SOLUCIONES Y RÚBRICAS EX. DE MEJORAMIENTO CV PAO2 2020

BANCO 1

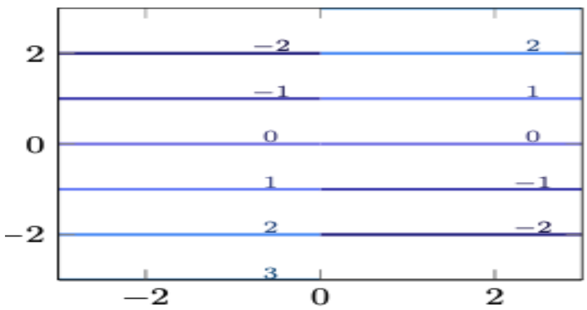
EJERCICIO 1

Estudie las curvas de nivel de la función $f(x,y) = y\ sgn(x)$ y bosqueje el mapa de contorno para K = 0, 1, -1, 2 y -2.

Teniendo en cuenta que la función signo, $\mathrm{sgn}(x)$, vale 1 si $x > 0$, -1 si $x < 0$ y 0 si $x = 0$, y razonando con un poco de calma las distintas posibilidades, no es complicado llegar a la conclusión que las curvas de nivel a altura k constan de dos partes

$$y = k,\ x > 0 \quad \text{e} \quad y = -k,\ x < 0,$$

si $k \neq 0$. Si $k = 0$, la curva de nivel es la unión de los dos ejes



Capacidades deseadas	Desempeño			
	Inicial	**En Desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante debe ser capaz de obtener y analizar las curvas de nivel de una función escalar de dos variables.	No conoce la definición de curvas de nivel y de la función signo o las aplica con varios errores.	El estudiante aplica bien la definición de curvas de nivel pero comete errores en su obtención o en el manejo de la función signo.	El estudiante halla correctamente la ecuación de las curvas de nivel para los k solicitados , pero se equivoca al bosquejar el mapa de contorno.	El estudiante maneja bien el concepto de función signo, obtiene correctamente las ecuaciones de todas las curvas de nivel y dibuja bien el mapa de contorno, o comete errores poco significativos .
	0-3	4-9	10-16	17-20

EJERCICIO 2

Estudie las curvas de nivel de la función $f(x, y) = |x - y|$ y bosqueje el mapa de contorno para K = 2 y 4.

Para esta función f las curvas de nivel corresponden a los puntos del plano que verifican $|x - y| = k$. Evidentemente $k \geq 0$, es decir, las curvas para $k < 0$ son vacías. Observemos que si $k > 0$, la igualdad $|x - y| = k$ se desdobla en las dos igualdades

$$x - y = k, \quad x - y = -k,$$

es decir la curva de nivel a altura k consta de las dos rectas paralelas anteriores. Si $k = 0$ entonces la curva de nivel correspondiente es la recta $y = x$

Capacidades deseadas	Desempeño			
	Inicial	**En Desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante debe ser capaz de obtener y analizar las curvas de nivel de una función escalar de dos variables	No conoce la definición de curvas de nivel y de la función valor absoluto o las aplica con varios errores.	El estudiante aplica bien la definición de curvas de nivel pero comete errores en su obtención o en el manejo de la función valor absoluto.	El estudiante halla correctamente la ecuación de las curvas de nivel para los k soliciitados , pero se equivoca al bosquejar el mapa de contorno.	El estudiante maneja bien el concepto de función valor absoluto, obtiene correctamente las ecuaciones de todas las curvas de nivel y dibuja bien el mapa de contorno, o comete errores poco significativos.
	0-3	4-9	10-16	17-20

BANCO 2

EJERCICIO 1

Determina un vector unitario $\mathbf{n}$ de modo que la derivada direccional de la función $f(x,y,z)=\frac{1-xy}{z}$ en el punto $(1,1,1)$ y en la dirección pedida sea $-\sqrt{2}$.

Es directo conseguir que

$$\nabla f(x,y,z)=\left(-\frac{y}{z},-\frac{x}{z},\frac{xy-1}{z^2}\right),$$

y por tanto

$$\nabla f(1,1,1)=(-1,-1,0).$$

Puesto que para una función diferenciable, la derivada direccional viene dada por

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(x_0)=\nabla f(x_0)\cdot \mathbf{n},$$

el vector $\mathbf{n}=(n_1,n_2,n_3)$ debe verificar

$$(-1,-1,0)\cdot(n_1,n_2,n_3)=-\sqrt{2},\quad n_1^2+n_2^2+n_3^2=1.$$

De la primera condición se obtiene

$$n_1=\sqrt{2}-n_2,$$

y llevándola a la segunda ecuación,

$$1-2\sqrt{2}n_2+2n_2^2+n_3^2=0.$$

Completando cuadrados, podemos escribir

$$2\left(n_2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+n_3^2=0.$$

La única posibilidad es que

$$n_3=0,\quad n_2=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad n_1=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Capacidades deseadas	Desempeño			
	Inicial	**En Desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante debe ser capaz de determinar información a partir de utilizar las nociones teóricas de la derivada direccional de una función.	No sabe aplicar el gradiente de una función y/o de derivada parcial, o los aplica con varios errores.	El estudiante obtiene el gradiente de la función dada y/o aplica el concepto de derivada direccional pero comete errores en el proceso.	El estudiante obtiene el gradiente de la función dada y/o aplica el concepto de derivada direccional, define el vector solicitado pero comete errores en el proceso.	El estudiante obtiene el gradiente de la función dada y/o aplica el concepto de derivada direccional, define el vector solicitado y algebraicamente obtiene los componentes del vector o comete errores poco significativos.
	0-5	6-10	11-16	17-20

EJERCICIO 2

Considerar la función

$$f(x,y) = \frac{1+\operatorname{sen}(e^x)}{1-\cos(e^y)}.$$

(a) Hallar la ecuación del plano tangente en el punto $(\log \pi, \log \pi)$.

(b) Calcular la derivada direccional en el punto anterior y en la dirección dada por el vector $\frac{1}{\sqrt{10}}(\sqrt{3}, -\sqrt{7})$.

(a) La ecuación del plano tangente al grafo de una función en un punto (x_0, y_0) se escribe como:

$$z - f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0).$$

Por tanto, para determinar la ecuación del plano tangente necesitamos el vector gradiente y el valor de la función en dicho punto. En concreto

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{e^x \cos(e^x)}{1-\cos(e^y)}, -\frac{e^y \operatorname{sen}(e^y)(1+\operatorname{sen}(e^x))}{(1-\cos(e^y))^2} \right).$$

En el punto pedido, tenemos

$$\nabla f(\log \pi, \log \pi) = (-\tfrac{\pi}{2}, 0), \quad f(\log \pi, \log \pi) = \tfrac{1}{2},$$

y la ecuación del plano tangente será

$$-\frac{\pi}{2}(x - \log \pi) = z - \frac{1}{2}.$$

(b) Para encontrar la derivada direccional dada, puesto que la función es diferenciable en ese punto, debemos hacer el producto escalar del vector gradiente en el punto concreto y el vector unitario que determina la dirección, es decir,

$$\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}(\sqrt{3}, -\sqrt{7}) = -\frac{\pi\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}.$$

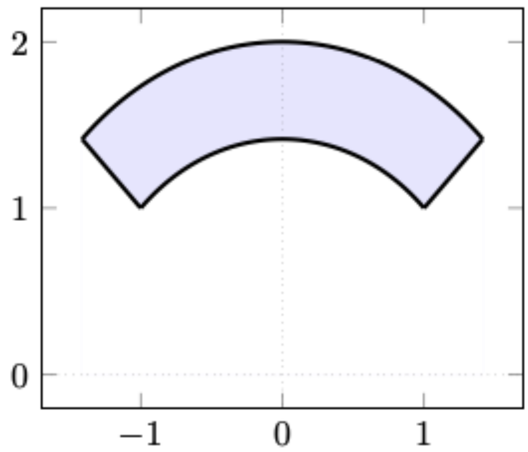
Capacidades deseadas	**Desempeño**			
	Inicial	**En Desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante debe ser capaz de determinar la derivada direccional y la ecuación del plano tangente a una superficie de una función escalar de dos variables a partir de ciertas condiciones.	No sabe aplicar el gradiente de una función y/o de derivada parcial, o los aplica con varios errores.	El estudiante utiliza la ecuación de un plano y del el gradiente de la función pero comete errores en el proceso.	El estudiante obtiene correctamente el gradiente de la función en el punto dado y halla la ecuación solicitada. En el literal b) aplica incorrectamente el producto escalar del vector gradiente con el vector unitario.	El estudiante obtiene correctamente el gradiente de la función en el punto dado y halla la ecuacion solicitada. En el literal b) aplica correctamente el producto escalar del vector gradiente con el vector unitario o comete errores poco significativos.
	0-5	6-10	11-16	17-20

<u>**BANCO 3**</u>

EJERCICIO 1

Evalúe la siguiente integral usando el cambio a coordenadas polares:

$\int_D (x+y)\,dA$, D acotado por $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, $y=x$, $y=-x$ con $y \geq 0$.



En este caso la región de integración es la corona descrita por

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}, \quad 1 \leq r \leq 2.$$

Por lo tanto la integral que nos ocupa se escibe en coordenadas polares como:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_1^2 r^2 \left(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\right)\, dr\, d\theta.$$

Las dos integraciones que se deben realizar son directas y no ofrecen mayores dificultades. El resultado final es $\frac{7\sqrt{2}}{3}$.

Capacidades deseadas	Desempeño			
	Inicial	**En Desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante debe ser capaz de de evaluar una integral doble de una función escalar de dos variables	No puede describir la R de integración.	El estudiante describe bien la R de integración, pero aplica mal los límites de integración y malogra las integrales.	El estudiante describe bien la R de integración, aplica bien los límites de integración pero evalúa mal una o ambas integrales.	El estudiante describe bien la R de integración, aplica bien los límites de integración, evalúa bien ambas integrales o comete errores pocos significativos.
	0-3	4-10	11-16	17-20

EJERCICIO 2

Evalúe la siguiente integral usando el cambio a coordenadas polares:

$$\int_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dA,\; D = \{x^2 + y^2 \leq 2x\}.$$

La región de integración en este caso, escrita en coordenadas polares, es

$$r \leq 2\cos\theta$$

que representa el interior del círculo centrado en $(1, 0)$ y radio 1. Esta conclusión se puede obtener de manera clara si se completan cuadrados en la forma del recinto en coordenadas rectangulares

$$(x-1)^2 + y^2 \leq 1.$$

En este caso los límites de integración para θ deben ser $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$, pues es el intervalo de ángulos en que está definido dicho círculo.

Así vemos que la integral que nos interesa es

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} dr\, d\theta.$$

Los cálculos concretos no suponen ninguna dificultad especial. El valor de la integral es 4.

Capacidades deseadas	Desempeño			
	Inicial	**En Desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante debe ser capaz de de evaluar una integral doble de una función escalar de dos variables	No sabe aplicar el teorema de Fubini o aplica incorrectamente el cambio a coordenadas polares para la R de integracion.	El estudiante aplica bien Fubini, escribe correctamente la R de integración en polares, completa cuadrados, pero aplica mal los límites de integración.	El estudiante escribe correctamente la R de integración en polares, completa cuadrados, aplica bien los límites de integración pero comete errores en el cálculo de las integrales.	El estudiante escribe correctamente la R de integración en polares, completa cuadrados, aplica bien los límites de integración y calcula bien los integrales o comete errores no significativos.
	0-5	6-10	11-16	17-20

BANCO 4

EJERCICIO 1

Aplicar el Teorema de Green para evaluar la integral de línea

$$\int_C x^2y\,dx + xy^2\,dy$$

donde C es la frontera de la región limitada por las curvas $y = x^2$, $y = 8 - x^2$.

Por el teorema de Green, podemos escribir

$$I = \int_C (x^2y\,dx + xy^2\,dy) = \iint_D (2xy - x^2)\,dx\,dy.$$

La región D se describe como

$$-2 \le x \le 2, \quad x^2 \le y \le 8 - x^2,$$

y en consecuencia

$$I = \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{8-x^2} (y^2 - x^2)\,dx\,dy = \frac{2816}{7}.$$

Capacidades deseadas	**Desempeño**			
	Inicial	**En Desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante debe ser capaz de aplicar el Teorema de Green para calcular una integral de línea.	No sabe aplicar el teorema de Green para calcular una integral de línea o lo hace incorrectamente.	El estudiante sabe aplicar el teorema de Green pero comete errores con la derivadas parciales o los límites de integración.	El estudiante aplica bien el teorema de Green , calcula bien las derivadas parciales, ubica bien los límites de integración, pero comete errores en la evaluación de la integral.	El estudiante aplica bien el teorema de Green , calcula bien las derivadas parciales, ubica bien los límites de integración, evalúa bien la integral o comete errores pocos significativos.
	0-5	6-10	11-17	18-20

EJERCICIO 2

Aplicando el Teorema de Green:

Calcula la integral

$$I = \int_C y^3\,dx + x^3\,dy,$$

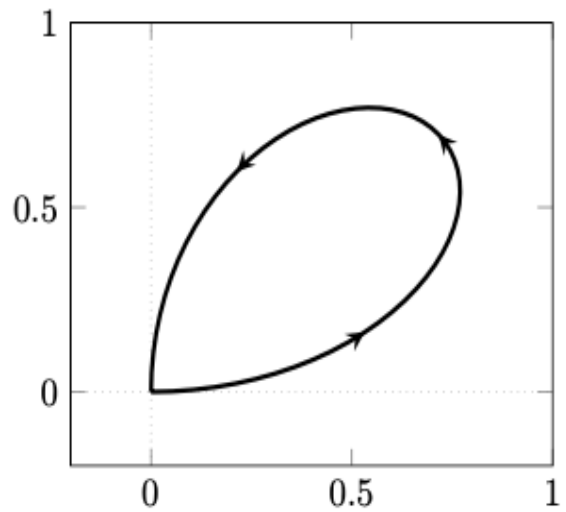
donde C es la curva dada en polares con ecuación $r = \operatorname{sen}(2\theta)$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Por el teorema de Green, podemos escribir

$$I = \iint_D 3(x^2 - y^2)\,dx\,dy$$

donde D es la región encerrada por la curva cerrada C, que corresponde a un cuarto de la rosa de cuatro pétalos (véase Figura 55). Calculando esta integral doble en coordenadas polares, puesto que su frontera nos la proporcionan en estas coordenadas, tendremos

$$\begin{aligned} I =& 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\operatorname{sen}(2\theta)} r^2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) r\,dr\,d\theta \\ =& \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\theta)\operatorname{sen}^4(2\theta)\,d\theta = \frac{3}{40}\operatorname{sen}^5(2\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0. \end{aligned}$$



Capacidades deseadas	Desempeño			
	Inicial	**En Desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante debe ser capaz de aplicar el Teorema de Green para calcular una integral de línea.	No sabe aplicar el teorema de Green para calcular una integral de línea o lo hace incorrectamente.	El estudiante sabe aplicar el teorema de Green pero comete errores con la derivadas parciales o los límites de integración al trabajar en polares.	El estudiante aplica bien el teorema de Green , calcula bien las derivadas parciales, ubica bien los límites de integración al trabajar en polares, pero comete errores en la evaluación de la integral.	El estudiante aplica bien el teorema de Green , calcula bien las derivadas parciales, ubica bien los límites de integración al trabajar en polares, evalúa bien las integrales o comete errores pocos significativos.
	0-5	6-10	11-17	18-20

BANCO 5

EJERCICIO 1

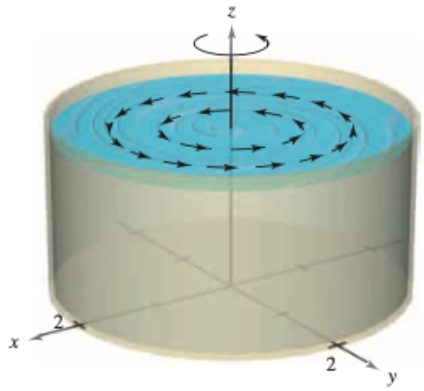
Un líquido es agitado en un recipiente cilíndrico de radio 2, de manera que su movimiento se decribe por el campo de velocidad

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -y\sqrt{x^2 + y^2}\,\mathbf{i} + x\sqrt{x^2 + y^2}\,\mathbf{j}$$

como se muestra en la figura, hallar

$$\int_S\int (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, dS$$

donde S es la superficie superior del recipiente cilíndrico.



Solución El rotacional de $\mathbf{F}$ está dado por

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y\sqrt{x^2 + y^2} & x\sqrt{x^2 + y^2} & 0 \end{vmatrix} = 3\sqrt{x^2 + y^2}\,\mathbf{k}.$$

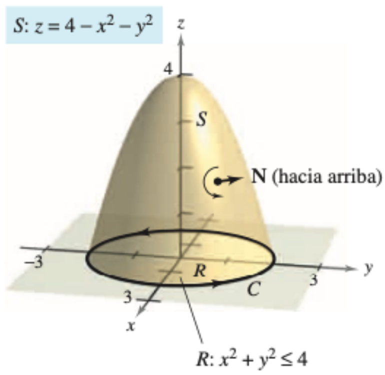
Haciendo $\mathbf{N} = \mathbf{k}$, se tiene

$$\begin{aligned} \int_S\int (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, dS &= \int_R\int 3\sqrt{x^2 + y^2}\, dA \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (3r)r\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} r^3\Big]_0^2\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 8\, d\theta \\ &= 16\pi. \end{aligned}$$

Capacidades deseadas	Desempeño			
	Inicial	**En Desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante debe ser capaz de aplicar el Teorema de Stokes para calcular la circulación de flujo en una superficie dada.	El estudiante plantea el rotacional del campo pero lo calcula mal.	El estudiante calcula correctamente el rotacional del campo y el vector normal pero equivoca los límites de integración o erra en el cambio a polares.	El estudiante calcula correctamente el rotacional del campo, el los límites de integración o erra en el cambio a polares.	El estudiante, calcula bien el rotacional del campo, ubica bien los límites de integración, cambia bien a polares y evalúa bien las integrales o comete errores pocos significativos.
	0-5	6-10	11-17	18-20

EJERCICIO 2

Sea S la parte del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ que permanece sobre el plano XY , orientado hacia arriba como lo indica lo figura. Sea C su curva frontera en le plano XY orientada en el sentido contrario al de las manecillas del reloj. Verifique el teorema de Stokes $F(x, y, z) = (2z, x, y^2)$ evaluando la integral de superficie y la integral de línea equivalente.



Solución Como *integral de superficie*, se tiene $z = g(x, y) = 4 - x^2 - y^2$, $g_x = -2x$, $g_y = -2y$, y

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2z & x & y^2 \end{vmatrix} = 2y\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

De acuerdo con el teorema 15.11, se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_S\int (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, dS &= \int_R\int (2y\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k})\, dA \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4xy + 4y + 1)\, dy\, dx \\
&= \int_{-2}^{2} \Big[2xy^2 + 2y^2 + y \Big]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx \\
&= \int_{-2}^{2} 2\sqrt{4 - x^2}\, dx \\
&= \text{Área del círculo de radio } 2 = 4\pi.
\end{aligned}$$

Como *integral de línea*, se puede parametrizar C como

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} t\mathbf{j} + 0\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Para $\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C M\, dx + N\, dy + P\, dz \\
&= \int_C 2z\, dx + x\, dy + y^2\, dz \\
&= \int_0^{2\pi} [0 + 2\cos t(2\cos t) + 0]\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} 4\cos^2 t\, dt \\
&= 2\int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t)\, dt \\
&= 2\Big[t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t \Big]_0^{2\pi} \\
&= 4\pi.
\end{aligned}$$

Capacidades deseadas	Desempeño			
	Inicial	**En Desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
El estudiante debe ser capaz de verificar el Teorema de Stokes en relación al cálculo de una integral de línea.	El estudiante plantea el rotacional del campo y el vector normal pero los calcula mal.	El estudiante calcula correctamente el rotacional del campo y el vector normal pero equivoca los límites de integración o erra en la evaluacion de los integrales.	El estudiante resuelve bien el ejercicio aplicando el teorema de Stokes pero al verificar como integral de línea parametriza mal C o plantea mal la integral.	El estudiante resuelve bien el ejercicio aplicando el teorema de Stokes, al verificar como integral de línea parametriza bien C , plantea y resuelve bien la integral verificando el teorema o comete errores poco significativos.
	0-5	6-10	11-15	16-20