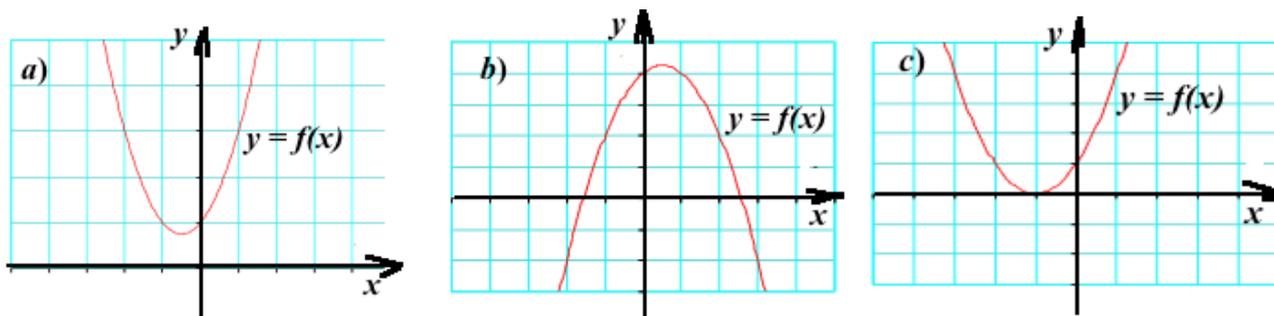


Solución & Rúbrica

TEMA 1

1.1 En los diagramas adjuntos se representan partes de las graficas de, $y = ax^2 + bx + c$, contestar los literales (i), (ii), (iii) y (iv) razonando su respuesta. [6 puntos]



(i) Indicar claramente en cuál de las gráficas el valor de, a , es positivo.

$a > 0$, en el literal (a) y (c), porque la parábola se abre hacia arriba.

[1,5 puntos]

(ii) Indicar claramente en cuál de las gráficas el discriminante, $b^2 - 4ac$, es positivo.

$b^2 - 4ac > 0$, en el literal (b) porque la parábola corta el eje x en dos puntos, indicando que tiene dos raíces reales y diferentes.

[1,5 puntos]

(iii) Indicar claramente en cuál de las gráficas, la función, $y = ax^2 + bx + c$, es un trinomio cuadrado perfecto.

Si $b^2 - 4ac = 0$, sus raíces son iguales y toca el eje x en un solo punto, por lo tanto $ax^2 + bx + c$, es un trinomio cuadrado perfecto, literal (c).

[1,5 puntos]

(iv) Indicar claramente en cuál de las gráficas, la función, $y = ax^2 + bx + c$, no tiene raíces reales.

No tiene raíces reales el literal (a), porque $b^2 - 4ac < 0$, por lo tanto no corta el eje x .

[1,5 puntos]

1.2 Calcular, $a^3 + a^{-3}$, sabiendo que: $a + a^{-1} = 2$.

Elevando al cuadrado, obtenemos:

$$a + a^{-1} = 2 \Rightarrow (a + a^{-1})^2 = 4 \Rightarrow a^2 + 2aa^{-1} + a^{-2} = 4$$

Tomando en cuenta que $aa^{-1} = 1$ y despejando, tenemos:

$$a^2 + a^{-2} = 4 - 2 \Rightarrow a^2 + a^{-2} = 2 \quad [2 \text{ puntos}]$$

Por suma de cubos, tenemos:

$$a^3 + a^{-3} = (a + a^{-1})(a^2 - aa^{-1} + a^{-2}) \Rightarrow a^3 + a^{-3} = (a + a^{-1})(a^2 + a^{-2} - 1)$$

Por lo tanto:

$$a^3 + a^{-3} = (2)(2 - 1) \Rightarrow a^3 + a^{-3} = 2$$

\therefore El valor de: $a^3 + a^{-3} = 2$. [2 puntos]

TEMA 2

Calcular el conjunto solución:

a) $p(x): \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}$

Resolviendo las fracciones, obtenemos:

$$\frac{x+1-(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{x+2-(x+1)}{(x-1)(x+2)} \Rightarrow \frac{x+1-x+2}{(x-2)(x+1)} = \frac{x+2-x+1}{(x-1)(x+2)} \quad [2 \text{ puntos}]$$

Reduciendo términos semejantes, tenemos:

$$\frac{3}{(x-2)(x+1)} = \frac{3}{(x-1)(x+2)} \Rightarrow 3(x-1)(x+2) = 3(x-2)(x+1)$$

Finalmente:

$$x^2 + x - 2 = x^2 - x - 2 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad [2 \text{ puntos}]$$

Para $x = 0$ no existe posibilidad de división por cero, concluimos:

$$Ap(x) = \{0\} \quad [1 \text{ punto}]$$

b) $q(x): \sqrt{x+4} - \sqrt{x-1} = \sqrt{3x+10}$

Elevando al cuadrado, ambos miembros, tenemos:

$$x+4 - 2\sqrt{(x+4)(x-1)} + x-1 = 3x+10 \Rightarrow -2\sqrt{x^2+3x-4} = x+7$$

Elevando nuevamente al cuadrado obtenemos:

$$4(x^2+3x-4) = x^2+14x+49 \Rightarrow 3x^2-2x-65=0$$

Factorizando, obtenemos:

$$(x-5)(3x+13) = 0 \Rightarrow x_1 = 5 \quad \vee \quad x_2 = -\frac{13}{3}$$

[2 puntos]

Verificación:

$$x_1 = 5 \Rightarrow \sqrt{5+4} - \sqrt{5-1} = \sqrt{3(5)+10} \quad \text{FALSO}$$

$$x_2 = -\frac{13}{3} \Rightarrow \sqrt{-\frac{13}{3}+4} - \sqrt{-\frac{13}{3}-1} = \sqrt{3\left(-\frac{13}{3}\right)+10} \quad \text{FALSO}$$

[2 puntos]

Por lo tanto: $Aq(x) = \emptyset$

[1 punto]

TEMA 3

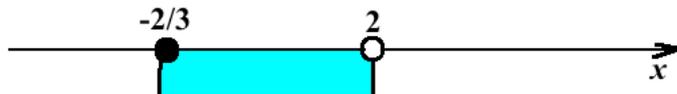
Sean los predicados: $p(x): -4 \leq 3x - 2 < 4$ y $q(x): x(x + 1) \geq 1$. Calcular:

a) $Ap(x)$

Trabajando con los tres miembros, sumamos 2, tenemos:

$$-2 \leq 3x < 6 \Rightarrow -\frac{2}{3} \leq x < 2.$$

Presentamos en la recta numérica;



[3 puntos]

Por lo tanto:

$$Ap(x) = \left[-\frac{2}{3}, 2\right)$$

[1 punto]

b) $Aq(x)$.

Multiplicando obtenemos:

$$x^2 + x \geq 1 \Rightarrow x^2 + x - 1 \geq 0$$

Aplicando fórmula general, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, para calcular los puntos críticos

tenemos:

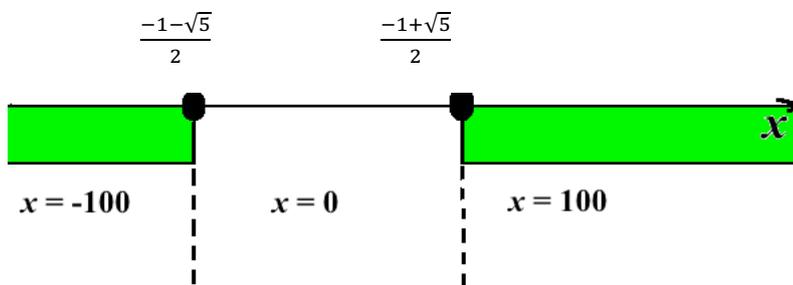
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Entonces: } \left(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \geq 0$$

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \text{ tomando en cuenta que: } x_1 < 0 \text{ y } x_2 > 0.$$

[2 puntos]

Presentamos en la recta numérica;



$$(-)(-) \geq 0 \quad (+)(-) \geq 0 \quad (+)(+) \geq 0$$

[1 punto]

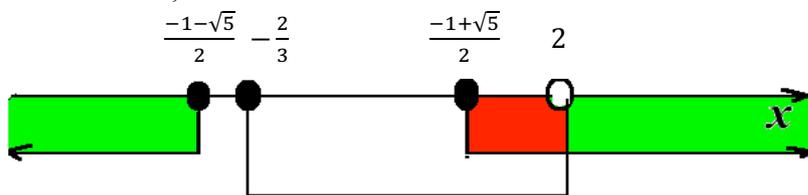
VERDADERO. FALSO. VERDADERO

$$\therefore Aq(x) = \left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right) = \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^c$$

[1 punto]

c) $A[p(x) \wedge q(x)]$.

Tomando en cuenta que: $-\frac{2}{3} > \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ y $2 > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, lo presentamos en la recta numérica;



[3 puntos]

Por lo tanto:

$$A[p(x) \wedge q(x)] = Ap(x) \cap Aq(x) = \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 2 \right) \quad [1 \text{ punto}]$$

TEMA 4

Clarita dueña de un almacén vende pasas a \$3,20 cada libra y nueces a \$2,40 cada libra, decide preparar 50 libras de mezcla entre pasas y nueces para venderlas a \$2,72 cada libra. Cuántas libras de nueces y pasas debe mezclar para obtener la misma ganancia?

Construyendo un cuadro de doble entrada para plantear ecuación, obtenemos:

	Libras	Costo/libra	Ganancia
Pasas	$50 - x$	$\frac{320}{100}$	$\frac{320}{100}(50 - x)$
Nueces	x	$\frac{240}{100}$	$\frac{240}{100}(x)$
Mezcla	50	$\frac{272}{100}$	$\frac{272}{100}(50)$

Obtenemos la ecuación:

$$\frac{320}{100}(50 - x) + \frac{240}{100}(x) = \frac{272}{100}(50) \quad [4 \text{ puntos}]$$

Resolviendo, obtenemos:

$$320(50) - 320x + 240(x) = 272(50) \Rightarrow 80x = 320(50) - 272(50)$$

Despejando:

$$x = \frac{50(320 - 272)}{80} \Rightarrow x = 30$$

[3 puntos]

Por lo tanto: para obtener la mezcla necesita 30 libras de nueces y 20 libras de pasas.

[1 punto]

TEMA 5

Sea $a \in \mathbb{R}$, $\wedge a \neq 1$. Calcular la solución del sistema:

$$a) \begin{cases} ax_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + ax_2 = -1 \end{cases}$$

Aplicando KRAMER, obtenemos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta = a^2 - 1$$

El sistema tiene solución única para $a \neq 1$, entonces:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & a \end{vmatrix}}{a^2 - 1} = \frac{a + 1}{(a + 1)(a - 1)} = \frac{1}{a - 1}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{a^2 - 1} = \frac{-a - 1}{(a + 1)(a - 1)} = \frac{-(a + 1)}{(a + 1)(a - 1)} = -\frac{1}{a - 1}$$

[3 puntos]

Por lo tanto:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a-1} \\ -\frac{1}{a-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{a-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad [1 \text{ punto}]$$

$$b) \begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \quad [6 \text{ puntos}]$$

Calculando el determinante del sistema para aplicar KRAMER:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)^2$$

El sistema tiene solución única para $a \neq 1$, entonces:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{(a-1)^2} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & a-1 \end{vmatrix}}{(a-1)^2} = \frac{2(a-1)}{(a-1)^2} = \frac{2}{a-1}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{(a-1)^2} = \frac{\begin{vmatrix} a-1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{(a-1)^2} = \frac{(a-1)}{(a-1)^2} = \frac{1}{a-1}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 3 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{(a-1)^2} = \frac{\begin{vmatrix} a-3 & -2 \\ -1 & a-2 \end{vmatrix}}{(a-1)^2} = \frac{(a-3)(a-2) - 2}{(a-1)^2} = \frac{a^2 - 5a + 6 - 2}{(a-1)^2}$$

$$x_3 = \frac{a^2 - 5a + 4}{(a-1)^2} = \frac{(a-4)(a-1)}{(a-1)^2} = \frac{a-4}{a-1}$$

[4 puntos]

Por lo tanto:

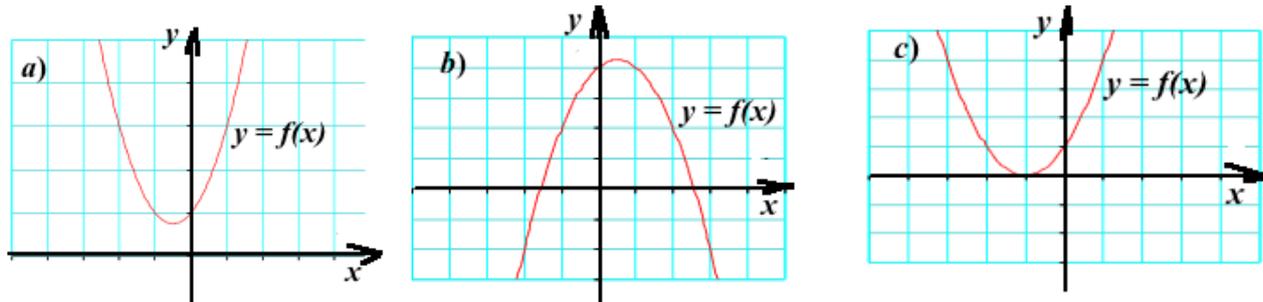
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{a-1} \\ 1 \\ \frac{a-4}{a-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{a-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a-4 \end{pmatrix}$$

[2 puntos]

Solución & Rúbrica

TEMA 1

1.3 En los diagramas adjuntos se representan partes de las graficas de, $y = ax^2 + bx + c$, contestar los literales (i), (ii), (iii) y (iv) razonando su respuesta.



(v) Indicar claramente en cuál de las gráficas el valor de, a , es negativo.

$a < 0$, en el literal (b), porque la parábola se abre hacia abajo. [1,5 puntos]

(vi) Indicar claramente en cuál de las gráficas el discriminante, $b^2 - 4ac$, es negativo.

$b^2 - 4ac < 0$, en el literal (a), porque la parábola no corta el eje x ,

indicando que no tiene raíces reales. [1,5 puntos]

(vii) Indicar claramente en cuál de las gráficas, la función, $y = ax^2 + bx + c$, no es un trinomio cuadrado perfecto.

Para que $ax^2 + bx + c$, no sea trinomio cuadrado perfecto, $b^2 - 4ac \neq 0$, por lo tanto esto lo cumplen los literales (a) y (b). [1,5 puntos]

(viii) Indicar claramente en cuál de las gráficas, la función, $y = ax^2 + bx + c$, tiene raíces reales.

Literal (b) y (c), porque su discriminante es no negativa. Sus dos raíces, o son iguales o diferentes. [1,5 puntos]

1.4 Calcular, $a^3 - a^{-3}$, sabiendo que: $a - a^{-1} = 2$.

Elevando al cuadrado, obtenemos:

$$a - a^{-1} = 2 \Rightarrow (a - a^{-1})^2 = 4 \Rightarrow a^2 - 2aa^{-1} + a^{-2} = 4$$

Tomando en cuenta que $aa^{-1} = 1$ y despejando, tenemos:

$$a^2 + a^{-2} = 4 + 2 \Rightarrow a^2 + a^{-2} = 6 \quad [2 \text{ puntos}]$$

Por suma de cubos, tenemos:

$$a^3 - a^{-3} = (a - a^{-1})(a^2 + aa^{-1} + a^{-2}) \Rightarrow a^3 - a^{-3} = (a - a^{-1})(a^2 + a^{-2} + 1)$$

Por lo tanto:

$$a^3 + a^{-3} = (2)(6 + 1) \Rightarrow a^3 + a^{-3} = 14$$

\therefore El valor de: $a^3 + a^{-3} = 14$. [2 puntos]

TEMA 2

Calcular el conjunto solución:

c) $p(x): \frac{x}{2x+3} + \frac{2x}{x-5} = \frac{5x^2+125}{2x^2-7x-15}$ [5 puntos]

Resolviendo las fracciones, obtenemos:

$$\frac{x(x-5)+2x(2x+3)}{(2x+3)(x-5)} = \frac{5x^2=125}{(x-5)(2x+3)} \Rightarrow \frac{x^2-5x+4x^2+6x}{(2x+3)(x-5)} = \frac{5x^2+125}{(x-5)(2x+3)}$$
 [2 puntos]

Reduciendo términos semejantes, tenemos:

$$\frac{5x^2+x}{(2x+3)(x-5)} = \frac{5x^2+125}{(x-5)(2x+3)} \Rightarrow 5x^2 + x = 5x^2 + 125$$

Finalmente:

$$x = 125$$
 [2 puntos]

Para $x = 125$ no existe posibilidad de división por cero, concluimos:

$$Ap(x) = \{125\}$$
 [1 punto]

d) $q(x): \sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} = \sqrt{3x+10}$ [5 puntos]

Elevando al cuadrado, ambos miembros, tenemos:

$$x+4 + 2\sqrt{(x+4)(x-1)} + x-1 = 3x+10 \Rightarrow 2\sqrt{x^2+3x-4} = x+7$$

Elevando nuevamente al cuadrado obtenemos:

$$4(x^2+3x-4) = x^2+14x+49 \Rightarrow 3x^2-2x-65=0$$

Factorizando, obtenemos:

$$(x-5)(3x+13) = 0 \Rightarrow x_1 = 5 \quad \vee \quad x_2 = -\frac{13}{3}$$

[2 puntos]

Verificación:

$$x_1 = 5 \Rightarrow \sqrt{5+4} + \sqrt{5-1} = \sqrt{3(5)+10} \quad \mathbf{VERDADERO}$$

$$x_2 = -\frac{13}{3} \Rightarrow \sqrt{-\frac{13}{3}+4} + \sqrt{-\frac{13}{3}-1} = \sqrt{3\left(-\frac{13}{3}\right)+10} \quad \mathbf{FALSO}$$

[2 puntos]

Por lo tanto: $Aq(x) = \{5\}$ [1 punto]

TEMA 3

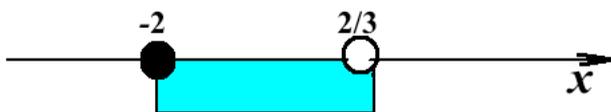
Sean los predicados: $p(x): -4 \leq 3x+2 < 4$ y $q(x): x(x+1) \geq 1$. Calcular:

d) $Ap(x)$

Trabajando con los tres miembros, restamos 2, tenemos:

$$-6 \leq 3x < 2 \implies -2 \leq x < \frac{2}{3}$$

Presentamos en la recta numérica;



[3 puntos]

Por lo tanto:

$$Ap(x) = [-2, \frac{2}{3})$$

[1 punto]

e) $Aq(x)$.

Multiplicando obtenemos:

$$x^2 + x \geq 1 \implies x^2 + x - 1 \geq 0$$

Aplicando fórmula general, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, para calcular los puntos críticos

tenemos:

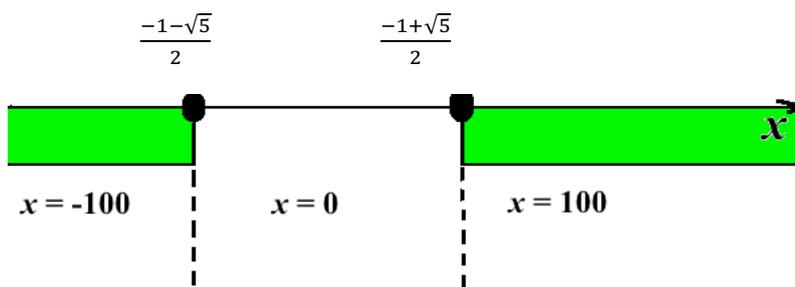
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \implies x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Entonces: } \left(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \geq 0$$

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \text{ tomando en cuenta que: } x_1 < 0 \text{ y } x_2 > 0.$$

[2 puntos]

Presentamos en la recta numérica;



$$(-)(-) \geq 0 \quad (+)(-) \geq 0 \quad (+)(+) \geq 0$$

[1 punto]

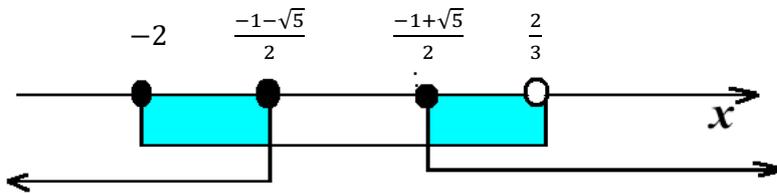
VERDADERO. FALSO. VERDADERO

$$\therefore Aq(x) = \left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right) = \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^c$$

[1 punto]

f) $A[p(x) \wedge q(x)]$.

Tomando en cuenta que: $-2 < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{2}{3} > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, lo presentamos en la recta numérica;



[3 puntos]

Por lo tanto:

$$A[p(x) \wedge q(x)] = Ap(x) \cap Aq(x) = \left[-2, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{2}{3}\right). \quad [1 \text{ punto}]$$

TEMA 4

En un corral hay 5 pavos más que gallinas y 3 patos más que pavos. Si en total hay 49 aves. Cuántas gallinas, pavos y patos hay en el corral?

Construyendo un cuadro de doble entrada para plantear ecuación, obtenemos:

	Pavos	Gallinas	Patos	TOTAL
Cantidad	$x + 5$	x	$x + 8$	49

Obtenemos la ecuación:

$$x + 5 + x + x + 8 = 49 \quad [4 \text{ puntos}]$$

Resolviendo, obtenemos:

$$3x = 49 - 13 \Rightarrow x = \frac{36}{3} = 12$$

[3 puntos]

Por lo tanto: en corral hay 17 pavos, 12 gallinas, 20 patos.

[1 punto]

TEMA 5

Sea $a \in \mathbb{R}$, $\wedge a \neq 2$. Calcular la solución del sistema:

$$c) \begin{cases} ax_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + ax_2 = -1 \end{cases} \quad [4 \text{ puntos}]$$

Aplicando KRAMER, obtenemos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 2 & a \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta = a^2 - 4$$

El sistema tiene solución única para $a \neq 1$, entonces:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & a \end{vmatrix}}{a^2 - 4} = \frac{a + 2}{(a + 2)(a - 2)} = \frac{1}{a - 2}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{a^2 - 4} = \frac{-a - 2}{(a + 2)(a - 2)} = \frac{-(a + 2)}{(a + 2)(a - 2)} = -\frac{1}{a - 2}$$

[3 puntos]

Por lo tanto:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a-2} \\ -\frac{1}{a-2} \end{pmatrix} = \frac{1}{a-2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad [1 \text{ punto}]$$

$$d) \begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \quad a \neq 1$$

Calculando el determinante del sistema para aplicar KRAMER:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)^2$$

El sistema tiene solución única para $a \neq 1$, entonces:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{(a-1)^2} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & a-1 \end{vmatrix}}{(a-1)^2} = \frac{-2(a-1)}{(a-1)^2} = -\frac{2}{a-1}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{(a-1)^2} = \frac{\begin{vmatrix} a-1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{(a-1)^2} = \frac{-(a-1)}{(a-1)^2} = -\frac{1}{a-1}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{(a-1)^2} = \frac{-\begin{vmatrix} a-1 & -2 \\ 1-a & 2-3a \end{vmatrix}}{(a-1)^2} = \frac{-[-(3a-2)(a-1) - 2(a-1)]}{(a-1)^2}$$

$$x_3 = \frac{(a-1)(3a-2) + 2(a-1)}{(a-1)^2} = \frac{(a-1)(3a-2+2)}{(a-1)^2} = \frac{3a(a-1)}{(a-1)(a-1)}$$

$$x_3 = \frac{3a}{a-1}.$$

[4 puntos]

Por lo tanto:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{a-1} \\ -1 \\ \frac{3a}{a-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{a-1} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3a \end{pmatrix}$$

[2 puntos]