}{\sqrt{x^6+17}}$$

## Ejemplo 4

Calcular $D_x\left[\int_{x^2}^{x^3} \frac{t^{3/2}}{\sqrt{t^2+17}}\,dt\right]$

SOLUCIÓN:
Aplicando la propiedad de aditividad, tenemos que:

$$D_x\left[\int_{x^2}^{x^3} \frac{t^{3/2}}{\sqrt{t^2+17}}\,dt\right] = D_x\left[\int_{x^2}^{0} \frac{t^{3/2}}{\sqrt{t^2+17}}\,dt + \int_{0}^{x^3} \frac{t^{3/2}}{\sqrt{t^2+17}}\,dt\right]$$

Derivando cada término y aplicando la propiedad, resulta:

$$D_x\left[\int_{x^2}^{0}\frac{t^{3/2}}{\sqrt{t^2+17}}dt+\int_{0}^{x^3}\frac{t^{3/2}}{\sqrt{t^2+17}}dt\right]=D_x\left[\int_{x^2}^{0}\frac{t^{3/2}}{\sqrt{t^2+17}}dt\right]+D_x\left[\int_{0}^{x^3}\frac{t^{3/2}}{\sqrt{t^2+17}}dt\right]$$

$$=D_x\left[-\int_{0}^{x^2}\frac{t^{3/2}}{\sqrt{t^2+17}}dt\right]+D_x\left[\int_{0}^{x^3}\frac{t^{3/2}}{\sqrt{t^2+17}}dt\right]$$

$$=-\frac{\left(x^2\right)^{3/2}}{\sqrt{\left(x^2\right)^2+17}}(2x)+\frac{\left(x^3\right)^{3/2}}{\sqrt{\left(x^3\right)^2+17}}(3x^2)$$

FINALMENTE: $D_x\left[\int_{x^2}^{x^3}\frac{t^{3/2}}{\sqrt{t^2+17}}dt\right]=\frac{3x^{13/2}}{\sqrt{x^6+17}}-\frac{2x^4}{\sqrt{x^4+17}}$

---

## Ejemplo 5

Calcular $D_x\left[\int_{1}^{x}xtdt\right]$

SOLUCIÓN:

Observe que $\int_{1}^{x}xtdt=x\int_{1}^{x}tdt$ por tanto:

$$D_x\left[\int_{1}^{x}xtdt\right]=D_x\left[(x)\bullet\left(\int_{1}^{x}tdt\right)\right]$$

$$=\left(D_x x\right)\bullet\left(\int_{1}^{x}tdt\right)+(x)\bullet\left(D_x\int_{1}^{x}tdt\right)$$

$$=1\bullet\int_{1}^{x}tdt\quad+\quad x\bullet(x)$$

$$=\left.\frac{t^2}{2}\right|_{1}^{x}+x^2$$

$$=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}+x^2$$

$$=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$$

---

## Ejemplo 6

Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt}{x}$

SOLUCIÓN:

La expresión presenta una indeterminación de la forma: $\dfrac{0}{0}$

Aplicando la regla de L´Hopital, tenemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{D_x\left[\int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt\right]}{D_x[x]}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}}{1}=\frac{\sqrt{1-0^2}}{1}=1$$

## Ejercicios Propuestos 3.1

1. Calcular

| | | |
|---|---|---|
| a. $\int_{-2}^{3} f(x)dx$, si $f(x)=\begin{cases}2x^2, & -2\le x\le 1\\ 1-2x, & 1<x\le 3\end{cases}$ | f. $\int_0^{10} \lVert x\rVert dx$ | k. $\int_0^{1/2} \operatorname{sen}(2\pi x)dx$ |
| b. $\int_0^4 \lvert x-1\rvert dx$ | g. $\int_0^4 \left(x-[\lvert x\rvert]\right)dx$ | l. $\int_0^{\sqrt{5}} \sqrt{9-x^2}\,dx$ |
| c. $\int_{-2}^4 \lvert 3x-1\rvert dx$ | h. $\int_{\pi^2/9}^{\pi^2/4} \dfrac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ | m. $\int_1^{\sqrt{e}} \left(x^2-2x+3\right)\ln(x)dx$ |
| d. $\int_{-2}^4 \left(\lvert 3x-1\rvert+\lvert 2-x\rvert\right)dx$ | i. $\int_0^1 \dfrac{x+2}{\left(x^2+4x+1\right)^2}dx$ | n. $\int_{-1}^1 \dfrac{x^3}{\left(1+x^2\right)^4}dx$ |
| e. $\int_{-2}^5 \lvert\lvert x-1\rvert-2\rvert dx$ | j. $\int_0^1 [3x+\cos(3x-3)]dx$ | o. $\int_{-100}^{100} x^2 sen^{97}\left(x^3-3x\right)dx$ |

2. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones: Si es verdadera demuéstrela y en caso de ser falsa de un contraejemplo.

| |
|---|
| a. Si $f(x)\le g(x)$ en $[a,b]$, $\left\lvert\int_a^b f(x)dx\right\rvert\le\left\lvert\int_a^b g(x)dx\right\rvert$ |
| b. $\int_{-99}^{99}\left(ax^3+bx^2+cx\right)dx=2\int_0^{99} bx^2dx$ |

c. Si $f$ es periódica con período T, entonces: $\int_{a+T}^{b+T} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$

d. $\forall f$ , $\int_{a}^{b} f(-x)dx = \int_{-b}^{-a} f(x)dx$

e. Si $f$ es una función par $\forall x \in [-a,a]$, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

f. Si $f(x) \leq g(x)$ en $[a,b]$, entonces $\int_{a}^{b} |f(x)|dx \leq \int_{a}^{b} |g(x)|dx$

g. Si $F'(x) = G'(x) \quad \forall x \in [a,b]$, $\quad F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$

h. Sea $g$ una función derivable y supóngase que $F$ es una antiderivada de $f$. Entonces

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

3. Encuentre $f'$ si $f$ toma las siguientes reglas de correspondencia:

| | |
|---|---|
| a. $\displaystyle\int_{0}^{\operatorname{sen} x \ln x} \frac{1}{\sqrt{1-t}}dt$ | d. $\displaystyle\int_{x^2}^{x^3+\operatorname{sen} x} \frac{2t}{\sqrt[4]{t^5-1}}dt$ |
| b. $\displaystyle\int_{\ln x \tan x}^{2x^3 \sec x} \sqrt[3]{1-t^5}\,dt$ | e. $\displaystyle\int_{\ln(x^2+1)}^{x^3 \operatorname{sen}(\tan x)} \frac{1-t^3}{\sqrt{\cos t - \operatorname{sen} t}}dt$ |
| c. $\displaystyle\int_{e \ln x \sec x}^{e^x 3^x} \frac{1}{\sqrt{2-t}}dt$ | f. $\displaystyle\int_{x^2}^{6\log_3 x^2} \frac{1+\operatorname{sen} t}{\sqrt{1-\sqrt{\cos\sqrt{t}}}}dt$ |

4. Determine:

| | |
|---|---|
| a. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_{0}^{x} sen\left(t^2\right)dt}{x^3}$ | c. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\int_{1}^{x} \sqrt{1+e^{-t}}\,dt}{x}$ |
| b. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{\int_{1}^{x} sent\;dt}{x-1}$ | d. $\displaystyle\frac{d}{dx}\left[\int_{0}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1-5t^2}}\right]^2$ |

## Misceláneos

1. A cada una de las proposiciones siguientes, califíquelas como Verdadera o Falsa. En cada caso justifique su respuesta.

   a) Si $f'$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$ entonces

   $$\int_a^b 2f(x)f'(x)dx = [f(b)]^2 - [f(a)]^2$$

   b) Si $\int_a^b f(x)dx = 0$ entonces $f(x)=0$ para $\forall x \in [a,b]$

   c) Si $f$ es una función continua en $IR$, entonces:

   $$\frac{d}{dx}\left(\int_{x^2}^{arctgx} f(x)dx\right) = \frac{f(arctgx)}{x^2+1} - f(x^2)$$

   d) $\int_0^{n+1} [\![x]\!]dx = \frac{n(n+1)}{2};\ n \in IN$

   e) Si $f$ y $g$ son funciones impares y continuas en $IR$, entonces

   $$\int_{-5}^{5}(f \circ g)(x)dx = 0$$

   f) $D_x\left[\int_4^{x^2}\sqrt{1+t^4}\,dt\right] = 2x\sqrt{1+x^4}$

   g) $\int_{-2}^{2}\left[5x^4 + xe^{x^2} - x^3\sqrt{1+x^4}\right]dx = 64$

   h) Si $f$ y $g$ son funciones continuas en el intervalo $[0,1]$ entonces

   $$\int_0^1 f(x)g(1-x)dx = \int_0^1 f(1-x)g(x)dx$$

   i) Si $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ entonces $f(x) \geq 0$ para $\forall x \in [a,b]$

   j) $\int_2^{2\pi}|senx|dx = 4\int_0^{\pi/2} senxdx$

   k) Si $\int_0^3 f(x)dx = 3$ y $\int_0^4 f(x)dx = 7$ entonces $\int_4^3 f(x)dx = -4$

   l) $\int_0^1 xdx \geq \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$

m) Si $f$ es una función continua en $IR$ tal que para cualquier número real $x$, $\int_{-x}^{2x1} f(t)dt = \int_{x}^{2x1} f(t)dt = 0$ entonces $f$ es una función impar.

n) Si $F$ es una antiderivada de la dunción $f$, entonces $F(2x+1) = \int f(2x+1)dx$

o) Si $f$ es una función continua en el intervalo $[2,5]$ y $\int_{2}^{5} f(x)dx = 7$ entonces $\int_{-2}^{-5} f(x)dx = -7$

p) Si $f$ es una función tal que $2f(x) + 3\int_{0}^{x^2} \cos\sqrt{t}\,dt = 0$ entonces $f´(x) = -3x\cos\sqrt{x}$

q) Si $f$ y $g$ son funciones tales que $f(x) = xe^{x}$ y $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [0,1]$ entonces $\int_{0}^{1} g(x)dx \leq 1$ .

r) Si $\forall x \in [0,2],\quad 0 \leq f(x) \leq 1$ entonces $0 \leq \int_{0}^{2} f(x)dx \leq 1$

s) Si $f$ es una función continua en el intervalo $[0,10]$ y $f(x) = D_x\left(\int_{0}^{3x^2} \frac{e^t}{t^2+1}dt\right)$ para $x \in [0,10]$ entonces $f´(1) = \frac{3}{5}e^3$ .

t) $\int_{2}^{2\pi} |senx|dx = \int_{2}^{2\pi} |\cos x|dx$

u) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi}{n}\cos\left(\frac{\pi i}{n}\right) = \pi$

v) $\lim\limits_{|p|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \cos^2 \overline{x_i} = \frac{\pi}{2}$ donde $|p| = max.\{\Delta x_i\}$ p es una partición del intervalo $[0,\pi]$.

w) Si $\int_{-1}^{2} \left(2f(x) + x^2\right)dx = 1$, entonces $\int_{-1}^{2} f(x)dx = -1$

x) $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} sen\left(t^2\right)dt}{tg\left(x^{\frac{3}{2}}\right)} = \frac{1}{3}$

y) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} e^{\left(1+\frac{2i}{n}\right)} \frac{2}{n} = e^2 - 1$

z) $\displaystyle \forall a,b \in R, \quad \int_a^{a+2\pi} senx\,dx = \int_b^{b+2\pi} \cos x dx$

2. Calcular

a. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (1-\cos t)dt}{x^3}$

b. $\displaystyle \int_1^2 \frac{1}{\left(6-x^2\right)^{3/2}}dx$

c. $\displaystyle \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x sen^3 x dx$

d. $\displaystyle \int_1^2 \frac{3}{x^2+2x+2}dx$

e. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} sen\left(t^2\right)dt}{x^6}$

f. $\displaystyle \int_0^3 \left(2x - \left[\!\left[ |x| \right]\!\right]\right)dx$

g. $\displaystyle \int_{-2}^3 \left(x|x+1| - |x-2|\right)dx$

h. $\displaystyle \int_1^5 \frac{1}{2+\sqrt{x-1}}dx$

i. $\displaystyle \int_2^4 \frac{x-4}{x^3-x}dx$

j. $\displaystyle \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{12}{e^{2t}+16}dt$

k. $\displaystyle \int_{-2}^{21} \left(2|x-1|-3\right)dx$

l. $\displaystyle \int_{-2}^{3} |2x+3|dx$

m. $\displaystyle \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}dx$

n. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \frac{sen(t)}{t^2+1}dt}{x^3}$

o. $\displaystyle \int_{-3}^{4} e^{-|2x-3|}dx$

p. $\displaystyle \int_{-2}^{2} \left(\frac{sen\left(x^3\right)}{x^2+1} + e^{|x|}\right)dx$

3. Si $f$ es una función tal que $f(x)=\int_{x}^{3}\left(9t^{2}-48t+56\right)e^{-3t}dt,\quad x\in IR$. Determine los intervalos donde el gráfico de $f$ es cóncava hacia arriba.

4. Si $f$ y $g$ son funciones tales que $\int_{1}^{4}f(x)dx=3$, $\int_{4}^{7}f(x)dx=-2$ y $\int_{1}^{7}3g(x)dx=6$, entonces calcule el valor de $\int_{7}^{1}\left[5f(x)+g(x)\right]dx$