6 SERIES

Objetivo:

Se pretende que el estudiante:

- Determine convergencia o divergencia de series.
- Emplee series para resolver problemas numéricos.

6. 1. SERIES NUMÉRICAS INFINITAS

6.1.1 DEFINICIÓN

Sea $\{a_n\}$ una sucesión infinita. Y sea

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n .$$

La sucesión de suma parciales

$$\{S_n\} = \{S_1, S_2, S_3, \cdots\} = \{a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_{3,\cdots}\},$$

denotada como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, se llama *Serie Infinita*.

Ejemplo

Sea la sucesión $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}$

Algunos términos de la sucesión serían $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots\right\}$

La sucesión de sumas parciales sería

$$\{S_1, S_2, S_3, \cdots\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, \cdots\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \cdots\right\}$$

6.1.2 CONVERGENCIA DE SERIES

Una serie $S_n = \sum a_n$, es convergente si y sólo si $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe. Caso contrario; es decir, si $\lim_{n\to\infty} S_n$ no existe, se dice que la sucesión es *divergente*.

En caso de que la serie sea convergente se dice que tiene suma S , es decir ocurrirá que $\lim_{n\to\infty} S_n = S$.

Si tuviésemos S_n o pudiéramos calcularlo, determinar la convergencia sería muy sencillo. Estudiaremos en primer lugar las **series geométricas** y las **series**

telescópica que si se les puede determinar S_n, y luego mencionaremos criterios para determinar convergencia y divergencia de series cuando ya no tenemos S_n

6.1.3 LA SERIE GEOMÉTRICA.

Una serie geométrica es de la forma

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1}$$

La suma parcial de los n términos está dada por

$$\boxed{S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}}$$. ¡Demuéstrela!

Para determinar su convergencia, deberíamos obtener

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

Observe que si $\boxed{|r| \geq 1}$ entonces $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \infty}$ (**¿POR QUÉ?**) y por tanto la serie geométrica es **divergente**

Si $\boxed{|r| < 1}$, entonces $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}}$ la serie es **convergente**.

Ejemplo

Determinar si la serie $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ es convergente o no.

SOLUCIÓN:

Observe que la secuencia dada es una serie geométrica con $a = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{1}{2}$ es decir una serie de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ y por tanto converge a $S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$

6.1.4 SERIES TELESCÓPICA

Para este tipo de serie también es posible obtener S_n, se lo hace empleando fracciones parciales.

Ejemplo

Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. Obtener S_n.

SOLUCIÓN:

Empleando fracciones parciales, tenemos:

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2}$$
$$1 = A(n+2) + B(n+1)$$

Si $n = -1$ entonces:

$$1 = A(-1+2) + B(-1+1)$$
$$1 = A$$

Si $n = -2$ entonces:

$$1 = A(-2+2) + B(-2+1)$$
$$1 = -B$$
$$B = -1$$

Por tanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

Obteniendo algunos términos de su desarrollo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

Note que al realizar la suma, los términos centrales se suprimen quedando el primer y el último término.

Entonces $S_n = 1 - \frac{1}{n+2}$, por tanto $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+2} \right) = 1$

La serie es convergente

Ejercicios Propuestos 6.1

1. Encuentre la serie infinita que es la secuencia indicada de suma parcial. Si la serie es convergente, encuentre su suma. (SUGERENCIA: Hallar a_n, sabiendo que $S_n = S_{n-1} + a_n$)

   a) $\{S_n\} = \left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$ b) $\{S_n\} = \{\ln(2n+1)\}$

2. Encuentre S_n y determine si las series son convergentes o divergentes. Si es convergente determine su suma:

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n$

   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{4}{3^n}\right)$

   e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$

6.1.5 CRITERIO GENERAL PARA LA DIVERGENCIA

TEOREMA

Si la serie $\sum a_n$ converge entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Es decir si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ entonces la serie $\sum a_n$ diverge

Ejemplo

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ es **divergente** debido a que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

Verifique que los ejemplos anteriores de series convergentes se cumple el teorema. No olvide que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ es una condición necesaria pero no suficiente.

Ejemplo.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, llamada **Serie Armónica**, es divergente (lo demostraremos más adelante), sin embargo $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

6.1.6 PROPIEDADES DE LAS SERIES CONVERGENTES.

Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergen y si C es una constante, entonces también convergen $\sum Ca_n$ y $\sum (a_n \pm b_n)$ y además

1. $\sum Ca_n = C\sum a_n$
2. $\sum (a_n \pm b_n) = \sum a_n \pm \sum b_n$

6.1.7 TEOREMA DE LA SERIE DIVERGENTE

Si $\sum a_n$ diverge y C es una constate diferente de cero, entonces la serie $C\sum a_n$ también diverge.

6. 2. SERIES DE TÉRMINOS POSITIVOS

TEOREMA

Una serie $\sum a_n$ de términos no negativos converge si y sólo si, sus sumas parciales están acotadas por arriba.

6.2.1 CRITERIOS PARA ESTABLECER LA CONVERGENCIA DE SERIES DE TERMINOS POSITIVOS.

6.2.1.1 CRITERIO DE LA INTEGRAL

Sea f una función continua positiva, no creciente, definida en el intervalo $[1,\infty)$ y suponga que $a_n = f(n)$ para todo entero positivo n. Entonces la seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge.

Ejemplo 1

Determine si la SERIE ARMÓNICA $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ converge o diverge

SOLUCIÓN:
Aplicando el criterio de la integral, debido a que es una serie de términos positivos decrecientes.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} = \lim_{n\to\infty} \int_1^{N} \frac{1}{x} = \lim_{n\to\infty} [\ln x]_1^N = \lim_{n\to\infty} \ln N = \infty$$

Por tanto la serie diverge.

Ejemplo 2.

Sea la serie "p" $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^P}$, determine para qué valores de "p" converge y para que valores diverge.

SOLUCIÓN:

Analizando la integral $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^P} = \underset{n\to\infty}{lím}\int_1^{N}\frac{1}{x^P}$

Si $P=1$, tenemos la serie armónica, que es divergente

Si $p\neq 1$, la integración es diferente

$$\underset{n\to\infty}{lím}\int_1^{N}\frac{1}{x^P} = \underset{n\to\infty}{lím}\left[\frac{x^{-P+1}}{-p+1}\right]_1^N = \underset{n\to\infty}{lím}\left[\frac{N^{-P+1}}{-p+1}-\frac{1^{-P+1}}{-p+1}\right]$$

$$\underset{n\to\infty}{lím}\left[\frac{N^{1-P}}{1-P}+\frac{1}{P-1}\right]$$

Ahora, si $P>1$, $\left[\underbrace{\frac{\infty^{1-P}}{1-P}}_{0}+\frac{1}{P-1}\right]=\frac{1}{p-1}$, la integral converge

Si $P<1$, $\left[\underbrace{\frac{\infty^{1-P}}{1-P}}_{\infty}+\frac{1}{P-1}\right]=\infty$ la integral diverge

En conclusión, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^P}=\begin{cases} Si\ P>1\ converge\ a\ \frac{1}{p-1} \\ Si\ P\leq 1\ diverge\end{cases}$

Ejemplo 3

Determine si la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ converge o diverge.

SOLUCIÖN:

Aplicando el criterio de la integral

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln x} = \underset{x\to\infty}{lím}\left[\ln(\ln N)-\ln(\ln 2)\right]=\infty$$

Por tanto diverge

Ejercicios propuestos 6.2

Usando el criterio de la Integral, determine la convergencia o divergencia de la siguiente serie numérica

1) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$ 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}ne^{-n}$ 3) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$

6.2.1.2 CRITERIO DE COMPARACIÓN ORDINARIA

Suponga que $0 \leq a_n \leq b_n$ para $n \geq N$

Si $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ converge.

Si $\sum a_n$ diverge, entonces $\sum b_n$ diverge

Ejemplo.

Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2-1}$ converge o diverge.

SOLUCIÓN:

Empleando el criterio de comparación.

Busquemos una serie empleando los primeros términos del numerador y del denominador:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Resulta una serie **divergente** ¿por qué?

Los términos de la serie dada deben ser mayores que los de esta serie, para que la serie dada sea divergente. (Si esto no ocurriese habrá que cambiar de serie o de criterio).

Se observa que $\frac{n}{2n^2-1} > \frac{n}{2n^2}$ para $\forall n \geq 1$.

Por tanto se concluye que la serie dada es **divergente**.

Note que también se puede aplicar el **criterio de la integral**.

Ejemplo 2

Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n(n+1)}$ converge o diverge.

SOLUCIÓN: Utilicemos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}.$$

Esta serie es geométrica **convergente** ¿por qué?

Los términos de la serie dada deben ser menores que los de esta serie, para que la serie dada sea convergente.

Observamos que: $\frac{n}{3^n(n+1)} < \frac{n}{3^n n}$.

Por tanto la serie dada es **convergente**.

6.2.1.3 CRITERIO DE COMPARACIÓN DE LÍMITE.

Suponga que $a \geq 0$, $b_n > 0$ y que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$

Si $0 < L < \infty$ entonces $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergen o divergen juntas.

Si $L = 0$ y $\sum b_n$ converge entonces $\sum a_n$ converge.

Ejemplo 1

Determine si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n^3-2n^2+11}$ converge o diverge.

Solución:

Igual que el criterio anterior busquemos una serie de trabajo.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{n^3} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

tenemos una serie convergente ¿por qué?

Obtenemos ahora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n-2}{n^3-2n^2+11}}{\frac{3}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^3-2n^2}{3n^3-6n^2+11} = 1$$

Por tanto la serie dada es también **convergente.**

Ejemplo 2

Determine si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ converge o diverge.

Solución:

Nuestra serie de trabajo seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ La serie armónica (divergente)

Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1$$

Por tanto serie dada también es **divergente.**

6.2.1.4 CRITERIO DEL COCIENTE

Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos y suponga que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

Si $L<1$ la serie converge.

Si $L>1$ la serie Diverge.

Si $L=1$ no se puede concluir.

Ejemplo 1

Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ converge o diverge.

SOLUCIÓN:

En este caso $\boxed{a_n = \frac{2^n}{n!}}$ entonces $\boxed{a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2(2^n)}{(n+1)n!}}$

Luego

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2(2^n)}{(n+1)n!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0$$

El resultado es un número menor que 1, por tanto la serie es convergente.

Ejemplo 2

Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^{30}}$ converge o diverge.

SOLUCIÓN:

En este caso $\boxed{a_n = \frac{3^n}{n^{30}}}$ entonces $\boxed{a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^{30}} = \frac{3(3^n)}{(n+1)^{30}}}$

Ahora

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3(3^n)}{(n+1)^{30}}}{\dfrac{3^n}{n^{30}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^{30}}{(n+1)^{30}}=3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{30}=3$$

El resultado es un número mayor que, por tanto la serie es **divergente**.

Ejemplo 3

Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ converge o diverge.

<u>SOLUCIÓN</u>:

En este caso $\boxed{a_n=\frac{n!}{n^n}}$ entonces $\boxed{a_{n+1}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}=\frac{(n+1)n!}{(n+1)(n+1)^n}=\frac{n!}{(n+1)^n}}$

Ahora

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n!}{(n+1)^n}}{\dfrac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}$$

El resultado es un número menor que 1, por tanto la serie es **convergente**.

Ejercicios propuestos 6.3

Determine la convergencia o divergencia de las series:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$ b) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}$ c) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+sen n}{n^2}$

d) $\sum_{n=1}^{+\infty}\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ e) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{\sqrt{n+1}}$ f) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{20^n}{n!}$

h) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{n!}$ i) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)^2}{(n+2)!}$ j) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2 n!}{(n+3)!}$

6. 3. SERIES ALTERNANTES

Ahora se estudiará series que presenten sus términos con signos alternados, es decir series de la forma $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ o también $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n$

TEOREMA DE CONVERGENCIA PARA LAS SERIES ALTERNANTES

Una serie alternante con $a_n \geq a_{n+1} > 0$. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ entonces la serie converge.

Ejemplo 1

Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ Determine si es convergente o divergente.

SOLUCIÓN.

Primero, veamos si los términos, en valor absoluto, son no crecientes.

Comparamos $\boxed{a_n = \frac{1}{n}}$ con $\boxed{a_{n+1} = \frac{1}{n+1}}$. Se observa que:

$$\boxed{\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}}$$

los términos son **decrecientes**.

Segundo, veamos si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Se observa que: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

Por tanto la serie armónica alternante es **convergente**.

Ejemplo 2

Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^n}$ Determine si es convergente o divergente.

SOLUCIÓN.

Primero. En este caso $\boxed{a_n = \frac{1}{2^n}}$ y $\boxed{a_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}}$

Se observa que $\boxed{\frac{1}{2(2^n)} < \frac{1}{2^n}}$ los términos son **decrecientes**.

Segundo. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$

Por tanto la serie es **convergente.**

A continuación analicemos el teorema

TEOREMA

Si $\sum |a_n|$ converge, entonces $\sum a_n$ también converge.

Esto quiere decir que si la serie de términos positivos converge entonces la serie alternante también converge, mientras que si la serie alternante converge no necesariamente la serie de términos positivos converge.

6.3.1 CONVERGENCIA ABSOLUTA.

DEFINICIÓN.

Una serie $\sum a_n$ *converge absolutamente* si $\sum |a_n|$ converge

Ejemplo

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n}$ es absolutamente convergente, debido a que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es convergente

DEFINICIÓN.

Una serie $\sum a_n$ es *condicionalmente convergente* si $\sum a_n$ converge y $\sum |a_n|$ diverge.

Ejemplo

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ es **condicionalmente convergente**, debido a que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente, mientras que ella es convergente.

Las series de términos positivos convergentes son absolutamente convergentes

Los criterios que mencionaremos a continuación ayudan a concluir rápidamente en situaciones cuando el término general de la serie presenta formas especiales.

6.3.2 CRITERIO DEL COCIENTE ABSOLUTO.

Sea $\sum a_n$ una serie de términos no nulos y suponga que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$.

Si $L<1$ la serie *converge absolutamente*.

Si $L>1$ la serie *diverge*.

Si $L=1$ no se concluye.

Ejemplo

Muestre que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{3^n}{n!}$ es absolutamente convergente.

SOLUCIÓN:

Aplicando el criterio del cociente tenemos:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{3^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^n 3}{(n+1)n!}\right)\left(\frac{n!}{3^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n+1}\right) = 0$$

Como el resultado es un número menor que 1 por tanto la serie es absolutamente convergente.

6.3.3 CRITERIO DE LA RAÍZ.

Sea $\sum a_n$ una serie infinita y suponga que $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = L$.

Si $L<1$ la serie *converge absolutamente*.

Si $L>1$ o $L=\infty$ la serie *diverge*.

Si $L=1$ no se concluye.

Ejemplo 1

Analice la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{3^{2n+1}}{n^{2n}}$.

SOLUCIÓN:

Debido a la forma de la serie, se aplica el criterio de la raíz.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{\frac{2n+1}{n}}}{n^{\frac{2n}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{2+\frac{1}{n}}}{n^2}=0$$

Como el resultado es un número menor que 1 por tanto la serie es absolutamente convergente.

Ejemplo 2

Analice la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{[\ln(1+n)]^n}$.

Debido a la forma de la serie, se aplica el criterio de la raíz.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{[\ln(1+n)]^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{[\ln(1+n)]^{\frac{n}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{[\ln(1+n)]}=\frac{1}{\infty}=0$$

Como el resultado es un número menor que 1 por tanto la serie es absolutamente convergente.

Ejercicios Propuestos 6.4

Determine la convergencia absoluta, convergencia condicional o divergencia de las siguientes series numérica:

a. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{(n+1)^{3/4}}$

b. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\dfrac{n!}{n}$

c. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\dfrac{5^{2n+1}}{(2n+1)!}$

d. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2^{3n}}{n^n}$

e. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\ln\dfrac{1}{n}$

f. $\dfrac{1}{1\bullet 2}+\dfrac{1}{3\bullet 4}+\dfrac{1}{5\bullet 6}+\dfrac{1}{7\bullet 8}+\cdots$

6. 4. SERIES DE POTENCIAS

Ahora estudiaremos series cuyos términos ya no son numéricos.

6.4.1 DEFINICIÓN.

Una serie de potencia en "x" tiene la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

Una serie de potencia en "$x - x_0$" tiene la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + a_3 (x - x_0)^3 + \cdots$$

Algo importante aquí es determinar los valores de "x", para los cuales la serie numérica correspondiente sea convergente.

6.4.2 INTERVALO DE CONVERGENCIA.

Empleando el criterio del cociente absoluto para que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sea **convergente** tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} x^n x}{a_n x^n} \right| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| \right] < 1$$

$$|x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

Ahora, suponga que $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$ entonces tenemos:

$$|x|L<1$$
$$|x|<\frac{1}{L}$$
$$-\frac{1}{L}<x<\frac{1}{L}$$

A $R=\frac{1}{L}$ se lo llama **Radio de Convergencia**.

Si $L=0$ entonces $R=\frac{1}{L}=\frac{1}{0}=\infty$ (el radio de convergencia es infinito), es decir la serie converge para todo número real.

Si $L=\infty$ entonces $R=\frac{1}{\infty}=0$ (el radio de convergencia es cero)

Ejemplo 1

Determine el intervalo de convergencia para $\sum_{n=0}^{\infty} ax^{n}$.

SOLUCIÓN

Aplicando el criterio del cociente para que sea convergente:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right|<1$$
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{ax^{n+1}}{ax^n}\right|<1$$
$$\lim_{n\to\infty}|x|<1$$
$$|x|<1$$
$$-1<x<1$$

Se requiere además determinar la convergencia o divergencia en los puntos extremos. En este caso:

Si $x=-1$, tenemos $\sum_{n=0}^{\infty} a(-1)^n$ una serie no convergente ¿porqué?

Si $x=1$, tenemos $\sum_{n=0}^{\infty} a(1)^n$ una serie no convergente. ¿porqué?

Finalmente el intervalo de convergencia para la serie dada es: $-1<x<1$

Observe que se la puede observar como una serie geométrica de razón x .

Ejemplo 2

Determine el intervalo de convergencia para $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)2^n}$.

SOLUCIÓN

Aplicando el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right|<1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+2)2^{n+1}}\bullet\frac{(n+1)2^n}{x^n}\right|<1$$

$$\lim_{n\to\infty}|x|\left|\frac{n+1}{2(n+2)}\right|<1$$

$$|x|\frac{1}{2}<1$$

$$-2<x<2$$

En los puntos extremos:

Si $x=-2$, tenemos $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(n+1)2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(-1)^n}{(n+1)2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+1)}$ una serie alternante convergente ¿Por qué?.

Si $x=2$, tenemos $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2)^n}{(n+1)2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)}$ una serie divergente ¿Porqué?

Finalmente, el intervalo de convergencia sería $-2\leq x<2$

Ejemplo 3

Determine el intervalo de convergencia para $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

SOLUCIÓN

Aplicando el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right|<1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\bullet\frac{n!}{x^n}\right|<1$$

$$\lim_{n\to\infty}|x|\left|\frac{n!}{(n+1)n!}\right|<1$$

$$|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\right|<1$$

$$|x|0<1$$

Entonces, la serie es convergente para $x \in R$ (para todo x)

Ejemplo 4

Determine el intervalo de convergencia para $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$.

SOLUCIÓN

Aplicando el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{(n)!\,x^n}\right| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty}|x|\left|\frac{(n+1)n!}{n!}\right| < 1$$

$$|x|\lim_{n\to\infty}|n+1| < 1$$

$$|x|\infty < 1$$

Veamos para $x = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, 0^n = 0$, tenemos una serie convergente.

Finalmente la serie dado converge sólo para $x = 0$.

Ejemplo 5

Determine el intervalo de convergencia para $\sum_{n=0}^{\infty} n\,(x-1)^n$.

SOLUCIÓN

Aplicando el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(x-1)^{n+1}}{n(x-1)^n}\right| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty}|x-1|\left|\frac{(n+1)}{n}\right| < 1$$

$$|x-1|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right| < 1$$

$$|x-1| < 1$$

$$-1 < x-1 < 1$$

$$0 < x < 2$$

Ahora, en $x=0$, $\sum_{n=0}^{\infty} n\,(0-1)^n$ tenemos una serie no convergente.

En $x=2$, $\sum_{n=0}^{\infty} n\,(2-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n\,(1)^n$, una serie no convergente.

Por tanto la serie converge para $x \in (0,2)$

Ejercicios propuestos 6.5

Determine el intervalo de convergencia para:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!\,x^n}{n^n}$

d) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{\ln(n)}$

e) $\sum_{n=\infty}^{+\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}-3\right)^n}{n(\ln(n))}$

6.4.3 SERIE DE TAYLOR

Una serie de potencia particular es la serie de Taylor.

Suponga que:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \cdots$$

Los coeficientes pueden ser determinados en términos de la función f

Evaluando en $x = x_0$

$$f(x_0) = a_0 + a_1[x_0 - x_0] + a_2[x_0 - x_0]^2 + a_3[x_0 - x_0]^3 + \cdots + a_n[x_0 - x_0]^n$$

Obtenemos: $a_0 = f(x_0)$

Para encontrar el segundo coeficiente, derivamos y evaluamos en $x = x_0$

$$f´(x) = a_1 + 2a_2[x - x_0] + 3a_3[x - x_0]^2 + \cdots + na_n[x - x_0]^{n-1}$$
$$f´(x_0) = a_1 + 2a_2[x_0 - x_0] + 3a_3[x_0 - x_0]^2 + \cdots + na_n[x_0 - x_0]^{n-1}$$

Entonces: $a_1 = f´(x_0)$

Obteniendo la segunda derivada y evaluando en $x = x_0$

$$f''(x) = 2a_2 + (3)(2)a_3[x - x_0] + \cdots + (n)(n-1)a_n[x - x_0]^{n-2}$$
$$f''(x_0) = 2a_2 + (3)(2)a_3[x_0 - x_0] + \cdots + (n)(n-1)a_n[x_0 - x_0]^{n-2}$$
$$f''(x_0) = 2a_2$$

De la última expresión, se tiene $a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$

Ahora, obteniendo la tercera derivada y evaluando en $x = x_0$

$$f'''(x) = (3)(2)a_3 + \cdots + (n)(n-1)(n-2)a_n[x - x_0]^{n-3}$$
$$f'''(x_0) = (3)(2)a_3 + \cdots + (n)(n-1)(n-2)a_n[x_0 - x_0]^{n-3}$$
$$f'''(x_0) = (3)(2)a_3$$

De la última expresión, se tiene $a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}$

Por lo tanto:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)[x - x_0] + \frac{f''(x_0)}{2!}[x - x_0]^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}[x - x_0]^3 + \cdots$$
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}[x - x_0]^n$$

Si $x_0 = 0$ se llama **Serie de Maclaurin**, es decir:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!}[x]^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \cdots$$

Ejemplo 1

Hallar la serie de Taylor para $f(x) = e^x$, alrededor de $x_0 = 0$

<u>SOLUCIÓN:</u>

Obtenemos primero $\boxed{\begin{array}{l} f(x) = e^x \\ f'(x) = e^x \\ f''(x) = e^x \\ f'''(x) = e^x \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f'(0) = 1 \\ f''(0) = 1 \\ f'''(0) = 1 \end{array}}$

Luego, reemplazando en: $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \cdots$

Resulta $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

¡DEDUZCA SU INTERVALO DE CONVERGENCIA!

Observe que podemos tener una buena aproximación de $e^{0.1}$ utilizando la serie:

$$e^{0.1} \approx 1+0.1+\frac{1}{2}(0.1)^2+\frac{1}{6}(0.1)^3$$
$$e^{0.1} \approx 1.10517$$

Ejemplo 2

Hallar la serie de Taylor para $f(x)=e^{-x}$ alrededor de $x_0=0$

SOLUCIÓN:

Empleando la serie anteriormente encontrada:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Sería cuestión de reemplazar $-x$ por x, es decir:

$$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}=1+(-x)+\frac{1}{2}(-x)^2+\frac{1}{3!}(-x)^3+\frac{1}{4!}(-x)^4+\cdots$$
$$e^{-x}=1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\cdots$$

Ejemplo 3

Hallar la serie de Taylor para $f(x)=e^{x^2}$ alrededor de $x_0=0$

SOLUCIÓN:

Ahora, es cuestión de reemplazar x^2 por x, es decir:

$$e^{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(x^2\right)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}=1+x^2+\frac{1}{2}(x^2)^2+\frac{1}{3!}(x^2)^3+\frac{1}{4!}(x^2)^4+\cdots$$
$$e^{x^2}=1+x^2+\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3!}x^6+\frac{1}{4!}x^8+\cdots$$

Ejemplo 4

Hallar la serie de Taylor para $f(x)=\operatorname{sen} x$ alrededor de $x_0=0$

SOLUCIÓN:

Obtenemos primero $\boxed{\begin{array}{l} f(x)=\operatorname{sen} x \\ f'(x)=\cos x \\ f''(x)=-\operatorname{sen} x \\ f'''(x)=-\cos x \\ f^{IV}(x)=\operatorname{sen} x \\ f^{V}(x)=\cos x \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} f(0)=0 \\ f'(0)=1 \\ f''(0)=0 \\ f'''(0)=-1 \\ f^{IV}(0)=0 \\ f^{V}(0)=1 \end{array}}$

Luego, reemplazando en: $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2}x^2+\dfrac{f'''(0)}{6}x^3+\cdots$

Se obtiene:

$$senx=0+x+0-\frac{1}{3!}x^3+0+\frac{1}{5!}x^5+\cdots$$
$$senx=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

¡DEDUZCA SU INTERVALO DE CONVERGENCIA!

Ejemplo 5

Hallar la serie de Taylor para $f(x)=\cos x$ alrededor de $x_0=0$

SOLUCIÓN:

Obtenemos primero $\boxed{\begin{array}{l} f(x)=\cos x \\ f'(x)=-\operatorname{sen} x \\ f''(x)=-\cos x \\ f'''(x)=\operatorname{sen} x \\ f^{IV}(x)=\cos x \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} f(0)=1 \\ f'(0)=0 \\ f''(0)=-1 \\ f'''(0)=0 \\ f^{IV}(0)=1 \end{array}}$

Luego, reemplazando en: $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2}x^2+\dfrac{f'''(0)}{6}x^3+\cdots$

Se obtiene:

$$\cos x=1+0x+\frac{(-1)}{2!}x^2+\frac{0}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\cdots$$
$$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

¡DEDUZCA SU INTERVALO DE CONVERGENCIA!

Ejemplo 6

Hallar la serie de de Taylor para $f(x)=e^{ix}$ alrededor de $x_0=0$

SOLUCIÓN:

Sería cuestión de reemplazar ix por x, en la serie de $f(x)=e^{x}$ es decir:

$$
\begin{aligned}
e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i)^n x^n}{n!}=1+(ix)+\frac{1}{2}(ix)^2+\frac{1}{3!}(ix)^3+\frac{1}{4!}(ix)^4+\frac{1}{5!}(ix)^5+\cdots\\
&=1+ix+\frac{1}{2}i^2x^2+\frac{1}{3!}i^3x^3+\frac{1}{4!}i^4x^4+\frac{1}{5!}i^5x^5+\cdots\\
&=1+ix-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3!}ix^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}ix^5+\cdots\\
&=\underbrace{\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots\right)}_{\cos x}+i\underbrace{\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots\right)}_{senx}
\end{aligned}
$$

Recuerde que:
$$
\boxed{\begin{aligned}
i^2&=-1\\
i^3&=i^2i=(-1)i=-i\\
i^4&=i^2i^2=(-1)(-1)=1
\end{aligned}}
$$

Por lo tanto, se concluye que $e^{ix}=\cos x+i\,\mathrm{sen}\,x$

Esta última expresión es la llamada IDENTIDAD DE EULER

6.4.4 DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN DE SERIES DE POTENCIAS.

Una serie de potencia se puede derivar o integrar término a término de tal manera que se tendrá otra serie de potencia con el mismo radio de convergencia, aunque no necesariamente el mismo intervalo de convergencia.

Ejemplo 1

Obtener la serie de $f(x)=\cos x$ a partir de la serie del seno.

SOLUCIÓN:

La serie del seno es:

$$senx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Derivándola se tiene:

$$\cos x=D_x(senx)=D_x\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)x^{2n+1-1}}{(2n+1)(2n!)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Ejemplo 2.

a) Encuentre una serie de potencia para $f(x)=\frac{1}{1+x}$

La expresión anterior puede ser observada como la suma de un serie geométrica infinita con primer término igual a 1 y razón $r=-x$ entonces:

$$f(x)=\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

b) Emplee la serie anterior para obtener la serie de $f(x)=\ln(x+1)$

Integrando $f(x)=\ln(x+1)=\int\frac{1}{1+x}dx=\int\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right]=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$

c) Determine su intervalo de convergencia.

Aplicando el criterio

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+2}}{n+2}\frac{n+1}{x^{n+1}}\right|<1$$

$$\lim_{n\to\infty}|x|\left|\frac{n+1}{n+2}\right|<1$$

$$|x|<1$$

$$-1<x<1$$

Si $\boxed{x=-1}$, tenemos $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{n+1}=-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\cdots$ una serie divergente. ¿por qué?

Si $\boxed{x=1}$ tenemos $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(1)^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}$ una serie alternante convergente.

Por tanto su intervalo de convergencia es $x\in(-1,1]$

Ejercicios Propuestos. 6.6

1. a) Encuentre los tres primeros términos diferentes de cero de la serie de Taylor para $f(x)=\tan(x)$ alrededor de $x_0=0$.

   b) Emplee el resultado obtenido en a) y la diferenciación término a término con la finalidad de encontrar los primeros tres términos diferentes de cero de la serie de Taylor para $g(x)=\sec^2(x)$.

   c) Utilice el resultado obtenido en a) y la integración término a término para encontrar los primeros tres términos que no sean cero de la serie de Taylor para $h(x)=\ln(\cos(x))$.

2. a) Encuentre los tres primeros términos diferentes de cero de la serie de Taylor para $f(x)=\ln x$ alrededor de $x_0=1$.

   b) Determine su intervalo de convergencia.

3. Encuentre el desarrollo en series de potencias de x y analice su convergencia:

a. $f(x)=\ln(x+1)$ b. $f(x)=\int e^{-x^2}dx$ c. $f(x)=x^2\ln(x+1)$ d. $f(x)=arctgx$ e. $f(x)=xarctgx$	f. $f(x)=\int \frac{senx}{x}dx$ g. $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ h. $f(x)=x^3\cos x^2$ i. $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

4. Calcular usando series de potencias:

a. $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ b. $\int_0^{\pi/2} e^x senxdx$ c. $\int_0^1 \left(\frac{\cosh x-1}{x}\right)dx$	d. $\int_0^{1/2} sen\sqrt{x}dx$ e. $\int_0^{1/2} arctgx^2dx$ f. $\int_0^1 xsenh\sqrt{x}dx$

5. Considere la función $f(x)=\arctan(x)$
   a. Determine una representación para f en series de potencias de x y especifique su intervalo de convergencia.
   b. A partir de la serie obtenida aproxime el valor de π . Utilice los cincos primeros términos de la serie.
6. Considere la función $f(x)=xe^{-x^2}$
   a. Determine una representación para f en series de potencia de x .
   b. Diferencie término a término la serie ontenida y a partir de este resultado demuestre que $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{2^n n!}=1$.
7. Utilice la Serie Binomial $(1+x)^p=1+\binom{p}{1}x+\binom{p}{2}x^2+\binom{p}{3}x^3+\cdots$

   para calcular la serie de $\sqrt{1+x^4}$