# 5 APLICACIONES DE LA DERIVADA



OBJETIVOS:

SE PRETENDE QUE EL ESTUDIANTE:

- Resuelva problemas de razón de cambio.
- Resuelva problemas de máximos y mínimos.
- Aproxime valores.
- Aproxime funciones mediante polinomios

# 5.1 RAZÓN DE CAMBIO

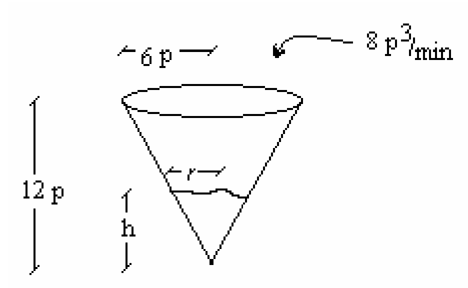
Como la derivada expresa el cambio instantáneo que experimenta una variable con respecto a otra variable, para una función $y = f(x)$, se podría obtener la derivada o razón de cambio de las variables "$x$" y "$y$" con respecto al tiempo "$t$", es decir: "$\frac{dy}{dt}$" y "$\frac{dx}{dt}$". Lo cual nos va a permitir resolver problemas de aplicación.

## Ejemplo 1

Hacia un tanque cónico fluye agua a razón de $8\,{}^{p^3}\!/_{min}$, si la altura del tanque es de 12 pies y el radio de la base es de 6 pies. ¿Qué tan rápido se esta elevando el nivel del agua cuando tiene 4 pies de altura?.

SOLUCIÓN:

Esquematizando en un gráfico, la información dada, tenemos:




Llamemos: $M \equiv Cantidad\ de\ agua\ que\ entra\ en\ p^3$

$Q \equiv Cantidad\ de\ agua\ que\ sale\ en\ p^3$

$V \equiv Cantidad\ de\ agua\ alojada\ en\ p^3$

Para este tipo de problema, de manera general se puede proponer: $M - Q = V$

Derivando con respecto al tiempo, resulta:

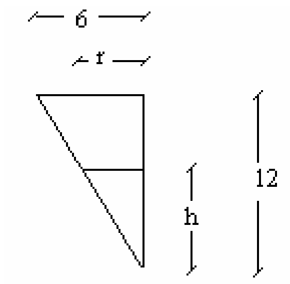
$$\frac{dM}{dt} - \frac{dQ}{dt} = \frac{dV}{dt}$$

Ahora de acuerdo a la información proporcionada, tenemos: $\frac{dM}{dt} = 8\frac{p^3}{min}$ y

$$\frac{dQ}{dt} = 0\frac{p^3}{min}.$$

El volumen del agua alojada depende de la geometría del recipiente. En este caso deberíamos usar la formula del volumen de un cono , es decir: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ .

Ahora hay que tener la función volumen en término de una variable, que en este caso, lo más indicado es que sea en función de $h$ (¿por qué?). La forma geométrica del recipiente y la forma geométrica de la masa de agua que se va alojando en el recipiente nos permite hacer lo indicado. Las secciones transversales son triángulos semejantes, esto nos permite relacionar $r$ con $h$ .




$$\frac{h}{12}=\frac{r}{6} \text{ entonces } r=\frac{h}{2}$$

reemplazando en la formula para el volumen del agua alojada, resulta:

$$V=\tfrac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h=\tfrac{\pi}{12}h^3$$

por tanto $\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{\pi}{4}h^2\dfrac{dh}{dt}$

Entonces:

$$\frac{dM}{dt}-\frac{dQ}{dt}=\frac{dV}{dt}$$
$$8-0=\tfrac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$$
$$\frac{dh}{dt}=\frac{32}{\pi h^2}\frac{p}{min}$$

En $h=4$ resulta: $\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{32}{\pi(4)^2}=\dfrac{32}{\pi 16}=\dfrac{2}{\pi}\dfrac{p}{min}$

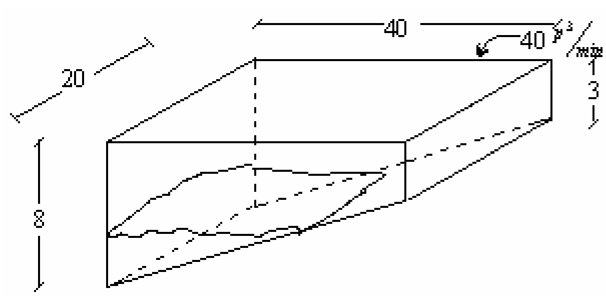
---

## Ejemplo 2

Una piscina tiene 40 p de largo y 20 p de ancho, 8 p de profundidad en el extremo mas hondo y 3 p en el extremo menos profundo, El fondo es rectangular, se esta bombeando agua a razón de 40 $p^3$/min. ¿Con qué rapidez se eleva el nivel del agua cuando tiene: a) 3 p b) 6 p

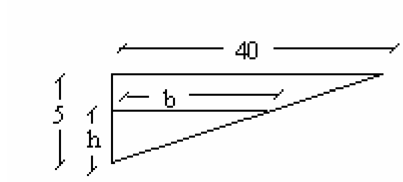
SOLUCIÓN:

Esquematizando en un gráfico, la información dada, tenemos:




Note que aquí tenemos un recipiente de doble geometría, por tanto antes que el nivel del agua sea 5p es una situación y otra situación después de los 5p.

a) $0<h\le 5$




De manera análoga al problema anterior

$$\frac{p^3}{min}\,Entra-\frac{p^3}{min}\,sale=\frac{dV}{dt}\,Alojada$$

El volumen de agua alojada en el recipiente se lo calcula con la formula para un prisma de base triangular, es decir $V = \frac{1}{2}bh(20) = 10bh$.

La relación entre b y h se la obtiene considerando los triángulos semejentes; entonces: $\frac{b}{40} = \frac{h}{5}$, que resulta: $\boxed{b = 8h}$.

Por tanto, el volumen queda: $V = 10(8h)h = 80h^2$.

De aquí resulta $\boxed{\frac{dV}{dt} = 160h\frac{dh}{dt}}$.

Reemplazando, se obtiene:

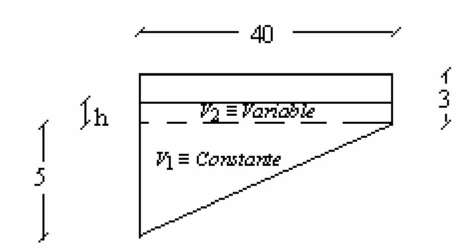
$$\frac{p^3}{min}\,Entra - \frac{p^3}{min}\,sale = \frac{dV}{dt}\,Alojada$$

$$40 - 0 = 160h\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{4h}\frac{p^3}{min}$$

En $h = 3$ resulta $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{4(3)} = \frac{1}{12}\frac{p^3}{min} = 1\frac{pu\lg}{min}$

b) si $5 \le h \le 8$, tenemos:




El volumen de agua alojada en el recipiente se lo puede calcular de la siguiente manera:

$$V = V_1 + V_2$$

$$V = \frac{1}{2}(5)(40)(20) + 40h(20)$$

$$V = 2000 + 800h$$

entonces $\boxed{\frac{dV}{dt} = 800\frac{dh}{dt}}$ y al reemplazarlo resulta:

$$\frac{p^3}{min}\,Entra - \frac{p^3}{min}\,sale = \frac{dV}{dt}\,Alojada$$

$$40 - 0 = 800\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{20}\frac{p^3}{min}$$

Note que es independiente de h.
Note también que como el volumen de la parte inferior del recipiente es constante, entonces su rapidez de cambio es "0"; por tanto no existiría ningún inconveniente si sólo trabajáramos con la parte superior de recipiente, pero con un nuevo nivel de referencia.

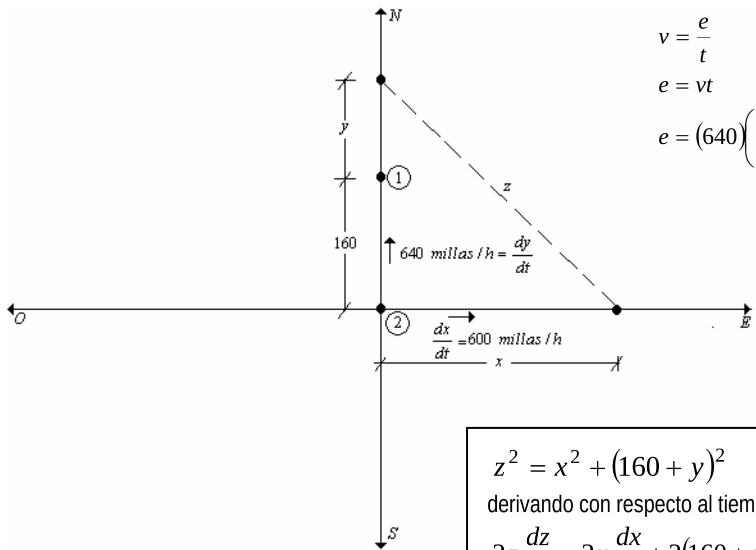
## Ejemplo 3

Un aeroplano que vuela hacia el norte a 640 millas/h pasa sobre cierta ciudad al medio día (12h00). Un segundo aeroplano que va hacia el este a 600 millas/h, esta directamente encima de la misma ciudad 15 min. mas tarde. Si los aeroplano están volando a la misma altitud, que tan rápido se están separando a la 1:15 p.m.(13h15).

SOLUCIÓN:

Esquematizando en un gráfico, la información dada, tenemos:

Referencia: 12h15




$$v=\frac{e}{t}$$

$$e=vt$$

$$e=(640)\left(\frac{1}{4}\right)=160$$

$$z^2=x^2+(160+y)^2$$

derivando con respecto al tiempo

$$2z\frac{dz}{dt}=2x\frac{dx}{dt}+2(160+y)\frac{dy}{dt}$$

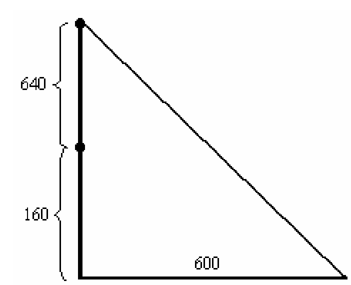
$$\frac{dz}{dt}=\frac{x\frac{dx}{dt}+(160+y)\frac{dy}{dt}}{z}$$

En 1 hora:

$$x=600\ millas$$

$$y=640\ millas$$

$$z=\sqrt{(600)^2+(640+160)^2}=1000\ millas$$




Por tanto: $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{(600)(600)+(160+640)(640)}{1000}=872\ \dfrac{millas}{hora}$

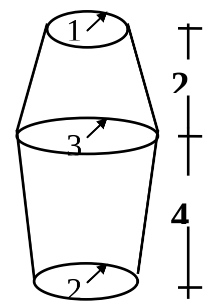
## Ejercicios Propuestos 5.1

1. De un tubo sale arena a razón de 16 pies$^3$/seg. Formando en el suelo una pirámide cónica cuya altura es siempre ¼ del diámetro de la base. ¿Con qué rapidez aumenta la altura de la pirámide cuando la misma tiene 4 pies de longitud?

2. Un depósito cónico de 12 m. de altura y radio de la base 4 m., tiene inicialmente 10 m$^3$ de agua. En t=0 comienza a fluir agua al interior del depósito a una razón de 8 m$^3$/h, y al mismo tiempo, por el fondo comienza a salir agua a razón de 5 m$^3$/h. Determine la razón a la que está variando el nivel del líquido después de 3 horas?

3. En un depósito de forma cónica se está vertiendo agua a razón de 225 litros por minuto . El cono tiene 6 metros de profundidad y 3 metros de diámetro. Si hay una fuga en la base y el nivel del agua sube a razón de 2.5 centímetros por minuto, cuando el agua tiene 4.8 metros de profundidad, ¿con qué rapidez escapa agua del depósito? $\left(1\,Litro = 10^{-3} m^3\right)$

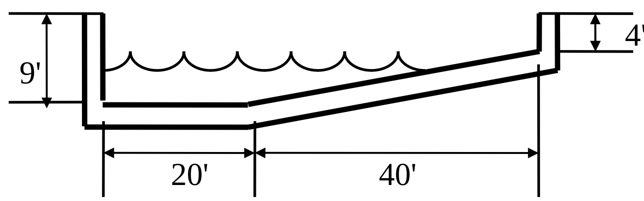
4. Considere el reservorio de la figura adjunta, al cual se está vertiendo agua a razón de 50 m$^3$/min. Determine ¿con qué rapidez sube el nivel del agua, cuando éste tiene?:
   a) 2 m. b) 5 m.



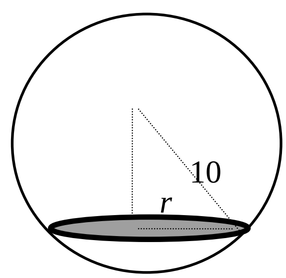

5. La orilla de una piscina es un rectángulo de 60 pies de largo y 30 pies de ancho. Su profundidad aumenta uniformemente de 4 a 9 pies en un tramo horizontal de 40 pies y después continúa al mismo nivel los 20 pies restantes, como se ilustra en la figura. La piscina se está llenando a razón de 50 pie$^3$/min de agua. Calcule aproximadamente la RAPIDEZ DE CAMBIO del nivel de agua en el momento que la profundidad es:

   a) 4 pies

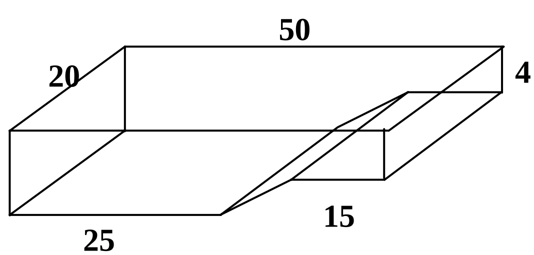
   b) 6 pies




6. Suponga que se vacía el agua de un tanque esférico de radio 10 pies. Si el nivel del agua en el tanque es 5 pies y ésta decreciendo a razón de 3 pies/seg., ¿con qué razón disminuye el radio $r$ de la superficie del agua?



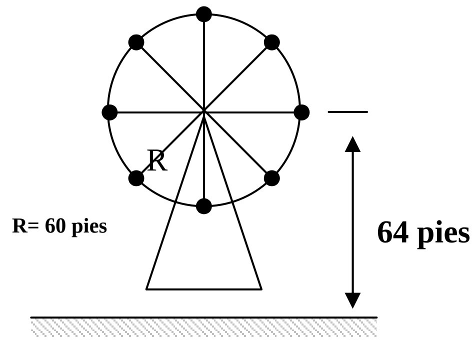

7. Una piscina tiene 20 pies de ancho, 4 pies de profundidad en un extremo y 10 pies de profundidad en el otro extremo. La piscina se llena bombeando agua a razón de 40 pies cúbicos por minuto. Encuentre la rapidez con la que sube el nivel del agua para cualquier valor de $h$, donde $h$ es la profundidad del agua.



8. Un avión que vuela a velocidad constante de 300 Km/h pasa sobre una estación terrestre de radar a una altura de 1 Km. Y se eleva a un ángulo de 30°. ¿A qué velocidad aumenta la distancia entre el avión y la estación de radar 1 minuto más tarde?

9. Un aeroplano vuela hacia el oeste a 500 Km. Por hora y pasa sobre cierto pueblo a la 11:00 a.m.; un segundo aeroplano vuela a la misma altura hacia el sur a 400 Km. por hora y pasa por el mismo pueblo a mediodía. ¿Qué tan rápido se separan a la 1:00 p.m.?

10. La rueda moscovita que se muestra en la figura dá una vuelta cada dos minutos. ¿Con qué rapidez se eleva una pasajera en el instante en que se encuentra a 54 pies por encima del suelo?



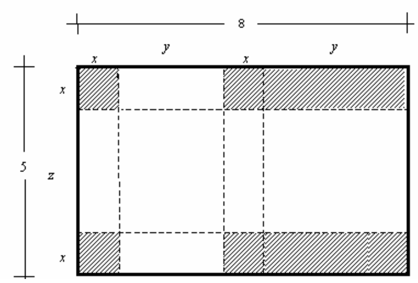

## 5.2 PROBLEMAS PRACTICOS DE MÁXIMOS Y MINIMOS

Con lo expuesto en el capitulo anterior es posible resolver problemas prácticos de optimización.

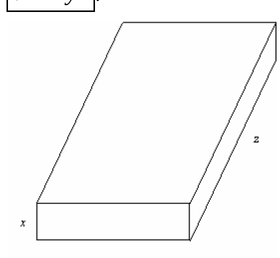
### *Ejemplo 1*

Se desea construir una caja con tapa utilizando un cartón rectangular que mide 5 pies x 8 pies. Esta se realiza cortando las regiones sombreadas de la figura y luego doblando por las líneas discontinuas, ¿Cuáles son las dimensiones x, y, z que maximizan el volumen de la caja?

**SOLUCIÓN**:




De acuerdo a la figura, la caja formada así tendrá un volumen que se puede calcular con la formula $\boxed{V = xyz}$.



Observe $5 = 2x + z$ , por tanto $z = 5 - 2x$
Observe también que $8 = 2x + 2y$ , por tanto $y = 4 - x$

Reemplazando, el volumen sería:
$$\boxed{\begin{aligned} V &= x(4-x)(5-2x) \\ &= (4x - x^2)(5-2x) \\ V &= 2x^3 - 13x^2 + 20x \end{aligned}}$$

La derivada es: $\frac{dV}{dx} = 6x^2 - 26x + 20$

Obteniendo los puntos críticos, tenemos:
$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{dV}{dx} = 0 \\ &6x^2 - 26x + 20 = 0 \\ &x = 1 \quad \vee \quad x = {}^{10}\!/_3 = 3.33 \end{aligned}}$$

Escogemos $x = 1p$ , porque no es posible que $x \geq 2.5$
Por tanto $y = 4 - x = 4 - 1 = 3p$ y $z = 5 - 2x = 5 - 2(1) = 3p$ serían las dimensiones para obtener un volumen máximo. Cuyo valor es: $V_{\text{máx}} = xyz = 1(3)(3) = 9p^3$

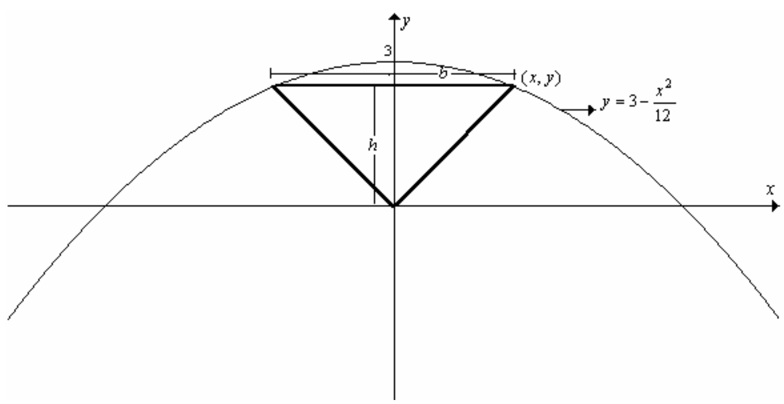
---

## Ejemplo 2

Un triángulo isósceles tiene un vértice en el origen, la base paralela al eje $x$ con los extremos en la curva $12y = 36 - x^2$. Determínese las dimensiones del triángulo de área máxima.

SOLUCIÓN:

Haciendo un esquema con la información proporcionada, tenemos:




El área de triángulo se la calcula con la formula $\boxed{A = \frac{b \times h}{2}}$

Se observa que $\boxed{h = y = 3 - \frac{x^2}{12}}$ y que $\boxed{b = 2x}$

Reemplazando, obtenemos el área en función de una sóla variable:
$$\boxed{\begin{aligned} A &= \frac{(2x)\left(3 - \frac{x^2}{12}\right)}{2} \\ A &= 3x - \frac{x^3}{12} \end{aligned}}$$

Derivando para obtener los puntos críticos, resulta:

$$\frac{dA}{dx} = 3 - \frac{x^2}{4}$$

Ahora, $\boxed{\begin{array}{l} \frac{dA}{dx} = 0 \\ 3 - \frac{x^2}{4} = 0 \end{array}}$ por tanto, despejando resulta $\boxed{x = \pm 2\sqrt{3}}$

Las dimensiones del triangula de área máxima sería:

$\boxed{b = 2x = 2\left(2\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3}}$ y $\boxed{h = y = 3 - \frac{x^2}{12} = 3 - \frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2}{12} = 3 - 1 = 2}$

por consiguiente: $A_{\text{máx}} = \frac{b \times h}{2} = \frac{\left(4\sqrt{3}\right)(2)}{2} = 4\sqrt{3}\ u^2$

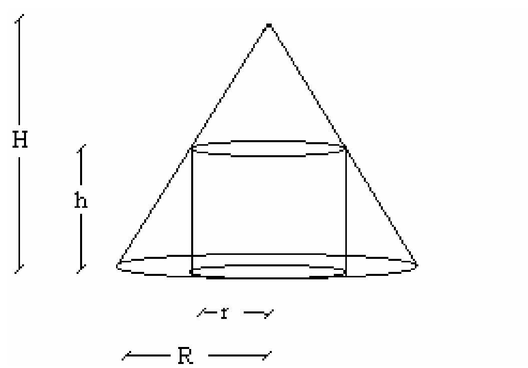
---

## *Ejemplo 3*

Encuentre las dimensiones del cilindro circular recto de volumen máximo que puede inscribirse en un cono circular recto de radio “R” y altura “H”.

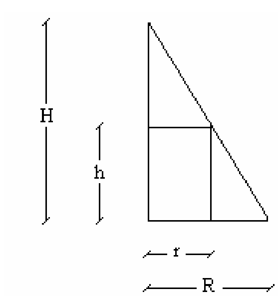
SOLUCIÓN:

Haciendo un esquema tenemos:




El volumen del cilindro se lo calcula con la formula $V = \pi r^2 h$

Para poner el volumen en función de una sola variable, relacionamos $r$ y $h$ por semejanza de triángulos:




Del gráfico observamos que: $\frac{r}{R} = \frac{H-h}{H}$

Entonces: $\boxed{\begin{array}{l} rH = HR - hR \\ hR = HR - rH \\ h = \frac{HR - rH}{R} \end{array}}$

Reemplazando, tenemos: $V = \pi r^2 h = \pi r^2 \left(\frac{HR - rH}{R}\right) = \frac{\pi H}{R}\left(r^2 R - r^3\right)$

Entonces: $\frac{dV}{dr} = \frac{\pi H}{R}\left(2rR - 3r^2\right)$ y para el óptimo: $\boxed{\begin{array}{l} \frac{dV}{dr} = 0 \\ \frac{\pi H}{R}\left(2rR - 3r^2\right) = 0 \\ r = 0 \quad \vee \quad r = \frac{2}{3}R \end{array}}$

Por lo tanto: $\boxed{h = \frac{HR - rH}{R} = \frac{HR - \frac{2}{3}RH}{R} = \frac{1}{3}H}$

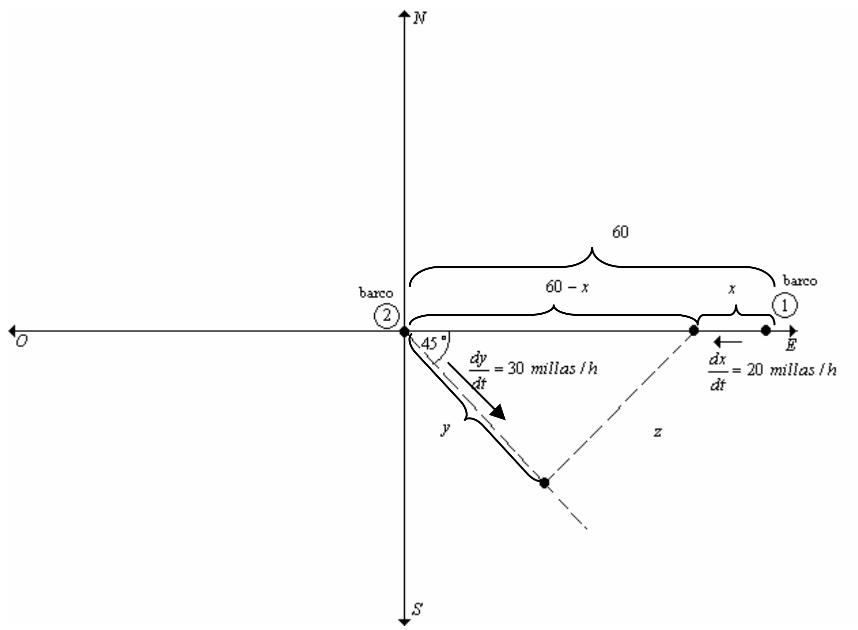
---

## Ejemplo 4

A las 7:00 a.m. un barco estaba a 60 millas en dirección este de un segundo barco. Si el primero navega hacia el oeste a 20 millas por hora y el segundo al sur este a 30 millas por hora, ¿en qué momento se encuentra más próximos el uno del otro?

SOLUCIÓN:

Esquemáticamente tenemos:




Aplicando la ley del coseno para calcular la distancia de separación $z$, resulta:

$$z^2 = (60-x)^2 + y^2 - 2(60-x)(y)\left(\cos 45^\circ\right)$$

Además como $v = \frac{e}{t}$ entonces $e = vt$ y para cada distancia tenemos:

$$\boxed{x = v_x t = 20t} \text{ y } \boxed{y = v_y t = 30t}$$

Reemplazando queda: $\boxed{\begin{array}{l} z^2 = (60-x)^2 + y^2 - 2(60-x)(y)\left(\cos 45^\circ\right) \\ z^2 = (60-20t)^2 + (30t)^2 - 2(60-20t)(30t)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{array}}$

Maximizar $z$ es lo mismo que maximizar $z^2$ por tanto si $z^2 = D$ tenemos:

$$\boxed{D = (60-20t)^2 + (30t)^2 - 2(60-20t)(30t)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

Derivando y simplificando resulta:

$$\frac{dD}{dt} = 2(60-20t)(-20) + 2(30t)(30) - 2(-20)(30t)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2(60-20t)(30)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\frac{dD}{dt} = -2400 + 800t + 1800 + 1200\frac{\sqrt{2}}{2}t - 3600\frac{\sqrt{2}}{2} + 1200\frac{\sqrt{2}}{2}t$$

$$\frac{dD}{dt} = -600 - 1800\sqrt{2} + \left(800 + 1200\sqrt{2}\right)t$$

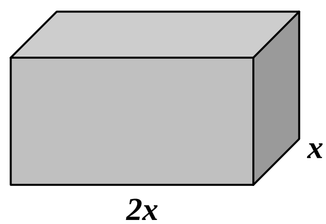
Y para el óptimo:

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{dD}{dt} = 0 \\ &-600 - 1800\sqrt{2} + \left(800 + 1200\sqrt{2}\right)t = 0 \\ &t = \frac{600 + 1800\sqrt{2}}{800 + 1200\sqrt{2}} \\ &t = 1.15\ horas \end{aligned}}$$

Es decir las 8:09 a.m. estarán más próximos uno del otro

## *Ejercicios propuestos 5.2*

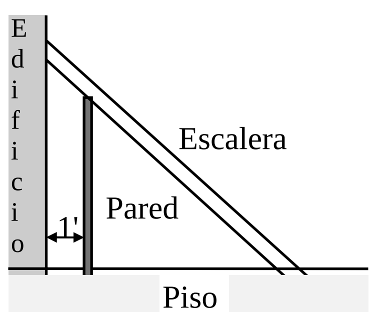
1. Usted debe construir una caja rectangular cerrada con volumen 576 pulgadas cúbicas y cuyo fondo sea el doble de largo que de ancho como se muestra en la figura:



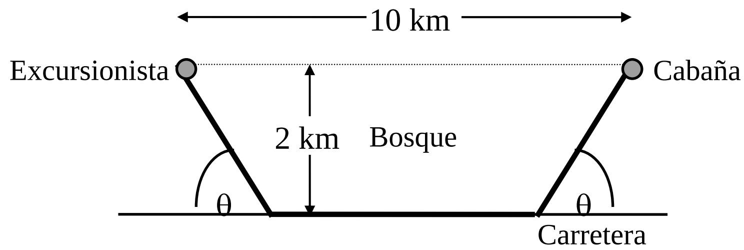

   Determine las dimensiones de la caja que minimizarán el área total de su superficie.

2. Determine las dimensiones del rectángulo de mayor área que tiene dos vértices en el eje *x* y sus otros dos vértices pertenecen a la parábola cuya ecuación es: $y = 8 - x^2,\ y > 0$ .

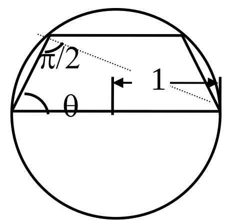
3. Determine la LONGITUD de la escalera MÁS CORTA que llega desde el piso, sobre un muro de 8 pies de altura, hasta una pared de un edificio, a **1 pie** de distancia del muro.



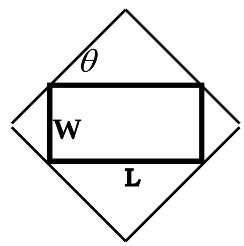

4. Un excursionista se encuentra en un bosque a 2 km. de una larga carretera recta. Desea caminar a su cabaña, que se encuentra a 10 km. de distancia por el bosque y también a 2 km. de la carretera (ver figura). Puede caminar a una velocidad de 8 km/h por la carretera pero solamente a 3 km/h por el bosque. Así decide caminar primero hacia la carretera, después por la carretera y finalmente por el bosque hacia la cabaña. ¿Qué ángulo minimizará el tiempo total necesario para que el excursionista llegue a su cabaña? ¿Cuánto tiempo se ahorra en comparación con la ruta directa por el bosque?




5. Determine el área máxima posible de un trapecio inscrito en un círculo de radio 1, como lo muestra la figura.




6. Hallar el valor del área máxima del rectángulo que se puede circunscribir a otro rectángulo dado de longitud **L** y ancho W.

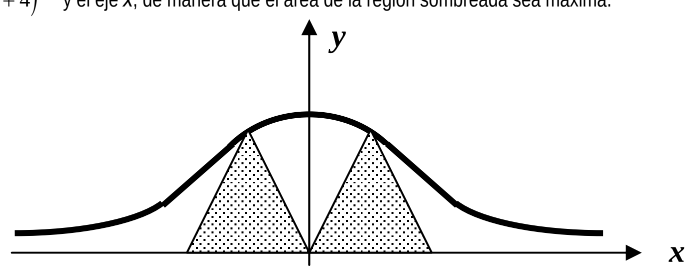



7. Se va a inscribir un cono circular recto dentro de otro cono circular recto de volumen dado, con el mismo eje y con el vértice del cono interior tocando la base del cono exterior. Encuentre la razón entre las alturas de dichos conos para que el volumen del cono inscrito tenga el máximo volumen.

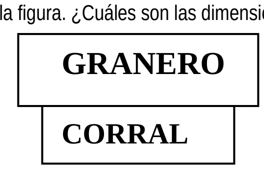
8. Calcule las dimensiones del cono circular recto de mayor volumen que puede inscribirse en una esfera de radio igual a 10 cm.

9. Inscribir en una esfera dada un cilindro de volumen máximo.

10. Encuentre las dimensiones de los triángulos isósceles inscritos en la región comprendida entre el gráfico de $f(x)=\left(x^2+4\right)^{-1}$ y el eje *x*, de manera que el área de la región sombreada sea máxima.

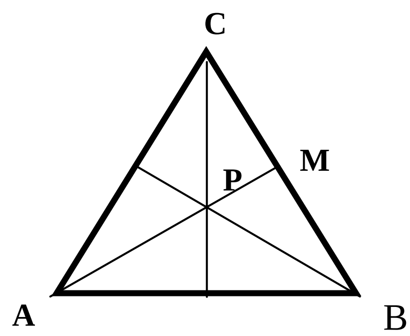



11. Se tiene 80 pies de tela de alambre con la que se planea cerrar un corral rectangular al lado de un granero de 100 pies de largo como se muestra en la figura. ¿Cuáles son las dimensiones del corral de máxima área?



12. Dos aeroplanos *A* y *B* vuelan horizontalmente a la misma altura. La posición del aeroplano *B* es al suroeste del *A*, a 20 km. al oeste y 20 km. al sur de *A*. Si el aeroplano *A* vuela hacia el oeste a 16 km/min y el *B* vuela hacia el norte a 64/3 km/min.
    a) ¿En cuántos segundos estarán los más cerca uno del otro?
    b) ¿Cuál será su distancia más corta?

13. Halle la altura de un prisma triangular regular de volumen máximo inscrito en una esfera de radio *R*. **Nota:** Recuerde que en un triángulo equilátero las alturas y medianas coinciden y se intersecan en un punto *P* de modo que $AP = \frac{2}{3}AM$




## 5.3 DIFERENCIALES Y APROXIMACIONES

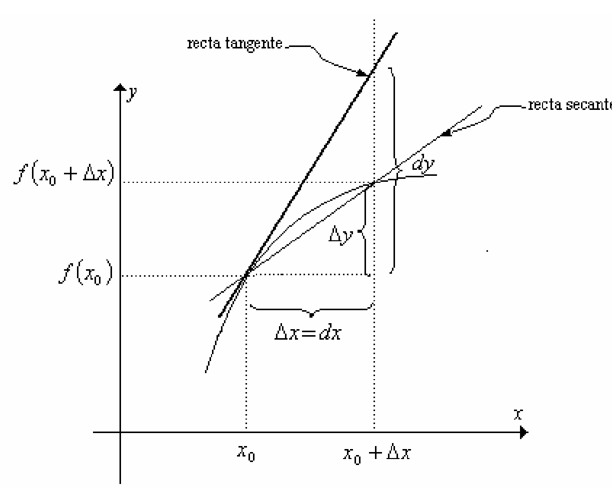
### 5.3.1 DEFINICIÓN DE DIFERENCIAL

Supongase que $y = f(x)$ es diferenciable en "$x$" y que $dx$, la diferencial de una variable independiente "$x$", designa un incremento arbitrario de "$x$".
La diferencial de "$y$" correspondiente a la variable dependiente "$y$" se define como:

$$dy = f'(x)dx$$

### 5.3.2 APROXIMACIONES

Observe la gráfica



Note que $\Delta x = dx$

Y que, si $\Delta x \to 0$ entonces $\Delta y \approx dy$, es decir: $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$.

Entonces: $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$.

Es decir: $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$

## *Ejemplo 1*

Aproximar $\sqrt{4.6}$

SOLUCIÓN:

Debemos emplear la función $f(x) = \sqrt{x}$.

Note que $\sqrt{4.6} = \sqrt{4 + 0.6}$, entonces $x_0 = 4$ y $\Delta x = 0.6$

Para emplear la formula $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$, Obtenemos:

$f(x_0 + \Delta x) = \sqrt{x_0 + \Delta x} = \sqrt{4 + 0.6}$, $f(x_0) = \sqrt{x_0} = \sqrt{4} = 2$ y $f'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}} = \dfrac{1}{2\sqrt{4}} = \dfrac{1}{4}$

Entonces: $\boxed{\begin{array}{l} \sqrt{4 + 0.6} \approx 2 + \left(\dfrac{1}{4}\right)0.6 \\ \sqrt{4.6} \approx 2.15 \end{array}}$

## *Ejemplo 2*

Aproximar $\operatorname{sen} 31°$

SOLUCIÓN:

Para este caso empleamos $f(x) = \operatorname{sen} x$, por tanto $f'(x) = \cos x$

Para aplicar la formula $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$, para la cual definimos:

$x_0 = 30° = \dfrac{\pi}{6}$, $\Delta x = 1° = \dfrac{\pi}{180}$ entonces:

$$\operatorname{sen}(x_0 + \Delta x) \approx \operatorname{sen}(x_0) + \cos(x_0)\Delta x$$

$$\operatorname{sen}(30° + 1°) \approx \operatorname{sen}(30°) + \cos 30° \left(\dfrac{\pi}{180°}\right)$$

$$\operatorname{sen} 31° \approx 0.5 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\dfrac{\pi}{180°}\right)$$

$$\operatorname{sen} 31° \approx 0.501$$

### 5.3.3 ESTIMACION DE ERRORES

Sea $y = f(x)$ la variación en $y$ cuando varía $x$ se la se la calcula empleando la formula $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$

*Ejemplo*

El lado de un cubo se midió en 11.4 cm. con un posible error de ± 0.05 cm. Calcule el volumen del cubo y proporcione una estimación para el posible error de este valor.

SOLUCIÓN:

El volumen del cubo se lo obtiene con la formula $V = l^3$.

Como $l = 11.4cm$ entonces $V = (11.4)^3 = 1481.5cm^3$.

Pero como hay un margen de error (variabilidad) en la medición del lado: $\Delta l = \pm 0.05cm$, se propaga un error en el valor del volumen calculado.

Este margen de error en el volumen se lo calcula de la siguiente manera: $\Delta V \approx \frac{dV}{dl}\Delta l$ Es decir:

$$\Delta V \approx 3l^2 \Delta l$$
$$\Delta V \approx 3(11.4)^2(\pm 0.05)$$
$$\Delta V \approx \pm 19.5cm^3$$

Esto quiere decir que $V = (1481.5 \pm 19.5)cm^3$

*Ejercicios Propuestos 5.3*

1. En los siguientes ejercicios use diferenciales para calcular valores aproximados de los números dados. Compare con los valores reales:
   a) $\sqrt{402}$ b) $\sqrt[3]{26.91}$ c) $\sqrt{35.9}$ d) $\sqrt[6]{64.05}$
2. El diámetro exterior de un delgado casquete esférico es de 12 pies. Si el casquete tiene 0.3 pulgadas de espesor, use diferenciales para calcular el volumen aproximado de la región interior del mismo.
3. Un rodillo cilíndrico mide exactamente 12 pulgadas de longitud y se ha estimado su diámetro en 6 $\pm$ 0.005 pulgadas. Calcule su volumen con una estimación del error.
4. Se mide el radio de una esfera con un instrumento cuya precisión es de 0.05 cm.. Si la medición registra un radio de 15 cm. Determine el error que tendrá el volumen de la esfera

## 5.4 POLINOMIO DE TAYLOR

La ecuación de la recta tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$ es $y - f(x_0) = f'(x_0)[x - x_0]$ es decir $y = f(x_0) + f'(x_0)[x - x_0]$.

En la vecindad de $x_0$, $y \approx f(x)$; por tanto una buena aproximación para una función diferenciable en un punto sería la recta tangente en ese punto; es decir:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)[x - x_0].$$

Lo anterior corresponde a la aproximación de una función mediante un polinomio lineal.

Para mayor orden tenemos:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)[x - x_0] + \frac{f''(x_0)}{2!}[x - x_0]^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}[x - x_0]^3 + \ldots + \frac{f^n(x_0)}{n!}[x - x_0]^n$$

El Polinomio de Taylor de orden "n" para una función.

NO OLVIDE DEMOSTRARLO.

Si $x_0 = 0$ se llama **Polinomio de Mclaurin**. En tal caso sería:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)[x] + \frac{f''(0)}{2!}[x]^2 + \frac{f'''(0)}{3!}[x]^3 + \ldots$$

## *Ejemplo*

Hallar el polinomio de Taylor de orden 4 para $f(x) = e^x$ y empleelo para calcular $e^{0.1}$.

SOLUCIÓN:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)[x - x_0] + \frac{f''(x_0)}{2!}[x - x_0]^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}[x - x_0]^3 + \frac{f^{IV}(x_0)}{4!}[x - x_0]^4$$

$$e^x \approx e^0 + e^0[x - 0] + \frac{e^0}{2!}[x - 0]^2 + \frac{e^0}{3!}[x - 0]^3 + \frac{e^0}{4!}[x - 0]^4$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

bien, ahora reemplazando $x = 0.1$ resulta:

$$f(0.1) \approx 1 + 0.1 + 0.005 + 0.000166666 + 0.000004166$$
$$f(0.1) \approx 1.105170833$$

## *Ejercicios Propuestos 5.4*

1. Hallar el polinomio de Maclaurin de orden "n" para:

   a) $f(x) = e^{3x}$ ; n=4
   
   b) $f(x) = x^2 e^{-x}$ ; n=4
   
   c) $f(x) = \operatorname{sen} \pi x$ ; n=3
   
   d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ ; n=4
   
   d) $f(x) = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ ; n=10

2. Hallar el polinomio de Taylor de grado n, alrededor de $x_0$ .

   a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ; n=4; $x_0 = 1$
   
   b) $f(x) = \sqrt{x}$ ; n=4; $x_0 = 4$
   
   c) $f(x) = \ln x$ ; n=4; $x_0 = 1$

## Misceláneos

1. Se tiene un tanque esférico de radio igual a 10m. En el tanque ingresa agua a razón de $2\ {m^3}/{h}$. ¿Con qué rapidez aumenta el radio de la superficie del agua cuando el nivel del agua es de 5m.

   NOTA: Volumen del casquete esférico $V = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$ Observar la figura.

2. En la ribera de un río de 0.9 Km de ancho hay una planta eléctrica; en la otra ribera a 3 Km. Corriente arriba, hay una fábrica y la fábrica necesita energía eléctrica por lo que se debe tender cables entre la planta eléctrica y la fábrica. Tender los cables por tierra cuesta $3 por metro y hacerlo por el agua cuesta $5 por metro. ¿Cuál es la forma más económica de tender los cables entre la fábrica y la planta eléctrica?.

3. En un recipiente cónico de 10m. de altura y 5m. de radio en su abertura se ingresa agua a razón de $5\ {m^3}/{min}$. Con que rapidez cambia el área de la superficie del líquido en el recipiente cuando éste tiene de 3m.

4. Determinar las dimensiones del triángulo de mayor área que se pueda inscribir en un semicírculo de radio 4 cm.

5. Dos puntos A y B parten del origen de coordenadas. El punto A se mueve sobre la dirección positiva del eje x con la ley del movimiento $x = x(t) = 2t^2$, en donde x se da en centímetros y t en minutos. El punto B se mueve sobre la recta $y = x$ a una rapidez constante de $2\ {cm}/{min}$. Determine la rapidez a la que estos dos puntos se están alejando uno del otro después de 2 min. De haberse comenzado a mover.

6. Tres puntos A, B y C se encuentran de tal manera que el ángulo ABC es de 60° y la distancia entre A y B es de 3Km. Del punto A sale, dirigiéndose hacia B, un corredor a una velocidad de 18 Km/h. En el mismo instante sale B, dirigiéndose hacia C, un ciclista a una velocidad de 27 Km/h. Encuentre el momento en que el corredor se encuentra más próximo del ciclista.

7. En un depósito de forma cónica se está vertiendo agua a razón de $0.2\ m^3$ por minuto. El cono tiene 8 metros de profundidad y 4 metros de diámetro. Si hay una fuga en la base y el nivel del agua sube a razón de 2 centímetros por minuto, cuando el agua tiene 5 metros de profundidad, ¿con qué rapidez escapa agua del depósito?

8. Una pequeña isla está a 2 millas en línea recta del punto más cercano P de la ribera de un gran lago. Si un hombre puede navegar desde la isla en su bote de motor a 20 millas por hora, y caminar a 4 millas por hora, ¿en qué lugar desembarcar para llegar en el tiempo más corto a un pueblo que dista 10 millas al sur del punto P?

9. Del filtro cónico de una cafetera cae café a razón de $10\ {pul^3}/{min}$. (Ver figura).

   a) ¿Con qué rapidez se eleva el nivel del café en la jarra, cuando el café tiene 5 pulgadas de profundidad en el cono?.

   b) ¿Con qué rapidez baja el nivel de café del cono en ese instante?

10. En un triángulo rectángulo isósceles se inscribe un rectángulo de manera que uno de sus lados reposa sobre la hipotenusa. Determinar las dimensiones del rectángulo de mayor área que se puede inscribir de esa manera, considerando que los catetos del triángulo miden 2 m.

11. Dos barcos navegan a partir de un mismo puerto isleño, uno hacia el norte a 24 millas por hora y el otro hacia el este a 30 millas por hora. El barco de la ruta NORTE partió a las 9:00 A.M., y el de la ruta ESTE a las 11:00 A.M.. ¿Con qué rapidez aumenta la distancia entre ellos a las 2:00 P.M.?

12. Encuentre las dimensiones del rectángulo de máxima área que se puede inscribir en un semicírculo de radio R.?

13. Se tiene un tanque esférico de radio 15 pies. En el tanque sube el nivel del agua a razón de 2 pies por segundo. ¿Con qué rapidez aumenta el radio de la superficie del agua cuando el nivel del agua es de 5 pies? Observe la figura

14. Un rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados se encuentra en el primer cuadrante de modo que sus vértices están sobre el origen, el eje X positivo, el eje Y positivo y sobre la recta $2x+y=100$. Determine las dimensiones del rectángulo de mayor área posible que se encuentra localizado de la manera señalada.

15. En una página de un libro debe haber 150 $cm^2$ de texto escrito. Los márgenes laterales deben ser de 2 cm y los márgenes superior e inferior de 3 cm. Determine las dimensiones de la hoja para que se gaste la menor cantidad de papel posible.

16. En el interior de un triángulo rectángulo isósceles, cuya hipotenusa mide 18 cm., se inscribe un rectángulo de manera que uno de sus lados reposa sobre la hipotenusa. Calcular las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse de esa manera.

17. En un recipiente cónico de 10 m. de altura y 5m. de radio en su abertura se ingresa agua a razón de $5\,m^3/min$. ¿Con qué rapidez cambia el área de la superficie del líquido en el recipiente cuando éste tiene un nivel de 3m.?.

18. Determinar las dimensiones del triángulo de mayor área que se pueda inscribir en un semicírculo de radio 4 cm., donde uno de los lados es el diámetro del semicírculo.

19. El tumor del cuerpo de una persona es de forma esférica y su radio aumenta a razón de 0,001 cm por día. Determine con qué rapidez aumenta el área superficial del tumor cuando su diámetro es de 1cm.

20. Determinar las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede ubicarse en el primer cuadrante, donde dos de sus vértices pertenecen al eje X, y los otros dos vértices pertenecen respectivamente a las rectas $y=2x$ y $3x+y=30$.

21. Las rectas $L_1: y=x+2$ y $L_2: y=-2x+10$ forman un triángulo con el eje $x$. Encuentre las dimensiones del rectángulo de mayor área, con un lado contenido en el eje $x$, que puede inscribirse en el triángulo dado.

22. La diagonal de un cubo está aumentando a razón de 4 pulgadas/min. Calcule la razón con la que varía el área total del cubo en el instante que la diagonal mide 5 pulgadas.

23. Dos buses parten de una misma estación a las 09h00. Las carreteras por las que viajan forman un ángulo recto entre sí. Determine la rapidez con la que varía la distancia que los separa al cabo de media hora de viaje, si la velocidad de los buses es de 90 Km/h y 110 Km/h respectivamente.

24. Un escenario circular con radio de 3 metros de longitud, da una vuelta cada dos min utos, tal como se muestra en la figura. Una cámara fija en el punto P, está a $3\sqrt{2}$ m. del centro O del escenario, y enfoca a una persona que se encuentra en el punto M. Determine a qué velocidad varía la distancia entre la cámara y la persona, en el instante que los segmentos OM y OP forman un ángulo de $45^\circ$.