4 APLICACIONES DE LA INTEGRAL

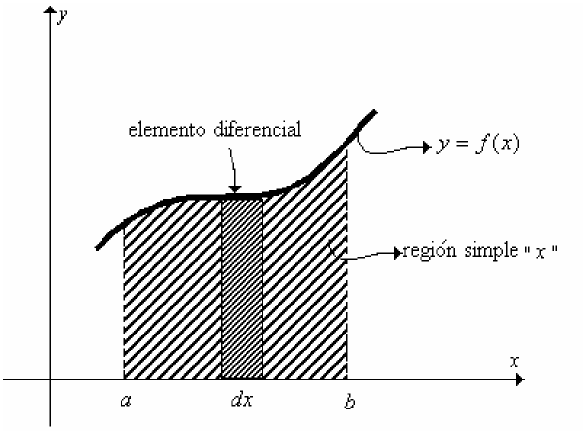
Objetivo:
Se pretende que el estudiante calcule áreas de regiones planas generales, volúmenes de sólidos de revolución, longitud de una curva plana

4.1 AREAS DE REGIONES PLANAS

4.1.1 ÁREA BAJO UNA CURVA

En el capítulo anterior se mencionó que para calcular el valor del área bajo una curva, se particiona la región plana y luego se hace una suma infinita de las áreas de las particiones, lo cual equivale a una integral definida.

Ahora podemos hacerlo de una manera abreviada. Considerando sólo una partición representativa, un rectángulo diferencial que represente a cualquier partición de la región plana

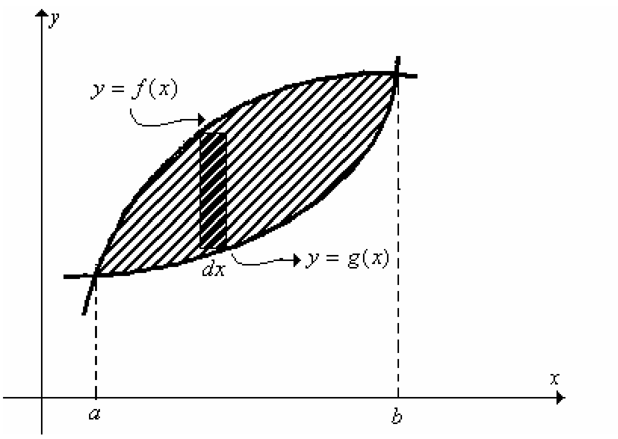


El área del elemento diferencial será: $dA = hdx = f(x)dx$

Por tanto, el área de la región plana es: $A = \int_a^b f(x)dx$

4.1.2 ÁREA ENTRE CURVAS

Si la región plana tuviera la siguiente forma:



El área del elemento diferencial será: $dA = hdx = [f(x) - g(x)]dx$

Entonces el área de la región plana esta dada por: $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

CONCLUSIÓN:

Para hallar el área de una región plana, siga los siguientes pasos:

1. Dibuje las curvas dadas.
2. Identifique la región plana. Aquí se definen los límites de integración.
3. Defina el rectángulo diferencial, el elemento representativo.
4. Defina la integral o las integrales para él área.
5. Evalúe la integral definida.

Ejemplo 1

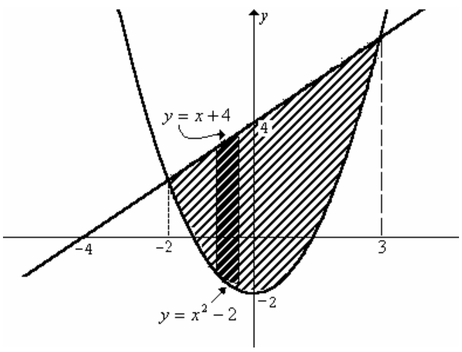
Calcular el valor del área de la región limitada por $\begin{cases} y = x + 4 \\ y = x^2 - 2 \end{cases}$

<u>SOLUCIÓN</u>:

PASO 1: Graficamos en un mismo plano $y = x + 4$ y $y = x^2 - 2$

PASO 2: Identificamos la región plana, sombreándola y hallando las intercepciones de las curvas.

PASO 3: Definimos el elemento diferencial.



$$x + 4 = x^2 - 2$$
$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$(x-3)(x+2) = 0$$
$$x = 3 \quad \vee \quad x = -2$$

PASO 4: La integral definida para el área sería:

$$A = \int_{-2}^{3} \left[(x+4) - (x^2 - 2)\right]dx$$

PASO 5: Evaluando la integral definida, tenemos:

$$A=\int_{-2}^{3}\left[(x+4)-(x^2-2)\right]dx=\int_{-2}^{3}\left[-x^2+x+6\right]dx$$

$$=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+6x\right)\Bigg|_{-2}^{3}$$

$$=\left(-\frac{3^3}{3}+\frac{3^2}{2}+6(3)\right)-\left(-\frac{(-2)^3}{3}+\frac{(-2)^2}{2}+6(-2)\right)$$

$$=-9+\frac{9}{2}+18-\frac{8}{3}+2-12$$

$$A=\frac{5}{6}$$

Ejemplo 2

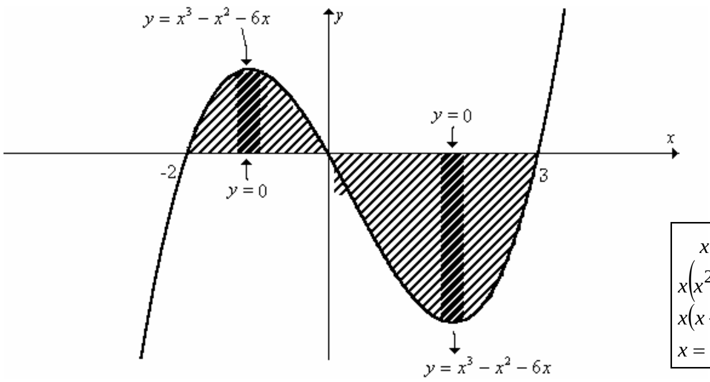
Calcular el valor del área de la región limitada por $\begin{cases} y=x^3-x^2-6x \\ y=0 \end{cases}$

SOLUCIÓN:

PASO 1: Dibujamos $y=x^3-x^2-6x$

PASO 2: Identificamos la región plana, sombreándola y hallando las intercepciones de la curva con el eje x.

PASO 3: Definimos el elemento diferencial.



$$\begin{aligned} &x^3-x^2-6x=0 \\ &x(x^2-x-6)=0 \\ &x(x-3)(x+2)=0 \\ &x=0 \quad \vee \quad x=3 \quad \vee \quad x=-2 \end{aligned}$$

PASO 4: La integral definida para el área sería:

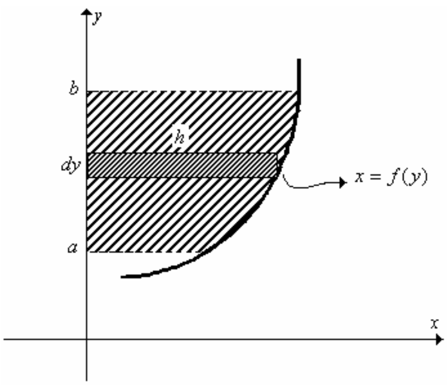
$$A=\int_{-2}^{0}\left[(x^3-x^2-6x)-(0)\right]dx+\int_{0}^{3}\left[(0)-(x^3-x^2-6x)\right]dx$$

PASO 5: Evaluando la integral definida, tenemos:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{0} \left[\left(x^3 - x^2 - 6x\right) - (0)\right] dx + \int_{0}^{3} \left[(0) - (x^3 - x^2 - 6x\right] dx \\
&= \int_{-2}^{0} \left[x^3 - x^2 - 6x\right] dx + \int_{0}^{3} \left[-x^3 + x^2 + 6x\right] dx \\
&= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 6\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{0} + \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{3} \\
&= \left[0 - \left(\frac{(-2)^4}{4} - \frac{(-2)^3}{3} - 6\frac{(-2)^2}{2}\right)\right] + \left[\left(-\frac{3^4}{4} + \frac{3^3}{3} + 6\frac{3^2}{2}\right) - (0)\right] \\
&= -4 - \frac{8}{3} + 12 - \frac{81}{4} + 9 + 27 \\
A &= \frac{253}{12}
\end{aligned}
$$

4.1.3 ÁREA DE REGIONES SIMPLE- y

Si la región plana tuviese la siguiente forma:

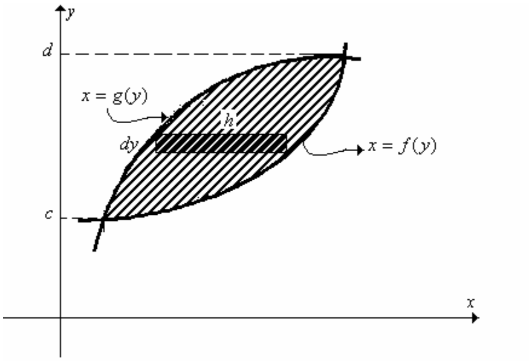


Es más conveniente tomar el elemento diferencial representativo en disposición horizontal

El área del elemento diferencial será: $dA = hdy = xdy = f(y)dy$

Entonces el área de la región plana es: $A = \int_{c}^{d} f(y)dy$

Y para el caso de regiones simple-y más generales, tenemos:



El área del elemento diferencial será: $dA = hdy = [f(y) - g(y)]dy$

Entonces el área de la región plana esta dada por:

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy$$

Ejemplo 3

Calcular el área de la región limitada por $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = -x + 6 \\ y = 0 \end{cases}$

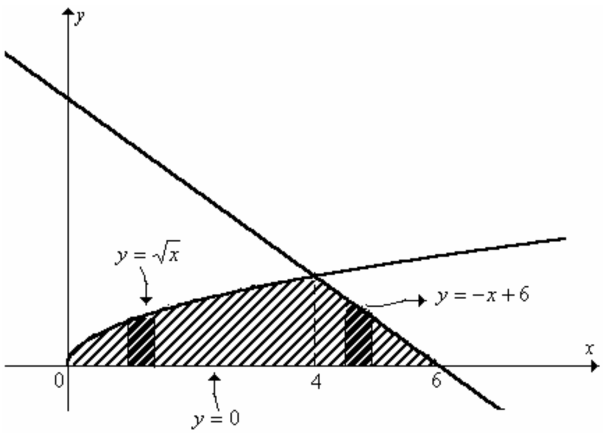
SOLUCIÓN:

PASO 1: Se dibuja en un mismo plano $y = \sqrt{x}$ y $y = -x + 6$

PASO 2: Identificamos la región plana, sombreándola y hallamos las intercepciones de las curvas.

PASO 3, 4 y 5: En este caso observamos que el elemento diferencial puede ser de las dos formas.

PRIMER MÉTODO.
Escogemos el elemento diferencial vertical

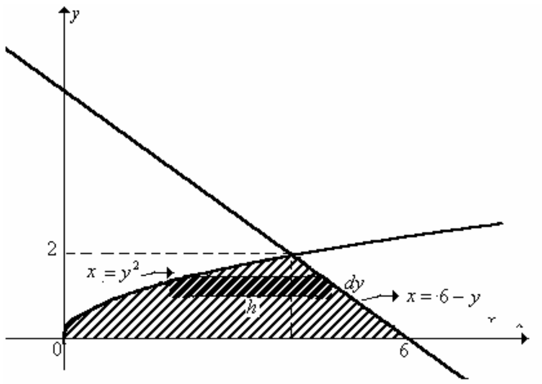


$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= -x + 6 \\ \left(\sqrt{x}\right)^2 &= (-x + 6)^2 \\ x &= x^2 - 12x + 36 \\ x^2 - 13x + 36 &= 0 \\ (x - 9)(x - 4) &= 0 \\ x = 9 \quad &\vee \quad x = 4 \end{aligned}$$

El área está dado por:

$$A=\int_0^4 \sqrt{x}\,dx+\int_4^6 (-x+6)dx$$
$$=\frac{2}{3}(x)^{3/2}\Big|_0^4+\left(-\frac{x^2}{2}+6x\right)\Big|_4^6$$
$$=\left[\frac{2}{3}(4)^{3/2}-0\right]+\left(-\frac{6^2}{2}+6(6)\right)-\left(-\frac{4^2}{2}+6(4)\right)$$
$$=\frac{16}{3}-18+36+8-24$$
$$A=\frac{22}{3}$$

SEGUNDO MÉTODO.
Escogiendo el elemento diferencial horizontal:



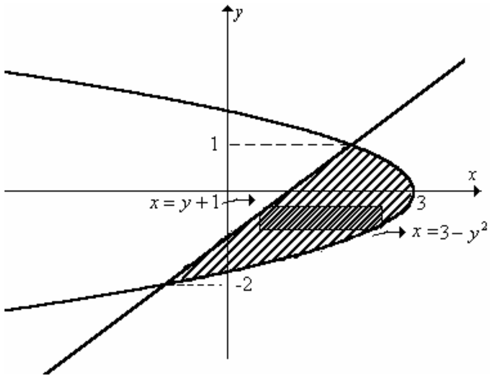
El área está dada por:

$$A=\int_0^2 \left[(6-y)-y^2\right]dy$$
$$=\left(6y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^2$$
$$=\left(6(2)-\frac{2^2}{2}-\frac{2^3}{3}\right)-(0)$$
$$=12-2-\frac{8}{3}$$
$$A=\frac{22}{3}$$

Ejemplo 4

Calcular el área de la región limitada por $\begin{cases} y=x-1 \\ x=3-y^2 \end{cases}$

SOLUCIÓN:
PASO 1, PASO 2 y PASO 3: El elemento diferencial sería mejor horizontal en este caso



$$y+1=3-y^2$$
$$y^2+y-2=0$$
$$(y+2)(y-1)=0$$
$$y=-2 \quad \vee \quad y=1$$

Paso 4 y 5: El área de la región sería:

$$A=\int_{-2}^{1}\left[\left(3-y^2\right)-(y+1)\right]dy$$
$$=\int_{-2}^{1}\left[-y^2-y+2\right]dy$$
$$=\left(-\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}+2y\right)\Bigg|_{-2}^{1}$$
$$=\left(-\frac{1^3}{3}-\frac{1^2}{2}+2(1)\right)-\left(-\frac{(-2)^3}{3}-\frac{(-2)^2}{2}+2(-2)\right)$$
$$=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2-\frac{8}{3}+2+4$$
$$A=\frac{9}{2}$$

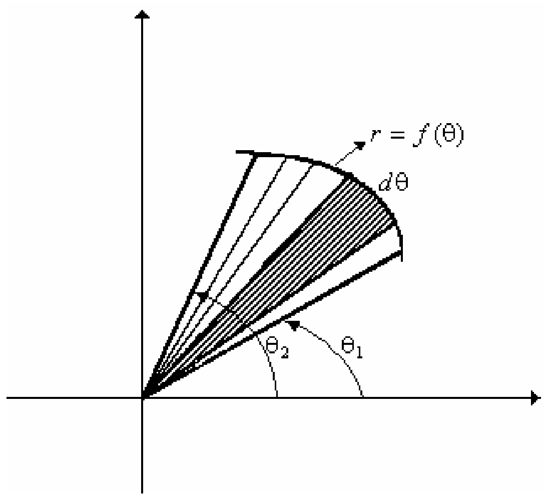
Ejercicios propuestos 4.1

Hallar el área de la región limitada por las curvas:

1. $y=2-x^2, \quad y=x,$
2. $y=4x-x^2, \quad y=0,$ entre $x=1$ y $x=3$.
3. $y=\sqrt{x-4}, \quad y=0, x=8$.
4. $y=x^2-4x+3, \quad x-y-1=0$.
5. $y=\sqrt{2x}, \quad y=2x-4, \quad x=0$.
6. $y^2-2x=0, \quad y^2+4x-12=0$.
7. $y^2=x+2, \quad y=x-4$
8. $y=x^2, \quad y=-x^2+4x$
9. $y=x+6, \quad y=x^3, \quad y=-\frac{2x}{4}$.
10. $y=|x-1|, \quad y=x^2-3$
11. $y=x^3+3x^2, \quad y=x,$
12. $y=x^3-6x^2+8x, \quad y=x^2-4x$

4.1.4 AREAS EN COORDENADAS POLARES.

Ahora trataremos regiones simple-θ, regiones que están limitadas por curvas cuyas ecuaciones están dadas en forma polar.



En este caso, el elemento diferencial tiene la forma de un sector circular, entonces su área está dada por:

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

Por tanto el área de la región está dada por:

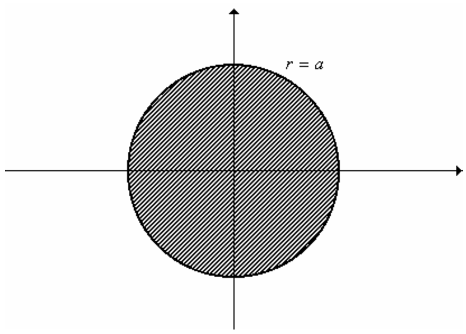
$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[f(\theta) \right]^2 d\theta$$

Ejemplo 1

Hallar el área de la región encerrada por $r = a$

SOLUCIÓN:

Graficando la circunferencia $r = a$ e identificando la región, tenemos:



El área estaría dada por:

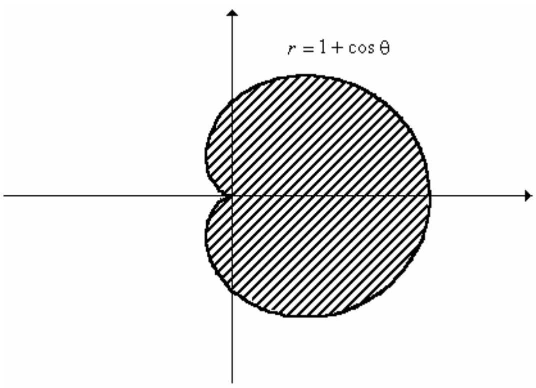
$$A=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left[f(\theta)\right]^2 d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\left[a\right]^2 d\theta$$
$$=\frac{1}{2}a^2\int_{0}^{2\pi} d\theta$$
$$=\frac{1}{2}a^2\,\theta\Big|_0^{2\pi}$$
$$A=\pi a^2$$

Ejemplo 2

Hallar el área de la región encerrada por $r=1+\cos\theta$

SOLUCIÓN:

Graficando la cardioide $r=1+\cos\theta$ e identificando la región, tenemos:



El área estaría dada por:

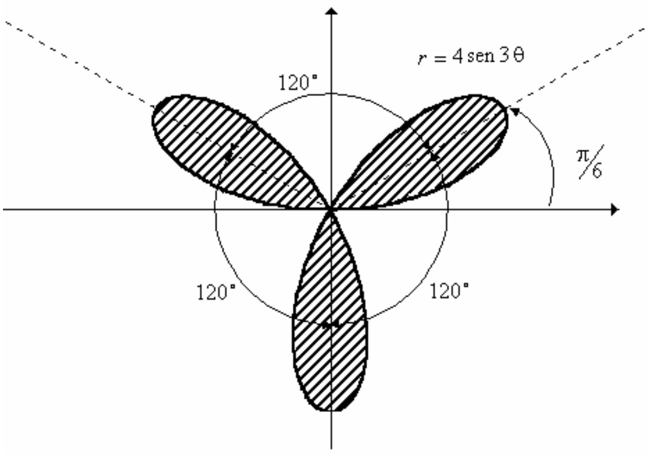
$$A=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left[f(\theta)\right]^2 d\theta$$
$$=2\left[\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\left[1+\cos\theta\right]^2 d\theta\right]$$
$$=\int_{0}^{\pi}\left[1+2\cos\theta+\cos^2\theta\right]d\theta$$
$$=\int_{0}^{\pi}d\theta+2\int_{0}^{\pi}\cos\theta d\theta+\int_{0}^{\pi}\cos^2\theta d\theta$$
$$=\int_{0}^{\pi}d\theta+2\int_{0}^{\pi}\cos\theta d\theta+\int_{0}^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$
$$A=\theta+2\,\text{sen}\,\theta+\tfrac{1}{2}+\frac{\text{sen}\,2\theta}{4}\Big|_0^{\pi}$$
$$A=\pi$$

Ejemplo 3

Hallar el área de la región encerrada por $r = 4\,\text{sen}\,3\theta$

SOLUCIÓN:

Graficando la rosa $r = 4\,\text{sen}\,3\theta$ e identificando la región, tenemos:



El área estaría dada por:

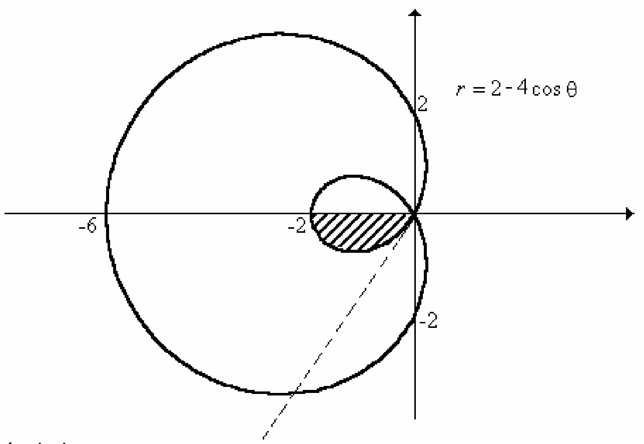
$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} [f(\theta)]^2\,d\theta \\
&= 6\left[\frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} [4sen3\theta]^2\,d\theta\right] \\
&= 3\int_0^{\pi/6} \left[16sen^2 3\theta\right]d\theta \\
&= 48\int_0^{\pi/6} \left[\frac{1-\cos 6\theta}{2}\right]d\theta \\
&= 24\left[\theta - \frac{sen6\theta}{6}\right]_0^{\pi/6} \\
A &= 24\left[\left(\frac{\pi}{6} - \frac{sen6\frac{\pi}{6}}{6}\right) - \left(0 - \frac{sen0}{6}\right)\right] \\
A &= 24\left(\frac{\pi}{6}\right) \\
A &= 4\pi
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4

Hallar el área de la región encerrada por el rizo de $r = 2 - 4\cos\theta$

SOLUCIÓN:

Graficando el caracol $r = 2 - 4\cos\theta$ e identificando la región, tenemos:



El área estaría dada por:

$$A=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}[f(\theta)]^2 d\theta$$

$$=2\left[\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}(2-4\cos\theta)^2 d\theta\right]$$

$$=\int_0^{\pi/3}\left[4-16\cos\theta+16\cos^2\theta\right]d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/3}[4]d\theta-\int_0^{\pi/3}[16\cos\theta]d\theta+\int_0^{\pi/3}\left[16\cos^2\theta\right]d\theta$$

$$=4\int_0^{\pi/3}d\theta-16\int_0^{\pi/3}[\cos\theta]d\theta+16\int_0^{\pi/3}\left[\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right]d\theta$$

$$A=4\theta-16\operatorname{sen}\theta+8\theta+4\left.\frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}\right|_0^{\pi/3}$$

$$A=\left(12\frac{\pi}{3}-16\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}+2\operatorname{sen}2\frac{\pi}{3}\right)-\left(12(0)-16\operatorname{sen}0+2\operatorname{sen}0\right)$$

$$A=4\pi-16\frac{\sqrt{3}}{2}+2\frac{\sqrt{3}}{2}$$

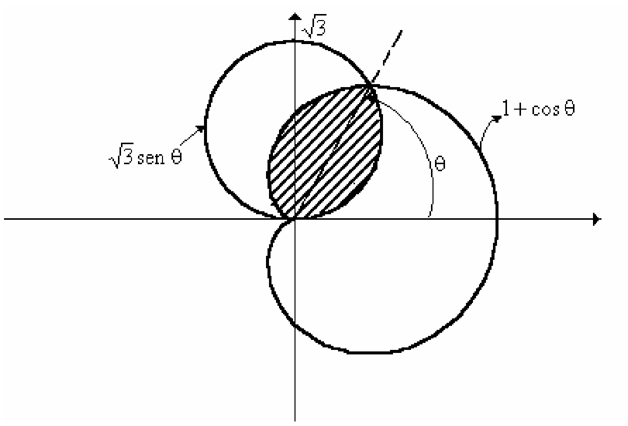
$$A=4\pi-7\sqrt{3}$$

Ejemplo 5

Hallar el área de la región interior a ambas curvas $\begin{cases} r=\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta \\ r=1+\cos\theta \end{cases}$

SOLUCIÓN:

Graficando las figuras e identificando la región, tenemos:



El ángulo de intersección se la obtiene igualando las ecuaciones de las curvas y luego resolviendo la ecuación trigonométrica que se forma, es decir:

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\theta = 1+\cos\theta\\
&\left(\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)^2 = (1+\cos\theta)^2\\
&3\,\mathrm{sen}^2\,\theta = 1+2\cos\theta+\cos^2\theta\\
&3\left(1-\cos^2\theta\right) = 1+2\cos\theta+\cos^2\theta\\
&4\cos^2\theta+2\cos\theta-2=0\\
&2\cos^2\theta+\cos\theta-1=0\\
&(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)=0\\
&\cos\theta=-1 \quad\vee\quad \cos\theta = 1/2\\
&\theta=\pi \quad\vee\quad \theta=\pi/3
\end{aligned}
$$

El área estaría dada por:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}\left[\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\theta\right]^2 d\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi}\left[1+\cos\theta\right]^2 d\theta\\
A &= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\theta-\frac{\mathrm{sen}\,2\theta}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/3} + \frac{1}{2}\left[\theta+2\,\mathrm{sen}\,\theta+\frac{1}{2}\theta+\frac{\mathrm{sen}\,2\theta}{4}\right]\Bigg|_{\pi/3}^{\pi}\\
A &= \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{3}{2}\pi\right)-\left(\frac{\pi}{2}+\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)\right)\\
A &= \frac{\pi}{4}-\frac{3}{16}\sqrt{3}+3\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}-\frac{9}{16}\sqrt{3}\\
A &= 3\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Ejercicios propuestos 4.2

1. Hallar el área limitada por la curva $r = a\cos 3\theta$.
2. Determinar el área de la región exterior a $r = 2+\mathrm{sen}\,\theta$, e interior a $r = 5\,\mathrm{sen}\,\theta$
3. Determine el área de la región interior de la cardioide $r=3+3\cos\theta$ y exterior a la cardioide $r=3+3sen\theta$ en el primer cuadrante
4. Determine el área de la región dentro de la circunferencia $r=3sen\theta$ y fuera de $r=2-sen\theta$.

5. Determinar el área interior a $r^2 = 8\cos 2\theta$ y exterior a $r = 2$.

6. Calcular el área de la región que es externa a la cardioide $r = 2 + 2sen\theta$ e interna a la cardioide $r = 2 + 2\cos\theta$

7. Determine el área interior al limaron $r = 3 - 6sen\theta$ pero exterior al rizo.

8. Hallar el área de la región interna común entre $r = \cos 2\theta$ y $r = sen2\theta$

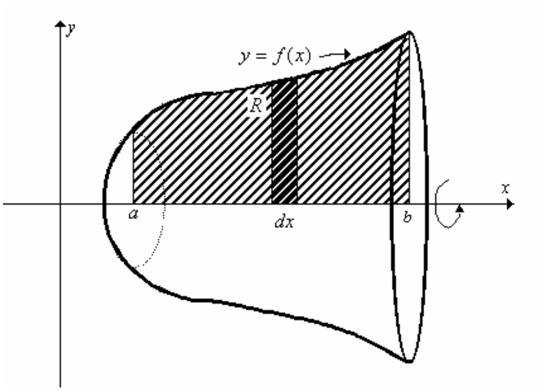
9. Determine el área de la región $R = \left\{(r,\theta)/3\sqrt{3} \le r \le 6\cos 2\theta\right\}$

4.2 VOLUMENES DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Suponga que se tiene una región plana y que se la hace girar 360^0 con respecto a un determinado eje, esta situación provoca que se genere lo que se llama SÖLIDO DE REVOLUCIÓN.

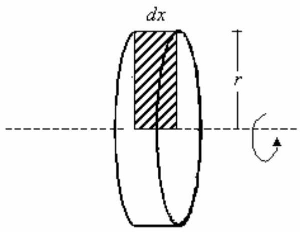
En primera instancia generalicemos 3 situaciones que se presentan.

CASO I. Suponga que se tiene una región plana simple-x, como la que se muestra en la figura. Al girar la región con respecto al eje "x" se formará un sólido de revolución:



El volumen de este sólido de revolución se lo puede calcular de la siguiente manera:

Primero: se determina el volumen del sólido diferencial que se forma al girar el elemento diferencial representativo en torno al eje indicado.



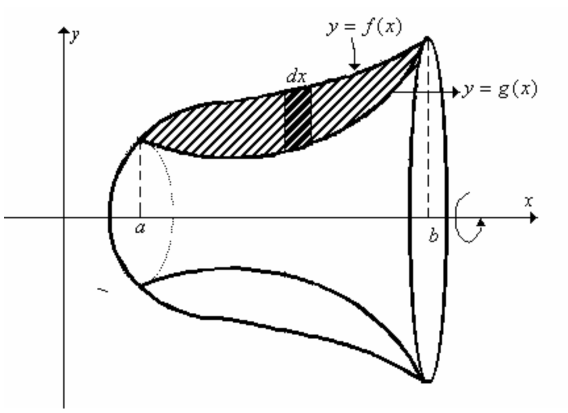
Observe que lo anterior también se lo puede ver como que se rebana el sólido y se determina el volumen de una partición. En este caso el sólido diferencial tiene la forma un DISCO, por tanto su volumen está dado por:

$$dV = \pi r^2 dx = \pi[f(x)]^2 dx$$

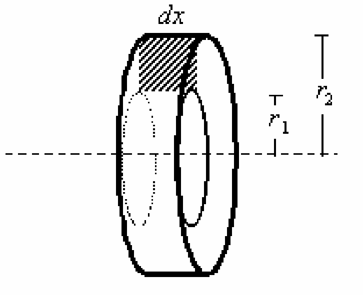
Segundo: El volumen de todo el sólido es una suma infinita de los volúmenes de las particiones, es decir:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

CASO II. Suponga ahora que la región plana fuese como la que se sombrea en la figura. Al girar la región alrededor del eje "x" se genera un sólido de revolución de la siguiente forma:



Primero: El sólido diferencial que se genera al rotar el elemento diferencial alrededor del eje "x", para cada partición tiene la forma de un ANILLO



El volumen del sólido diferencial estaría dado por:

$$dV = \pi\left[r_2^{\,2} - r_1^{\,2}\right]dx$$

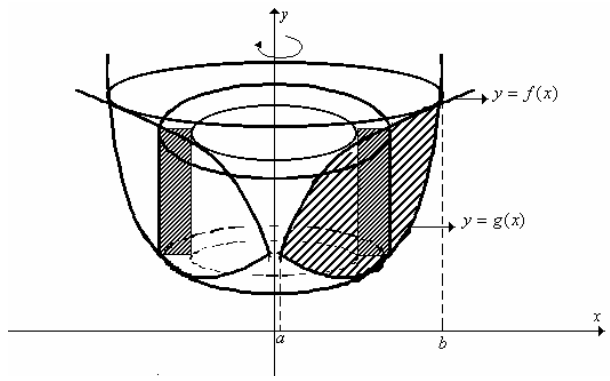
pero observe que: $r_2 = f(x)$ y $r_1 = g(x)$ entonces:

$$dV = \pi\left[\left(f(x)\right)^2 - \left(g(x)\right)^2\right]dx.$$

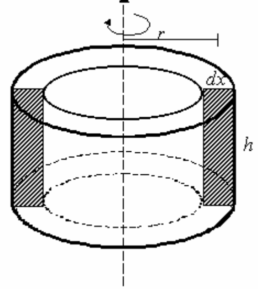
Segundo: EL volumen total del sólido que se genera al girar la región plana alrededor del eje "x", estaría dado por:

$$V = \pi\int_a^b \left[\left(f(x)\right)^2 - \left(g(x)\right)^2\right]dx$$

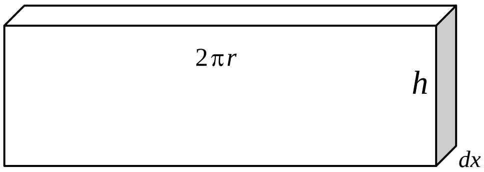
CASO III. Ahora en cambio suponga que si tuviésemos que girar la región anterior en torno al eje "y":



El sólido diferencial tendría la forma de una CORTEZA:



Para determinar el volumen de este elemento diferencial, lo cortamos y lo abrimos, se obtiene un prisma rectangular:



Su volumen sería:

$$dV = 2\pi rhdx$$

Pero observe que: $\boxed{\begin{array}{l} r = x \\ h = f(x) - g(x) \end{array}}$

Por tanto el volumen total del sólido sería:

$$V = 2\pi \int_a^b x\left[f(x) - g(x)\right]dx.$$

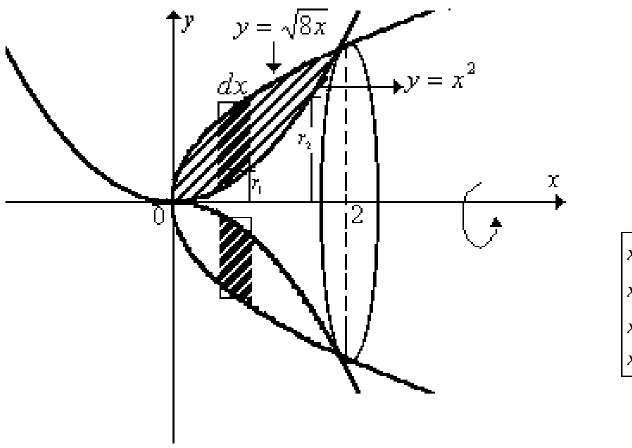
Para regiones simples-y, los procedimientos son análogos.

Ejemplo 1

Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la región plana $R: \begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{8x} \end{cases}$ alrededor del eje x.

SOLUCIÓN:

PASO 1: trazamos las gráficas de las curvas dadas.
PASO 2: Identificamos la región.
PASO 3: El elemento diferencial, lo escogemos vertical



$$\boxed{\begin{array}{l} x^2 = \sqrt{8x} \\ x^4 = 8x \\ x\left(x^3 - 8\right) = 0 \\ x = 0 \quad \vee \quad x = 2 \end{array}}$$

Al hacer girar el elemento diferencial en torno al eje indicado se forma un anillo, cuyo volumen está dado por: $dV = \pi\left[r_2^{\,2} - r_1^{\,2}\right]dx$ y en este caso $r_2 = \sqrt{8x}$ y $r_1 = x^2$

PASO 4: Por tanto

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^2 \left[\left(\sqrt{8x}\right)^2 - \left(x^2\right)^2\right]dx \\
&= \pi\int_0^2 \left[8x - x^4\right]dx \\
&= \pi\left(8\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 \\
&= \pi\left(16 - \frac{32}{5}\right) \\
V &= \frac{48}{5}\pi\, u^3
\end{aligned}
$$

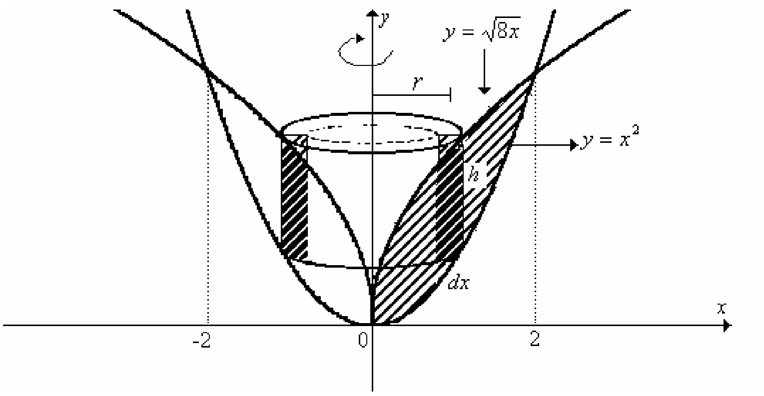
NOTA: resuelva el ejemplo tomando el elemento diferencial horizontal.

Ejemplo 2

Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la región plana $R:\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{8x} \end{cases}$ alrededor del eje y.

SOLUCIÓN:

PASO 1 Y PASO 2: La región plana es la misma que la del ejercicio anterior
PASO 3: El elemento diferencial girado en torno al eje "y" da lugar a una Corteza



Cuyo volumen está dado por $dV = 2\pi r h dx$ y en este caso $r = x$ y $h = \sqrt{8x} - x^2$

PASO 4: Por tanto:

$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi\int_0^2 \left[x\left(\sqrt{8x}-x^2\right)\right]dx \\
&= 2\pi\int_0^2 \left(\sqrt{8}x^{3/2}-x^3\right)dx \\
&= 2\pi\left[\frac{2\sqrt{8}}{5}x^{5/2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^2 \\
&= 2\pi\left[\left(\frac{2\sqrt{8}}{5}2^{5/2}-\frac{2^4}{4}\right)-(0)\right] \\
&= 2\pi\left[\frac{32}{5}-4\right] \\
V &= \frac{24\pi}{5}u^3
\end{aligned}
$$

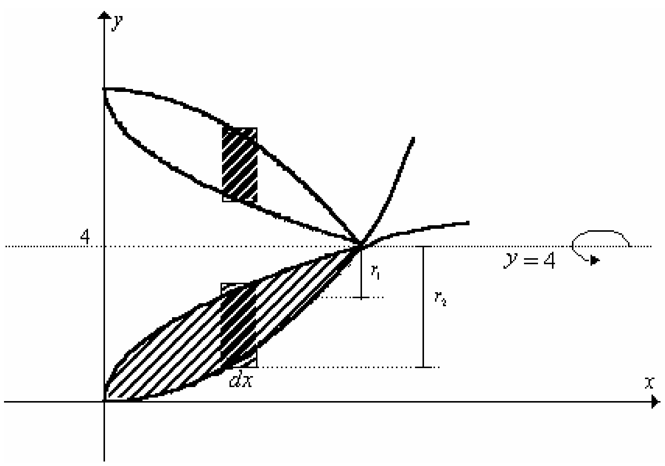
Ejemplo 3

Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la región plana $R:\begin{cases} y = x^2 \\ y=\sqrt{8x}\end{cases}$ alrededor del eje $y=4$

SOLUCIÓN:

PASO 1 Y PASO 2: La región plana es la misma que la de los ejercicios anteriores

PASO 3: El elemento diferencial girado en torno al eje " $y=4$ " da lugar a una Anillo



El volumen de este diferencial está dado por $dV=\pi\left[r_2{}^2-r_1{}^2\right]dx$ y en este caso $r_2=4-x^2$ y $r_1=4-\sqrt{8x}$

PASO 4: Por tanto, calculando el volumen tenemos:

$$V=\pi\int_0^2\left[\left(4-x^2\right)^2-\left(4-\sqrt{8x}\right)^2\right]dx$$
$$=\pi\int_0^2\left[\left(16-8x^2+x^4\right)-\left(16-8\sqrt{8x}+8x\right)\right]dx$$
$$=\pi\int_0^2\left(x^4-8x^2-8x+8\sqrt{8}x^{1/2}\right)dx$$
$$=\pi\left(\frac{x^5}{5}-8\frac{x^3}{3}-8\frac{x^2}{2}+\frac{32\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right)\Bigg|_0^2$$
$$=\pi\left[\left(\frac{2^5}{5}-8\frac{2^3}{3}-8\frac{2^2}{2}+\frac{32\sqrt{2}}{3}2^{3/2}\right)-(0)\right]$$
$$=\pi\left(\frac{32}{5}-\frac{64}{3}-16+\frac{128}{3}\right)$$
$$V=\frac{206}{15}\pi\ u^3$$

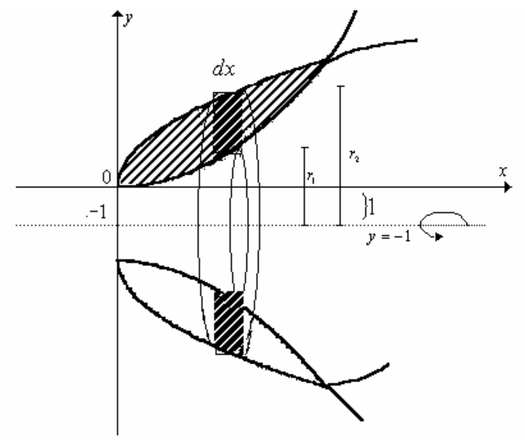
Ejemplo 4

Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la región plana $R:\begin{cases}y=x^2\\ y=\sqrt{8x}\end{cases}$ alrededor del eje $y=-1$

SOLUCIÓN:

PASO 1 Y PASO 2: La región plana es la misma que la de los ejercicios anteriores

PASO 3: El elemento diferencial girado en torno al eje " $y=-1$ " da lugar a una Anillo



El volumen de este diferencial está dado por $dV=\pi\left[r_2{}^2-r_1{}^2\right]dx$ y en este caso $r_1=1+x^2$ y $r_2=1+\sqrt{8x}$

PASO 4: Por tanto:

$$V=\pi\int_0^2\left[\left(1+\sqrt{8x}\right)^2-\left(1+x^2\right)^2\right]dx$$
$$=\pi\int_0^2\left[\left(1+2\sqrt{8x}+8x\right)-\left(1+2x^2+x^4\right)\right]dx$$
$$=\pi\int_0^2\left(2\sqrt{8}(x)^{1/2}+8x-2x^2-x^4\right)dx$$
$$=\pi\left(2\sqrt{8}\,\frac{x^{3/2}}{3/2}+8\frac{x^2}{2}-2\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2$$
$$=\pi\left[\left(\frac{8\sqrt{2}}{3}2^{3/2}+4\left(2^2\right)-2\frac{2^3}{3}-\frac{2^5}{5}\right)-(0)\right]$$
$$=\pi\left(\frac{32}{3}+16-\frac{16}{3}-\frac{32}{5}\right)$$
$$V=\frac{174}{15}\pi\ u^3$$

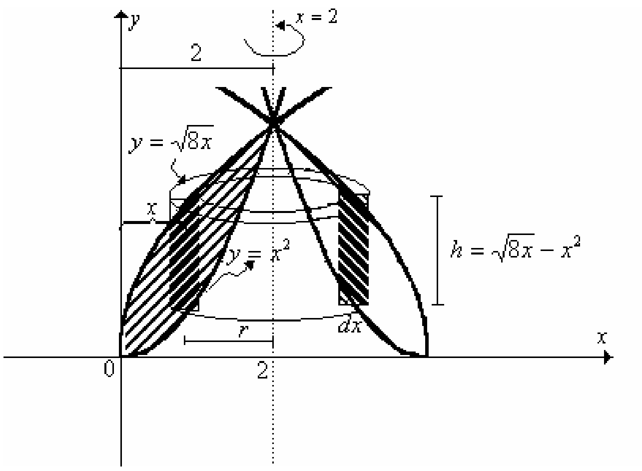
Ejemplo 5

Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la región plana $R:\begin{cases} y=x^2 \\ y=\sqrt{8x}\end{cases}$ alrededor del eje $x=2$

SOLUCIÓN:

PASO 1 Y PASO 2: La región plana es la misma que la de los ejercicios anteriores

PASO 3: El elemento diferencial girado en torno al eje " $x=2$ " da lugar a una corteza



El volumen de este diferencial está dado por $dV=2\pi rhdx$ y en este caso $r=2-x$ y $h=\sqrt{8x}-x^2$

PASO 4: Por tanto:

$$V = 2\pi \int_0^2 (2-x)\left(\sqrt{8x} - x^2\right)dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 \left(2\sqrt{8x} - 2x^2 - x\sqrt{8x} + x^3\right)dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 \left(4\sqrt{2}(x)^{1/2} - 2x^2 - 2\sqrt{2}(x)^{3/2} + x^3\right)dx$$

$$= 2\pi \left(4\sqrt{2}\frac{x^{3/2}}{3/2} - 2\frac{x^3}{3} - 2\sqrt{2}\frac{x^{5/2}}{5/2} + \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2$$

$$= 2\pi \left[\left(\frac{8\sqrt{2}}{3}(2)^{3/2} - 2\frac{2^3}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{5}2^{5/2} + \frac{2^4}{4}\right) - (0)\right]$$

$$= 2\pi \left(\frac{32}{3} - \frac{16}{3} - \frac{32}{5} + \frac{16}{4}\right)$$

$$V = \frac{88}{15}\pi\ u^3$$

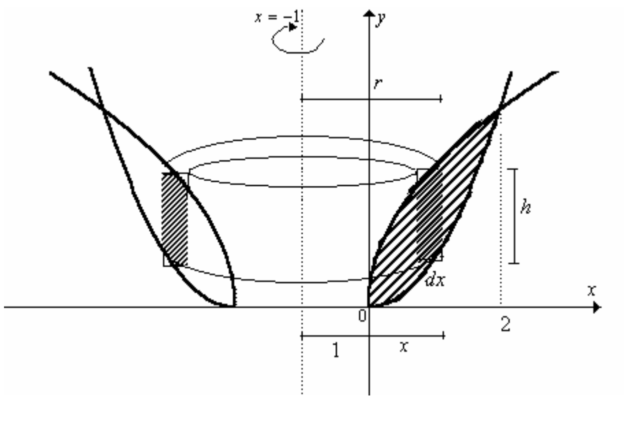
Ejemplo 6

Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la región plana $R:\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{8x} \end{cases}$ alrededor del eje $x = -1$

SOLUCIÓN:

PASO 1 Y PASO 2: La región plana es la misma que la de los ejercicios anteriores

PASO 3: El elemento diferencial girado en torno al eje " $x = -1$ " da lugar a una corteza



El volumen de este diferencial está dado por $dV = 2\pi rhdx$ y en este caso $r = 1 + x$ y $h = \sqrt{8x} - x^2$

PASO 4: Por tanto:

$$V = 2\pi \int_0^2 (1+x)\left(\sqrt{8x} - x^2\right)dx$$
$$= 2\pi \int_0^2 \left(\sqrt{8x} - x^2 + x\sqrt{8x} - x^3\right)dx$$
$$= 2\pi \int_0^2 \left(2\sqrt{2}(x)^{1/2} - x^2 + 2\sqrt{2}(x)^{3/2} - x^3\right)dx$$
$$= 2\pi \left(2\sqrt{2}\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^3}{3} + 2\sqrt{2}\frac{x^{5/2}}{5/2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2$$
$$= 2\pi \left[\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}(2)^{3/2} - \frac{2^3}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{5}2^{5/2} - \frac{2^4}{4}\right) - (0)\right]$$
$$= 2\pi\left(\frac{16}{3} - \frac{8}{3} + \frac{32}{5} - \frac{16}{4}\right)$$
$$V = \frac{152}{15}\pi\ u^3$$

Ejercicios Propuestos 4.3

1. Calcular el volumen del sólido generado por la rotación de la región R alrededor del eje indicado; siendo R la región limitada por las curvas, cuyas ecuaciones se dan a continuación:

   a. $y = 2x - x^2, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$; eje y

   b. $x = 1, \quad y = \frac{\pi}{2}, \quad y = arc\ \mathrm{tg}\, x, \quad x = 4$; eje y .

   c. $y = 0, \quad y = 3, \quad x = 1, \quad x = 3, \quad y = \frac{1}{x-1}; \quad eje \quad x = 1$.

2. Sea R la región limitada por las curvas: $y = x^2, \quad y = \frac{1}{x}$ y las rectas $y = 0, \quad x = 2$ ..

   a) Calcule el volumen del sólido que se genera al rotar R alrededor del eje $x = 2$.
   b) Calcule el volumen del sólido que se genera al rotar R alrededor del eje $y = 1$.

3. Determine el volumen del sólido de revolución generado al rotar en torno al eje $x = 9$ la región limitada por las curvas: $y^2 = 9 - x, \quad y = 3 - x$.

4. Calcular el volumen del sólido generado al hacer girar alrededor de la recta $x = -4$, la región acotada por las curvas: $x = y - y^2, \quad x = y^2 - 3$.

5. Encuentre el volumen del sólido generado por la rotación en torno a la recta $y = 2$ de la región del primer cuadrante limitada por las parábolas $3x^2 - 16y + 48 = 0$, $x^2 - 16y + 80 = 0$ y el eje de las y .

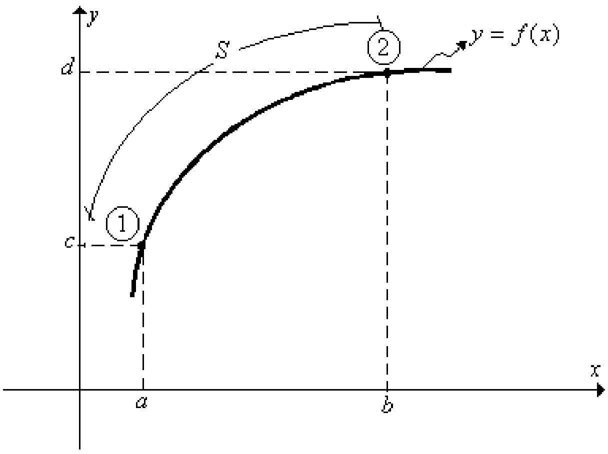
6. Calcular el volumen del sólido generado al rotar la región R alrededor del eje y, donde R es:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0 \\ x = 2 \\ y = 0 \\ y = 4 \\ x + y - 5 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

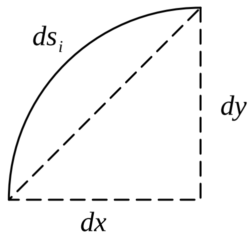
7. Sea la región $R = \left\{(x,y) / x + 1 \le y \le 4 - 2x^2\right\}$. Calcule el volumen del sólido generado al girar R alrededor del eje: a) $x = 1$, b) $y = -1$

4.3 LONGITUD DE ARCO

Siguiendo el esquema de procedimientos para determinar áreas de regiones planas y volúmenes de sólidos de revolución, se hacen infinitas particiones de la curva y se establece una suma infinita.



Una partición diferencial tendrá la forma:



Y su longitud está dada por: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

1. Si $y = f(x)$ entonces se utiliza el diferencial de arco de la forma:

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Es decir: $$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

2. Si $x = f(y)$ entonces se utiliza el diferencial de arco de la forma:

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy} dy = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

Es decir: $$s = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

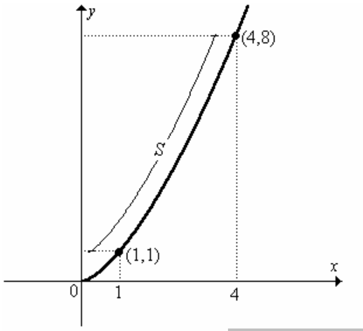
3. Finalmente si $C:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ entonces se utiliza el diferencial de arco de la forma: $ds = \dfrac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dt}\,dt = \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

Es decir: $$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

Ejemplo 1

Encuentre la longitud de arco de la curva $y = x^{3/2}$ desde el punto $(1,1)$ al punto $(4,8)$

SOLUCIÓN:



En este caso usamos el diferencial de arco de la forma $s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ ¿por qué?

Ahora $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{1/2}$

Por tanto:

$$\begin{aligned} s &= \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \\ &= \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2}\,dx \\ &= \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\;dx \\ &= \frac{2}{3}\left.\frac{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}}{9/4}\right|_1^4 \\ s &= \frac{8}{27}\left(10^{3/2} - \left(\tfrac{13}{4}\right)^{3/2}\right) \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Encuentre la longitud de la curva $y = \int_1^x \sqrt{u^3 - 1}\,du \; ; 1 \le x \le 2$

SOLUCIÓN:

La longitud de arco esta dada por: $s = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$

Para lo cual la derivada sería: $\frac{dy}{dx} = D_x \int_1^x \sqrt{u^3 - 1}\,du = \sqrt{x^3 - 1}$

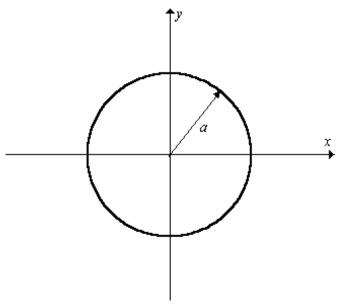
Reemplazando resulta:

$$
\begin{aligned}
s &= \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \\
&= \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\sqrt{x^3 - 1}\right)^2}\,dx \\
&= \int_1^2 \sqrt{1 + x^3 - 1}\,dx \\
&= \int_1^2 \sqrt{x^3}\,dx \\
&= \left.\frac{x^{5/2}}{5/2}\right|_1^2 \\
&= \frac{2}{5}\left(2^{5/2} - 1^{5/2}\right) \\
s &= \frac{2}{5}\left(4\sqrt{2} - 1\right)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3

Calcular la longitud de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$

SOLUCIÓN:



Para este caso es mejor calcular la longitud de arco con la forma paramétrica

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

La ecuación de la circunferencia en forma paramétrica es: $C:\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\,\mathrm{sen}\,t\end{cases}$ $;0\leq t\leq 2\pi$

Por tanto $\frac{dx}{dt}=-a\,\mathrm{sen}\,t$ y $\frac{dy}{dt}=a\cos t$. Reemplazando resulta:

$$\begin{aligned}
s&=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt\\
&=\int_0^{2\pi}\sqrt{(-a\,\mathrm{sen}\,t)^2+(a\cos t)^2}\,dt\\
&=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2\,t+a^2\cos^2 t}\;dt\\
&=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\left(\mathrm{sen}^2\,t+\cos^2 t\right)}dt\\
&=\int_0^{2\pi}a\;dt\\
&=a\int_0^{2\pi}dt\\
&=at\Big|_0^{2\pi}\\
s&=2\pi a
\end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos 4.4

1. Determine la longitud de arco de la curva $y=1-\ln(\cos x)$; $|x|\leq\frac{\pi}{4}$
2. Determine la longitud de arco de la curva: $\begin{cases}x=t-\mathrm{sen}\,t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ en el intervalo $0\leq t\leq 4\pi$
3. Determine la longitud de arco de la curva: $\begin{cases}x=a\cos t+atsent\\ y=asent-at\cos t\end{cases}$ en el intervalo $-1\leq t\leq 1$
4. Encuentre la longitud de la curva $y=\int_{\pi/6}^{x}\sqrt{64sen^2u\cos^4u-1}\,du$ $,\frac{\pi}{6}\leq x\leq\frac{\pi}{3}$

4.3.1 LONGITUD DE ARCO EN COORDENADAS POLARES.

La longitud de arco esta dada por:

$$s=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

Reemplazando, tenemos:

$$s=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{\left(f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)sen\,\theta\right)^2+\left(f'(\theta)sen\,\theta+f(\theta)\cos\theta\right)^2}\,d\theta$$

$$s=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{\begin{matrix}[f'(\theta)]^2\cos^2\theta-2f'(\theta)f(\theta)\cos\theta sen\,\theta+[f(\theta)]^2sen^2\theta+\\+[f'(\theta)]^2sen^2\theta+2f'(\theta)f(\theta)\cos\theta sen\,\theta+[f(\theta)]^2\cos^2\theta\end{matrix}}\,d\theta$$

$$s=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{[f'(\theta)]^2\left(\cos^2\theta+sen^2\theta\right)+[f(\theta)]^2\left(sen^2\theta+\cos^2\theta\right)}\,d\theta$$

Resultando finamente:

$$s=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{\left(f(\theta)\right)^2+\left(f'(\theta)\right)^2}\,d\theta$$

Ejemplo 1

Hallar la longitud de la circunferencia $r=a$

SOLUCIÓN:

Aplicando la formula y resolviendo, resulta:

$$s=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{\left(f(\theta)\right)^2+\left(f'(\theta)\right)^2}\,d\theta$$

$$s=\int_{0}^{2\pi}\sqrt{a^2+o^2}\,d\theta$$

$$s=\int_{0}^{2\pi}a\,d\theta$$

$$s=a\theta\Big|_0^{2\pi}$$

$$s=2\pi a$$

Ejemplo 2

Hallar la longitud de la cardioide $r=1+\cos\theta$

SOLUCIÓN:

Aplicando la formula y resolviendo, resulta:

$$s=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{\left(f(\theta)\right)^2+\left(f'(\theta)\right)^2}\,d\theta$$

$$s=2\int_0^{\pi}\sqrt{(1+\cos\theta)^2+(-\operatorname{sen}\theta)^2}\,d\theta$$

$$s=2\int_0^{\pi}\sqrt{1+2\cos\theta+\underbrace{\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta}_{1}}\,d\theta$$

$$s=2\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta$$

$$s=2\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos\theta}\,d\theta$$

$$s=2\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{2\cos^2\tfrac{\theta}{2}}\,d\theta$$

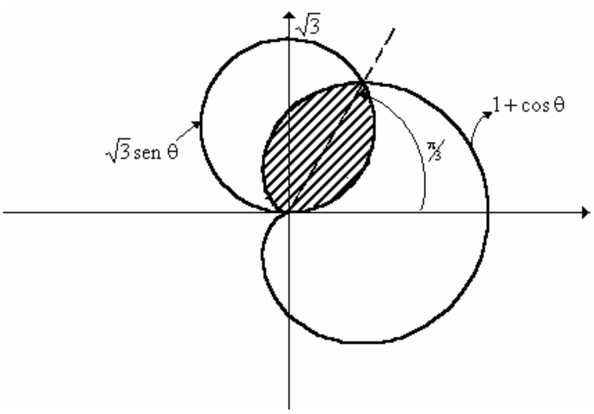
$$s=2\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{2}\cos\tfrac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$s=4\operatorname{sen}\tfrac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi}=8$$

Ejemplo 3

Hallar perímetro de región interior a las curvas $\begin{cases} r=\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta \\ r=1+\cos\theta \end{cases}$

SOLUCIÓN:



En este caso el perímetro estaría dado por

$$Per = \int_0^{\pi/3} \sqrt{\left(\sqrt{3}\,\text{sen}\,\theta\right)^2 + \left(\sqrt{3}\cos\theta\right)^2}\,d\theta + \int_{\pi/3}^{\pi} \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + (-\,\text{sen}\,\theta)^2}$$

$$Per = \int_0^{\pi/3} \sqrt{3\,\text{sen}^2\theta + 3\cos^2\theta}\,d\theta + \int_{\pi/3}^{\pi} 2\cos\tfrac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$Per = \sqrt{3}\theta\Big|_0^{\pi/3} + 4\,\text{sen}\,\tfrac{\theta}{2}\Big|_{\pi/3}^{\pi}$$

$$Per = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi + 4 - 4\,\tfrac{1}{2}$$

$$Per = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi + 2$$

Ejercicios propuestos 4.5

1. Determine el área y el perímetro de la región interior a las curvas $r = 3\cos\theta$ y $r = 1+\cos\theta$.
2. Determinar:
   a) El valor de a para el cual el área de la región limitada por la cardioide $r = a(1-\cos\theta)$ sea igual a 9π unidades cuadradas.
   b) La longitud de la cardioide definida en el literal a).

4.4 VALOR MEDIO DE UNA FUNCIÓN DE UNA VARIABLE

Sea f una función continua en el intervalo $[a,b]$. El *VALOR MEDIO O VALOR PROMEDIO* de f, denotado como $\overline{f}$, está dado por:

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Ejemplo

Las estadísticas indican que "t" meses después del principio de año, el precio de la carne de res era $p(t) = 0.09t^2 - 0.2t + 1.6$ dólares por libra. ¿Cuál fue el precio medio de la carne durante los 3 primeros meses?.

SOLUCIÓN:
El promedio del precio durante los 3 primeros meses es:

$$\overline{p} = \frac{1}{b-a}\int_a^b p(t)dt$$
$$= \frac{1}{3-0}\int_0^3 \left(0.09t^2 - 0.2t + 1.6\right)dt$$
$$= \frac{1}{3}\left[\frac{0.09t^3}{3} - \frac{0.2t^2}{2} + 1.6t\right]_0^3$$
$$= \frac{1}{3}\left[0.81 - 0.9 + 4.8\right]$$
$$\overline{p} = \$1.57$$

Misceláneos

1. Sea R la región definida por : $R = \left\{(x,y)\in IR^2 \,/\, \ln x \le y \le 1 \wedge 1 \le x \le e\right\}$. Calcule:
   a) El área de la región R.
   b) El volumen del sólido que se genera al rotar la región R alrededor del eje "y"

2. Sea la región
   $R = \left\{(x,y)\in IR^2 \,/\left[x+2 \le y \le 4 - x^2 \wedge x \le 0\right] \vee \left[x+2 \le y \le 4 - x \wedge x \ge 0\right]\right\}$
   Calcule:
   a) El área de la región R.
   b) El volumen del sólido que se genera al rotar la región R alrededor de la recta $y = 4$
   c) El volumen del sólido que se genera al rotar la región R alrededor de la recta $x = 1$

3. Calcule el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar la región
   $R = \left\{(x,y)\in IR^2 \,/\, x^2 - 14 \le y \le \sqrt{x}\right\}$
   alrededor de la recta $x = 4$.
4. Calcular el área de la región interior a la rosa $r = 2\cos 2\theta$ y exterior a la circunferencia $r = 1$.
5. Sea la región R limitada por la recta $x = 0$ y la curva $y^2 = 4 - x$. Determine el valor de " a " de tal modo que la recta $x = a$ divida a la región R en dos regiones de igual área.
6. Sea la región $R = \left\{(x,y)/ 0 \le y \le 4 - x^2\right\}$. Determine el valor de " a " de tal modo que la recta $y = a$ divida a la región R en dos regiones de igual área.
7. Calcule el área de la región $R = \left\{(x,y)/ y \ge 2x \wedge y \le x^2 + 2x \wedge y \le 12 - 2x\right\}$
8. Calcular el área de la región interior al rizo grande y exterior al rizo pequeño de $r = 2 - \cos\theta$.
9. Sea $R = \left\{(x,y)/ 2x \le y \le x^2 + 1 \wedge 0 \le x \le 1\right\}$. Calcule el volumen del sólido que se genera al rotar la región R alrededor de la recta $x = 1$
10. Calcular el área de la región interior al rizo grande y exterior al rizo pequeño de $r = 2 + 4\cos\theta$.
11. Determine la longitud de la curva definida por las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t \\ y = 2sent - sen2t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$

12. Sea R la región limitada por $\begin{cases} y = 0 \\ y = x^2 \\ y = -x^2 + 4x \end{cases}$
    Calcule:
    a) El área de la región R.
    b) El volumen del sólido que se genera al rotar la región R alrededor de la recta $x = -1$
13. Calcular el área de la región interior a $r = 1 + 2\cos\theta$ y exterior a la $r = 1$.
14. Sea $R = \left\{(x,y)/ y \ge 0 \wedge x \ge \left(3y^2 - 2\right) \wedge x \le y^2\right\}$. Calcule el volumen del sólido que se genera al rotar la región R alrededor del eje $y = 1$.

15. Calcule el perímetro de la región ubicada en el primer cuadrante y limitada por $y=\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}$, $y=\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$, $y=-x+\frac{8}{3}$, $x=0$, $y=0$.
16. Determinar el volumen del sólido que se genera al rotar la región limitada por $y=\frac{x^2}{4}$, $x=(y-1)^2$, $x=3-y$, $x=0$ alrededor de $y=2$.
17. Sea $R=\left\{(x,y)\in IR^2 \,/\, |x|-2\leq y\leq 4-x^2\right\}$. Determine:
    a) El área de dicha región R
    b) El volumen del sólido que se genera al rotar la región R alrededor del eje "y"
    c) El volumen del sólido que se genera al rotar la región R alrededor de la recta $y=-2$.
18. Determine el área de la región dentro de $r^2=2sen2\theta$ y fuera de $r=2sen\theta$
19. Encuentre el área de la región limitada por las curvas $y=xe^{x/3}$, $y=0$, $x=9$.
20. Determinar el volumen del sólido que se genera al rotar la región limitada por $y=x^3+1$, $y=0$, , $x=1$ alrededor de $x=1$.
21. Calcule el área de la región que es externa a la cardioide $r=2+2sen\theta$ e interna a la cardioide $r=2+2\cos\theta$.
22. Sea R la región limitada por $y=x^3$, $y=\frac{1}{2}(x-1)$, $y=-x+10$. Calcule el volumen del sólido que se genera cuando la región R rota alrededor de la recta $x=8$.
23. Calcular el volumen del sólido generado por la rotación de la región R limitada por $y=\sqrt{x}$, $y=2$, $x=0$ alrededor de la recta $y=2$.
24. Hallar el área de la región limitada por $y^2-2x=0$, $y^2+4x-12=0$
25. Hallar el área de la región limitada por $r=4\cos 3\theta$ que está fuera del circulo $r=2$
26. Calcular el área de la región interior a la circunferencia $r=a$ y exterior a la rosa $r=asen3\theta$, $a>0$.
27. Determine el volumen del sólido que se genera al rotar la región limitada por las curvas $y=x^3$, $y=x^2+2x$ alrededor de la recta $x=2$
28. Determine el volumen del sólido que se genera al rotar la región limitada por las curvas $y=4-x^2; x\geq 0$, $y=0$, $x=0$ alrededor de la recta $x=2$
29. Hallar el área interior a $r=-6\cos\theta$ y exterior a $r=2-2\cos\theta$.
30. Determine el volumen del sólido que se genera al rotar la región limitada por $y=\ln 2x$, $y=0$, $x=e$ alrededor del eje:
    a) $x=e$
    b) $y=\ln(2e)$
31. Determine la longitud de la curva definida por las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x=e^t sent \\ y=e^t\cos t \end{cases}$ $,0\leq t\leq\pi$
32. Determine el volumen del sólido que se genera al rotar la región $R=\left\{(x,y)/\left(x^2-14\leq y\leq\sqrt{x}\right)\right\}$ alrededor de la recta $x=4$
33. Calcule el área de la región comprendida entre $y=(x-3)^2$ y la recta $y=2(x+1)$
34. Calcular el volumen del sólido que se genera al rotar la región comprendida entre $y=x-x^2$, $y=0$ alrededor de la recta $y=-1$
35. Determine el volumen del sólido que se genera al rotar la región $R=\left\{(x,y)/\left(0\leq y\leq x-x^2\right)\right\}$ alrededor de la recta $x=2$.