**TEMA 1-1**

Encuentre la ecuación del plano que pasa por los puntos A(0,-1,4) y B(-1,2,2) y es perpendicular al plano $2z + 5x + 4y$

$\pi 1:\ 5x + 4y - 2z = 0$
$\overrightarrow{n1}$: (5,4,-2)
$\overrightarrow{AB}: (-1,3,-2)$
$\overrightarrow{n2}$: vector normal del plano que estamos buscando
$\overrightarrow{n2} = \overrightarrow{n1} x\, \overrightarrow{AB} =$ (-2,12,19)
Ecuación del plano
A(x-xo)+B(y-yo)+C(z-zo)=0, Po(-1,2,2)
-2(x+1) + 12(y-2) + 19(z-2) = 0
-2x + 12y + 19z = 64

**TEMA 1-2**

Encuentre la ecuación del plano que pasa por el punto A(1,5,1) y es perpendicular a los planos

$\pi 1: 2x + y - 2z = 2,\ \ \pi 2: x + 3z = 4$

$\overrightarrow{n1}$: (2,1,-2), vector normal del plano $\pi 1$
$\overrightarrow{n2}$: $(1,0,3)$, vector normal del plano $\pi 2$
$\overrightarrow{n3}$: vector normal del plano que estamos buscando
$\overrightarrow{n1}\ y\ \overrightarrow{n2}$ no son paralelos por tanto los planos no son paralelos
$\overrightarrow{n3} = \overrightarrow{n1} x\, \overrightarrow{n2} =$ (3,-8,-1)
Ecuación del plano
A(x-xo) + B(y-yo) + C(z-zo)=0, Po(1,5,1)
3(x-1) - 8(y-5) - (z-1) = 0
3x-8y-z = -38

**TEMA 1-3**

Encuentre la ecuación del plano que pasa por los puntos A(-1,2,5) y B(2,1,4) y es perpendicular al plano 8x-2y+6z=1

$\pi 1:\ 8x - 2y + 6z = 1$
$\overrightarrow{n1}$: (8,-2,6)
$\overrightarrow{AB}: (3,-1,-1)$
$\overrightarrow{n2}$: vector normal del plano que estamos buscando
$\overrightarrow{n2} = \overrightarrow{n1} x\, \overrightarrow{AB} =$ (4,13,-1)
Ecuación del plano
A(x-xo) + B(y-yo) + C(z-zo)=0, Po(2,1,4)
4(x-2) + 13(y-1) - 1(z-4) = 0
4x + 13y - z = 17

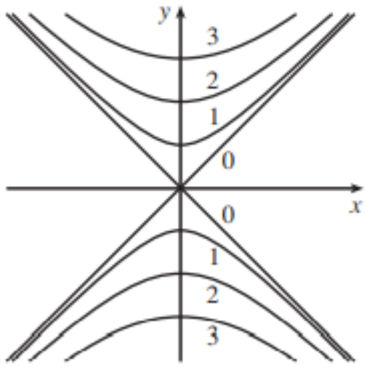
Rúbrica general:

<table>
<tr><td>Capacidades deseadas</td><td colspan="4">Desempeño</td></tr>
<tr><td rowspan="3">El estudiante debe ser capaz de encontrar la ecuación del plano que cumpla con las condiciones del problema</td><td>Inicial</td><td>En desarrollo</td><td>Desarrollado</td><td>Excelente</td></tr>
<tr><td>No identifica el vector normal del plano que le dan</td><td>Realiza el procedimiento correcto para encontrar el vector normal del plano que le piden</td><td>En la ecuación del plano reemplaza los datos correspondientes al vector normal y el punto, pero se equivoca en determinar la ecuación del plano</td><td>Reemplaza los datos de forma correcta y encuentra la ecuación del plano que cumple con las condiciones del problema</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1-4</td><td>5-8</td><td>9-10</td></tr>
</table>

**TEMA 2-1**

Dibuje un mapa de contorno de la función $f(x,y) = \sqrt{y^2 - x^2}$, mostrando las curvas de nivel para valores de k=0, 1, 2 y 3

Curvas de nivel
$y^2 - x^2 = k^2$
Las curvas de nivel son familia de elipses
Mapa de contorno

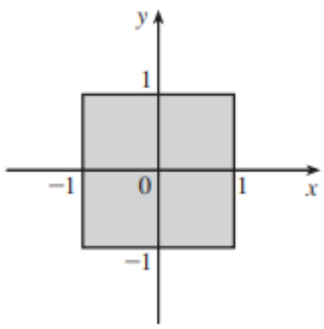



**TEMA 2-2**
**Determine y grafique el dominio de la función**

$$\boldsymbol{f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2}}}$$

Dominio de la función = $\{(x,y), -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$

Gráfica del dominio de la función. (No se consideran los puntos de la frontera del cuadrado). LAS LÍNEAS DEL GRÁFICO DEBEN SER PUNTEADAS

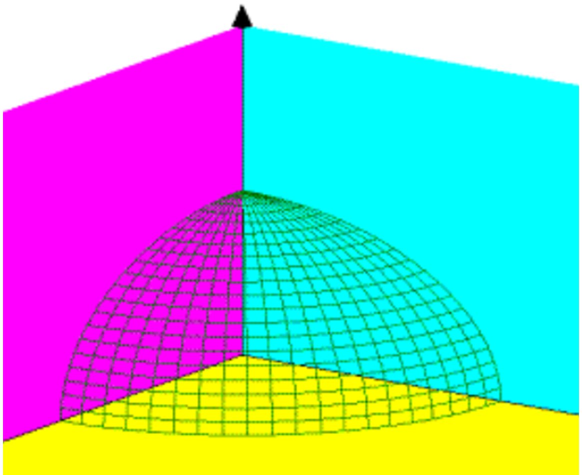



**TEMA 2-3**
**Determine y grafique el dominio de la función**

$$\boldsymbol{f(x,y,z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \ln(4 - x^2 - y^2 - z^2)}$$

Dominio de la función $\{(x, y, z), x^2 + y^2 + z^2 < 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

El dominio representa los puntos interiores de una esfera de radio 2, centro en el origen, en el primer octante.



Rúbrica general:

| Capacidades deseadas | Desempeño | | | |
|---|---|---|---|---|
| El estudiante debe ser capaz de identificar y graficar el dominio, rango y curvas de nivel de una función de varias variables | Inicial | En desarrollo | Desarrollado | Excelente |
| | No identifica el dominio o las curvas de nivel de la función ni su gráfica | Al identificar el dominio o las curvas de nivel de la función comete menos de dos errores | Identifica el dominio o las curvas de nivel de la función, pero no realiza bien su gráfica | Identifica el dominio o las curvas de nivel de la función y realiza su gráfica |
| | 0 | 1-3 | 4-7 | -10 |

**TEMA 3-1**

Sea $f(x,y) = \begin{cases} \frac{sen(x^2)y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad\quad , & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Verificar que f es continua en el punto (0,0)
b) Calcular las derivadas parciales de la función f con respecto a las variables $x$ y $y$ tanto en el origen como fuera de el.

Entonces tenemos que verificar si la función dada es continua en el punto $(x_0, y_0) = (0,0)$. Usando la definición de continuidad:
Debemos probar que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{sen(x^2)y^2}{x^2+y^2}\right) = f(0,0) = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{sen(x^2)y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{r\to 0} \frac{sen(r^2\cos^2\theta)r^2 sen^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\cos^2\theta}$$
$$= \lim_{r\to 0} \frac{sen(r^2\cos^2\theta)\boxed{r}^2 sen^2\theta}{\boxed{r^2}(\cos^2\theta + \cos^2\theta)}$$
$$= \lim_{r\to 0} \frac{sen(r^2\cos^2\theta)sen^2\theta}{1}$$
$$= sen^2\theta \cdot \lim_{r\to 0} sen(r^2\cos^2\theta)$$
$$= sen^2\theta \cdot sen(\lim_{r\to 0} r^2\cos^2\theta) = sen^2\theta sen(0) = 0$$

Por lo tanto, es continua en (0,0)

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{sen(h^2)\cdot 0}{h^2+0^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$f(x,y) = \frac{sen(x^2)y^2}{x^2+y^2}$ , $si(x,y) \neq (0,0)$, por lo tanto, derivamos directamente, obtenemos:

$$f_x(x,y) = \frac{y^2(2x\cos(x^2)(x^2+y^2) - 2x\sin(x^2))}{(x^2+y^2)^2}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2(2x\cos(x^2)(x^2+y^2) - 2x\sin(x^2))}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0.0) \\ 0 & , (x,y) \neq (0.0) \end{cases}$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0.0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{sen(0^2)\cdot h^2}{0^2+h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$f(x,y) = \frac{sen(x^2)y^2}{x^2+y^2}$ , $si(x,y) \neq (0,0)$, por lo tanto, derivamos directamente, obtenemos:

$$f_y(x,y) = \frac{2y\,(sen(x^2)\,(x^2+y^2) - y^2\,sin(x^2))}{(x^2+y^2)^2}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2y\,(sen(x^2)\,(x^2+y^2) - y^2\,sin(x^2))}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0.0) \\ 0 & , (x,y) \neq (0.0) \end{cases}$$

Rúbrica:

| **Capacidades deseadas** | **Desempeño literal a)** | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Inicial** | **En Desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelente** |
| El estudiante debe ser capaz de analizar la continuidad de una función escalar de varias variables y determinar diferenciabilidad en un punto dado | No sabe cómo plantear el problema | El estudiante aplica la definición de continuidad en el punto solicitado pero no resuelve bien el límite respectivo | El estudiante Resuelve correctamente a) pero no puede hallar correctamente las derivadas parciales de f con repecto a xe y en el origen y fuera de el | El estudiante resuelve correctamente todo el ejercicio o comete algein error poco significativo. |
| | 0 | 1-10 | 11-20 | 21-25 |

**TEMA 3-2**

Sea la función: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^n y^{n+1})}{(x^n+y^n)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

a) Analice la continuidad de la función en $(x,y) = (1,0)$.

b) Determine si existen las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0), \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

c) ¿Es diferenciable f(x,y) en (0,0)? Justifique su respuesta.

a) La función definida para el punto $(x,y) = (1,0)$. es $f(x,y) = \frac{(x^n y^{n+1})}{(x^n+y^n)^2}$ la cual es cociente de polinomios continuos con denominador distinto de cero en

$(x,y) = (1,0)$. por lo tanto, es continua allí.

b) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0^n h^{n+1}}{(0^2+h^2)^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0{,}0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0{,}0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^n 0^{n+1}}{(h^2+0^2)^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

c) Para probar diferenciabilidad usamos la definición

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|\frac{h^n k^{n+1}}{(h^n+k^n)^2}-f(0{,}0)-(h,k)\cdot(0{,}0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{h\to 0}\frac{\left|\frac{h^n k^{n+1}}{(h^n+k^n)^2}\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h^n k^{n+1}}{(h^n+k^n)^2\sqrt{h^2+k^2}} = usar\ \ k = mh$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h^n m^{n+1} h^{n+1}}{(h^n+m^n h^n)^2\sqrt{h^2+m^2h^2}} = \frac{\boxed{h^{2n+1}}m^{n+1}}{\boxed{h^{2n+1}}(1+m^n)^2\sqrt{1+m^2}}$$

$$= \frac{m^{n+1}}{(1+m^n)^2\sqrt{1+m^2}}$$

$No\ existe$, entonces f(x,y) no es diferenciable en el origen.

$$si\ m = 1, L = \frac{1}{8}, si\ m = 0\ , L = 0\ , el\ límite\ no\ existe.$$

$otra\ \ forma\!: usando\ coordenadas\ polares$

$$\lim_{h\to 0}\frac{h^n k^{n+1}}{(h^n+k^n)^2\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{r\to 0}\frac{r^{2n+1}\cos^n\theta\times sen^{n+1}\theta}{r^{2n}(\cos^n\theta+sen^n\theta)^2 r\sqrt{\cos^2\theta+sen^2\theta}}$$

$$= \frac{\boxed{r^{2n+1}}\cos^n\theta\times sen^{n+1}\theta}{\boxed{r^{2n}}(\cos^n\theta+sen^n\theta)^2\boxed{r}\sqrt{1}}$$

$$depende\ de\ el\ ángulo\ \theta, si\ \theta = \frac{\pi}{4}\ , L \neq 0$$

Rúbrica:

| **Capacidades deseadas** | **Desempeño literal a)** | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Inicial** | **En Desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelente** |
| El estudiante debe ser capaz de analizar la continuidad de una función escalar de varias variables y determinar diferenciabilidad en un punto dado. | No sabe cómo resolver a) o no aplica bien el teorema de sustitución | El estudiante aplica el teroema de sustitución y concluye bien a) pero tiene problemas para plantear y resolver las derivadas parciales o resuleve solo una de ellas. | El estudiante resuelve correctamente a) y b) pero no puede plantear la diferenciabilidad o comete errores en este proceso | El estudiante resuelve correctamente todo el ejercicio o comete algein error poco significativo. |
| | 0-2 | 3-10 | 11-20 | 21-25 |

**TEMA 3-3**

Dada la función:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(x^3y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\[2ex] 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a) Determine si la función dada es continua en el punto (0,0)

b) Calcule las derivadas parciales de la función dada con respecto a las variables $x$ y $y$ tanto en el origen como fuera de él.

c) Determine si la función f es diferenciable en (0,0)

Fuera del origen la función $f$ está definida y es derivable. Las derivadas parciales se calculan con un poco de paciencia:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{3\cos(x^3y^2)x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}-\frac{4\sin(x^3y^2)x}{(x^2+y^2)^3}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2\cos(x^3y^2)x^3y}{(x^2+y^2)^2}-\frac{4\sin(x^3y^2)y}{(x^2+y^2)^3}.$$

En el origen debemos calcular la derivada parcial respecto de $x$ mediante el límite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$$

pero este cociente es nulo si $h\neq 0$, y en consecuencia el límite anterior también. Así

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0.$$

Lo mismo sucede con la derivada parcial respecto a $y$.

Pasamos a aplicar la definición de diferenciabilidad:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|\frac{sen(h^3k^2)}{(h^2+k^2)^2}-f(0,0)-(h,k)\cdot(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{h\to 0}\frac{\left|\frac{sen(h^3k^2)}{(h^2+k^2)^2}\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{sen(h^3k^2)}{(h^2+k^2)^{5/2}}$ ; el límite no existe, por lo tanto f(x,y) no es diferenciable en (0,0)

Rúbrica:

| Capacidades deseadas | Desempeño literal a) | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Inicial** | **En Desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelente** |
| El estudiante debe ser capaz de analizar la continuidad de una función escalar de varias variables y determinar diferenciabilidad en un punto dado. | No sabe cómo resolver a) o no aplica bien el teorema de sustitución | El estudiante aplica el teroema de sustitución y concluye bien a) pero tiene problemas para plantear y resolver las derivadas parciales o resuleve solo una de ellas. | El estudiante resuelve correctamente a) y b) pero no puede plantear la diferenciabilidad o comete errores en este proceso | El estudiante resuelve correctamente todo el ejercicio o comete algein error poco significativo. |
| | 0-2 | 3-10 | 11-20 | 21-25 |

**TEMA 4-1**

Sea $f(x,y,z) = z(x-y)^5 + xy^2z^3$

a) Calcular la derivada direccional de f en el punto $P_0 = (2,1,-1)$ en la dirección del normal unitario $\hat{u}$ exterior a la esfera $x^2+y^2+z^2=6$

b) Determine el valor máximo de la derivada direccional de f(x,y,z) en $P_0(2,1,-1)$

Como $f(x,y,z)$ es una función polinomial, entonces es diferenciable en $R^3$, se puede calcular la derivada direccional, que en el punto dado es:

$$D_{\hat{u}}f(2,1,-1) = \nabla f(2,1,-1)\cdot \hat{u}$$

Donde û es el vector normal unitario. Sea $G(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-6=0$.El vector û se calcula de la siguiente manera:

$$\hat{u} = \frac{\nabla G}{\|\nabla G\|},$$
$$\nabla G = \left(\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z}\right) = (2x, 2y, 2z) = 2(x,y,z)$$
$$\|\nabla G\| = 2\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Entonces

$\hat{u} = \frac{2(x,y,z)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} => \hat{u} = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ evaluado en el punto (2,1,-1) queda: $\hat{u} = \frac{(2,1,-1)}{\sqrt{6}}$

El gradiente es $\nabla f(x,y,z) = (5z(x-y)^4 + y^2z^3, -5z(x-y)^4 + 2xyz^3, (x-y)^5 + 3xy^2z^2)$

Evaluando en el punto

$$\nabla f(2,1,-1) = (-6,1,7)$$
$$D_{\hat{u}}f(2,1,-1) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-6,1,7)\cdot(2,1,-1) => D_{\hat{u}}f(2,1,-1) = -3\sqrt{6}$$

b) Para que la derivada direccional tenga un valor máximo, el vector unitario û tiene que estar en la misma dirección de la gradiente $\nabla f(2,1,-1)$ , es decir

$$\hat{u} = \frac{\nabla f(2,1,-1)}{\|\nabla f(2,1,-1)\|} = \frac{(-6,1,7)}{\sqrt{36+1+49}} \Rightarrow \hat{u} = \frac{(-6,1,7)}{\sqrt{86}}$$

El máximo valor es

$$D_{\hat{u}}f(2,1,-1) = \frac{1}{\sqrt{86}}(-6,1,7)\cdot(-6,1,7) \quad \Rightarrow> D_{\hat{u}}f(2,1,-1) = \sqrt{86}$$

Rúbrica:

| Capacidades deseadas | Desempeño literal a) | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Inicial** | **En Desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelente** |
| El estudiante debe ser capaz de determinar la derivada direccional de una función escalar de varias variables y hallar sus valores extremos | No sabe cómo plantear el problema | El estudiante plantea el concepto de derivada direccional en función del gradiente pero calcula mal el gradiente o el vector unitario. | Calculabien el gradiente y el vector unitario y desarrolla bien todo el literal a) pero tiene problemas para hallar el valor máximo de la derivada direccional en el punto solicitado. | El estudiante desarrolla correctamente el ejercicio o comete algún error poco significativo. |
| | 0 | 1-8 | 9-15 | 16-20 |

TEMA 4-2

Dada la función $g(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + 1) + e^{2xy}$. Determine:

a) La derivada direccional de la función en el punto $(x_0, y_0)$ en dirección del vector $\vec{U} = x_0 i - y_0 j$.

b) ¿cuál es el valor de tal derivada en los puntos: $(4,-4), (6,-6), (0,1)$.
?

c) Si la derivada puede llegar a superar el valor 2.

Primeramente, determinamos: $\begin{cases} g_x = \frac{2x}{x^2+y^2+1} + 2ye^{2xy} \\ g_y = \frac{2y}{x^2+y^2+1} + 2xe^{2xy} \end{cases}$

Claramente el vector unitario en dirección de $\vec{U}$ es $\frac{1}{\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}}(x_0 i - y_0 j)$

Luego se obtiene $\nabla g(x_0,y_0) = \left(g_x(x_0,y_0), g_y(x_0,y_0)\right)$. También resulta que,

a) $D_U f(x_0,y_0) = \nabla g(x_0,y_0) \cdot \frac{1}{\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}}(x_0,-y_0) = \frac{2({x_0}^2-{y_0}^2)}{{x_0}^2+{y_0}^2+1}$.

Por tanto;

b) $D_U f(4,-4) = D_U f(6,-6) = 0,\ D_U f(0,1) = -1.$

Note que:

c) $D_U f(x_0,y_0) = \frac{2({x_0}^2-{y_0}^2)}{{x_0}^2+{y_0}^2+1} \leq \frac{2x_0^2}{x_0^2+y_0^2+1} \leq \frac{2x_0^2}{x_0^2} = 2$. Así la derivada no supera el valor 2.

Rúbrica:

| Capacidades deseadas | Desempeño | | | |
|---|---|---|---|---|
| El estudiante debe ser capaz de entender sobre la utilidad del vector gradiente en el cálculo de derivadas direccionales. | **Inicial** | **En desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelente** |
| | El estudiante determina las derivadas parciales y el vector unitario de dirección. | Determina las derivadas parciales y el vector unitario de dirección**, para luego establecer con el gradiente la fórmula para la derivada direccional.** | Determina las derivadas parciales y el vector unitario de dirección, para luego establecer con el gradiente la fórmula para la derivada direccional, **consecuentemente calcula el valor de la derivada direccional en el punto $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$ respondiendo al literal a).** | Determina las derivadas parciales y el vector unitario de dirección, para luego establecer con el gradiente la fórmula para la derivada direccional, consecuentemente calcula el valor de la derivada direccional en el punto $(x_0, y_0)$ respondiendo al literal a), **de esta manera escribe una conclusión para el literal b), y empleando acotación básica de funciones racionales emite una conclusión para el literal c).** |
| | 1-4 | 5-9 | 10-13 | 14-20 |

TEMA 4-3

Determine los puntos sobre la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, de tal forma que el plano tangente en tales puntos sea paralelo al plano con ecuación

$$8x + 6y + 10z = 9.$$

Determinamos el vector normal al plano el cual es el gradiente evaluado en los puntos a determinar los que suponemos de la forma $(x_0, y_0, z_0), asi$:

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = (2x_0, 2y_0, 2z_0)$$

Claramente el vector normal al plano dado es $(4, 3,5)$, ya que los planos son paralelos nos proponemos a solucionar:

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda(8, 6,10)$$

Esto último implica que $(2x_0, 2y_0, 2z_0) = \lambda(8, 6,10)$, es decir

$$(x_0, y_0, z_0) = \lambda(4, 3,5).$$

Pero los puntos $(x_0, y_0, z_0)$ pertenecen a la superficie, por lo que $x_0{}^2 + y_0{}^2 + z_0{}^2 = 2$, y en este caso, $(\lambda 4)^2 + (\lambda 3)^2 + (\lambda 5)^2 = 2$, de donde despejando se obtiene que $\lambda^2 = 1/25$ o lo mismo que $|\lambda| = \frac{1}{5}$, así $\lambda = \frac{1}{5}$, o también $\lambda = -\frac{1}{5}$, es de esta forma que se obtienen dos puntos uno para cada valor de λ. Concluimos que los puntos pedidos son:

$$(x_0, y_0, z_0) = -1/5(4, 3,5).$$
$$(x_0, y_0, z_0) = 1/5(4, 3,5).$$

Rúbrica:

| **Capacidades deseadas** | **Desempeño** | | | |
|---|---|---|---|---|
| El estudiante debe ser capaz de entender sobre la utilidad del vector gradiente en la determinación de planos tangentes a superficies. | **Inicial** | **En desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelente** |
| | El estudiante determina las derivadas parciales y así el vector gradiente. | Determina las derivadas parciales y así el vector gradiente, **comprende el enunciado del ejercicio estableciendo una relación (a resolver) de paralelismo.** | Determina las derivadas parciales y así el vector gradiente, comprende el enunciado del ejercicio estableciendo una relación (a resolver) de paralelismo, **la que luego resuelve obteniendo dos soluciones.** | Determina las derivadas parciales y así el vector gradiente, comprende el enunciado del ejercicio estableciendo una relación (a resolver) de paralelismo, la que luego resuelve obteniendo dos soluciones, **las que usa para plantear la solución al problema dado.** |
| | 1-4 | 5-10 | 11-17 | 18-20 |

Tema 4-4

La superficie de una colina es descrita por la ecuación

$z = f(x, y) = 100 - \frac{5x^2}{100} - \frac{12y^2}{100}$, donde x, y, z están dados en metros.

El eje positivo $x$ señala hacia el norte y el eje positivo $y$ hacia el este. Un alpinista está parado en el punto (10,-10,83)

a) Si el alpinista camina hacia el noroeste. ¿Está ascendiendo o descendiendo? ¿A qué razón de cambio?
b) Si el alpinista camina hacia el suroeste. ¿Está ascendiendo o descendiendo? ¿A qué razón va cambio?
c) Si el alpinista quiere ascender siguiendo la máxima pendiente. ¿Qué dirección debe tomar? ¿Cuál es la razón de esta dirección?

Primeramente, obtenemos el gradiente de la función trayectoria.

$$\nabla f(x, y) = \left(-\frac{1}{10}x, -\frac{6}{25}y\right)$$

Así $\nabla f(10, -10) = \left(-1, \frac{12}{5}\right)$. Entonces:

a) Si el alpinista camina hacia el noroeste va en la dirección del vector $i + j$, cuya dirección unitaria es $\frac{\sqrt{2}}{2}(1,1)$, en este caso la derivada direccional es: $\nabla f(10, -10).\frac{\sqrt{2}}{2}(1,1) = \left(-1, \frac{12}{5}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}(1,1) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{7}{5}$

Ya que esta magnitud es positiva el alpinista está en ascenso a razón de $\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{7}{5}$, metros verticales sobre cada metro horizontal.

b) Si el alpinista camina hacia el sureste va en la dirección del vector $i - j$, cuya dirección unitaria es $\frac{\sqrt{2}}{2}(1, -1)$, en este caso la derivada direccional es:

$$\nabla f(10, -10).\frac{\sqrt{2}}{2}(1, -1) = \left(-1, \frac{12}{5}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}(1, -1) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{17}{5}.$$

Ya que esta magnitud es negativa el alpinista está en descenso a razón de $\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{17}{5}$, metros verticales sobre cada metro horizontal.

c) La magnitud del gradiente es la pendiente máxima y esta es $\frac{13}{5}$, así la dirección pedida es:

$$1/\frac{13}{5}\left(-1, \frac{12}{5}\right) = 1/13(-5,12).$$

Rúbrica:

| **Capacidades deseadas** | **Desempeño** | | | |
|---|---|---|---|---|
| El estudiante debe ser capaz de comprender sobre la utilidad del vector gradiente en el cálculo de derivadas direccionales. | **Inicial** | **En desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelente** |
| | El estudiante determina el vector gradiente en el punto dado. | El estudiante determina el vector gradiente en el punto dado, luego establece la dirección unitaria correspondiente al literal i) **usa el gradiente en conjunto con la fórmula de la derivada direccional y responde al literal a).** | El estudiante determina el vector gradiente en el punto dado, luego establece la dirección unitaria correspondiente al literal i) usa el gradiente en conjunto con la fórmula de la derivada direccional y responde al literal i). **Procede de manera similar al literal i) para así dar una repuesta al literal b).** | El estudiante determina el vector gradiente en el punto dado, luego establece la dirección unitaria correspondiente al literal i) usa el gradiente en conjunto con la fórmula de la derivada direccional y responde al literal i). Procede de manera similar al literal i) para así dar una repuesta al literal ii). **Finalmente manteniendo presente la relación entre gradiente y derivada direccional emite una repuesta al literal c).** |
| | 1-4 | 5-11 | 12-17 | 18-20 |

TEMA 5-1

Use la regla de la cadena para determinar las derivadas parciales indicadas cuando $x = 1, y = 2, t = 0$.

$a)$ $\frac{\partial U}{\partial r}$ b) $\frac{\partial U}{\partial s}$ c) $\frac{\partial U}{\partial t}$

$Donde$: $U(r,s) = \sqrt{r^2 + s^2}$ , $r = y + x\,cos(t)$, $s = x + ysen(t)$.

$a)$ $\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{r}{\sqrt{r^2+s^2}}$. Pero si $x = 1, y = 2, t = 0$, entonces, $r = 3$ también $s = 1$. Luego $\frac{\partial U}{\partial r}(3,2) = 3/\sqrt{10}$.

$b)$ $\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{s}{\sqrt{r^2+s^2}}$. Pero si $x = 1, y = 2, t = 0$, entonces, $r = 3$ también $s = 1$. Luego $\frac{\partial U}{\partial s}(3,2) = 1/\sqrt{10}$.

c )Tenemos que $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial t}$

También $\frac{\partial s}{\partial t} = y\,cos(t)$, $\frac{\partial r}{\partial t} = -xsen(t)$. Así $\frac{\partial s}{\partial t}(1,2,0) = 2$, $\frac{\partial r}{\partial t}(1,2,0) = 0$. Por lo tanto

$\frac{\partial U}{\partial t}(1,2,0) = \frac{\partial U}{\partial s}(3,2)\ \frac{\partial s}{\partial t}(1,2,0) + \frac{\partial U}{\partial r}(3,2)\ \frac{\partial r}{\partial t}(1,2,0) =$ $2/\sqrt{10}$ .

Rúbrica:

| El estudiante debe ser capaz de emplear la regla de la cadena para obtener derivadas de funciones de varias variables. | **Inicial** | **En desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelente** |
|---|---|---|---|---|
| | El estudiante determina la función derivada correspondiente al literal a). | El estudiante determina la función derivada correspondiente al literal a) la que evalúa bajo los valores dados. **De manera similar procede con el literal b).** | El estudiante determina la función derivada correspondiente al literal a) la que evalúa bajo los valores dados. De manera similar procede con el literal b). **Determina la función derivada correspondiente al literal c).** | El estudiante determina la función derivada correspondiente al literal a) la que evalúa bajo los valores dados. De manera similar procede con el literal b). Determina la función derivada correspondiente al literal c), **finalmente obtiene los valores de sus factores para así calcular** $\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial \boldsymbol{t}}(\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{0})$. |
| | 30% | 60% | 90% | 100% |

TEMA 5-2

Supongamos que todas las funciones dadas son derivables.

Si $z = f(x, y)$, donde $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

a) Encuentre $\frac{\partial z}{\partial r}$ , $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ .

b) Demuestre que

$$\left(\partial z/_{\partial x}\right)^2 + \left(\partial z/_{\partial y}\right)^2 = \left(\partial z/_{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\partial z/_{\partial \theta}\right)^2$$

Procedemos analizar calculo directo.

a) $\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}(\cos\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(\operatorname{sen}\theta)$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{d\theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\theta} = \frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin(\theta)) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta)).$$

b) $\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}\sin(\theta)\right)^2 =$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos(\theta)\right)^2 + 2\,\frac{\partial f}{\partial x}\frac{df}{dy}\sin(\theta)\cos(\theta) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\sin(\theta)\right)^2.$$

Por otra parte,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta)\right)^2 \text{ luego}$$

$\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}\sin(\theta)\right)^2 + 2\,\frac{\partial f}{\partial x}\frac{df}{dy}\sin(\theta)\cos(\theta) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\cos(\theta)\right)^2$

Por lo tanto,

$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 =$

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2(\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2.$

Por lo tanto, $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2$ .

Rúbrica:

| El estudiante debe ser capaz de emplear la regla de la cadena para obtener derivadas de funciones de varias variables. | **Inicial** | **En desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelente** |
|---|---|---|---|---|
| | El estudiante determina las derivadas correspondientes al literal a). | El estudiante determina las derivadas correspondientes al literal a). Para el literal b) **plantea el cuadrado de las derivadas los que resuelve.** | El estudiante determina las derivadas correspondientes al literal a). Para el literal b) plantea el cuadrado de las derivadas los que resuelve **y expresa una suma, la que opera.** | El estudiante determina las derivadas correspondientes al literal a). Para el literal b) plantea el cuadrado de las derivadas los que resuelve y expresa una suma, la que opera **y como consecuencia hace notar que la igualdad planteada es válida**. . |
| | 1-6 | 7-12 | 13-18 | 19-20 |

TEMA 5-3

Suponga que todas las funciones dadas son derivables.

Si $z = f(x, y)$, donde $x = s + t$ , $y = s - t$.

a) Encuentre $\frac{\partial z}{\partial r}$ , $\frac{\partial z}{\partial t}$ .

b ) Demuestre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t}.$$

c) Determine $\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t}$ si $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Determinamos de manera directa las derivadas solicitadas.

a) $\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}.$$

b) $\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$.

c ) Si $f(x, y) = x^2 + y^2$ entonces $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, también

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$. De esta manera resulta que $\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t} = 4(x^2 - y^2)$.

Rúbrica:

| El estudiante debe ser capaz de emplear la regla de la cadena para obtener derivadas de funciones de varias variables. | **Inicial** | **En desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelente** |
|---|---|---|---|---|
| | El estudiante determina las derivadas correspondientes al literal a). | El estudiante determina las derivadas correspondientes al literal a). Para el literal b) **plantea el producto de las derivadas del literal a) los que resuelve.** | El estudiante determina las derivadas correspondientes al literal a). Para el literal b) plantea el producto de las derivadas de literal a) el que resuelve **y expresa una suma, la que opera y como consecuencia hace notar que la igualdad planteada es válida**. | El estudiante determina las derivadas correspondientes al literal a). Para el literal b) plantea el producto de las derivadas de literal a) el que resuelve y expresa una suma, la que opera y como consecuencia hace notar que la igualdad planteada es válida. **Finalmente resuelve el literal c).** |
| | 1-6 | 4-12 | 13-18 | 19-20 |

TEMA 6-1

Determine una función escalar y un punto específico de modo que utilizando la diferencial pueda estimar el valor de:

$$\sqrt{(7.9)^2 + (15.2)^2}$$

Nota: al final del ejercicio debe dejar expresada su respuesta simplificada a su mínima expresión (ya que es prohibido utilizar calculadora)

La función es $F(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el punto es P(8,15) los incrementos son $\Delta x = 0{,}1$ , $\Delta y = -\ 0{,}25$

$$F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx F(x_0, y_0, z_0) + F_x\Delta x + F_y\Delta y$$

$$\sqrt{(7.9)^2 + (15.2)^2}$$
$$\approx \sqrt{(8)^2 + (15)^2} + \frac{2(8)}{2\sqrt{(8)^2 + (15)^2}} \cdot (0{,}1)$$
$$+ \frac{2(15)}{2\sqrt{(8)^2 + (15)^2}}(-0{,}2)$$
$$\approx 17 + \frac{(8)}{17} \cdot (0{,}1) + \frac{(15)}{17}(-0{,}2)$$
$$\approx 17 + \frac{(8)}{17} \cdot \frac{1}{10} + \frac{(15)}{17}(-\frac{1}{5})$$
$$\approx 17 + \frac{(8)}{170} - \frac{(30)}{170} = \frac{170^2 - 22}{170}$$

Rúbrica:

| Capacidades deseadas | Desempeño | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Inicial | En Desarrollo | Desarrollado | Excelente |
| El estudiante debe ser capaz de aplicar el concepto de diferencial para aproximar funciones escalares | No sabe cómo plantear el problema | El estudiante plantea la expresión de aproximación pero tiene problemas con escoger el punto y obtener los incrementos | El estudiante plantea la expresión de aproximación, escoge el punto y obtener los incrementos pero tiene problemas al hallar las derivadas | El estudiante calcula correctamente y llega al resultado correcto o comete algún error no significativo |
| | 0 | 1-4 | 5-12 | 13-15 |

TEMA 6-2

Calcule el diferencial dz en la ecuación: xyz=x+y+z

Consideramos la función: $F(x, y, z) = xyz - x - y - z$

Hallamos las derivadas parciales

$$F_x = yz - 1 \quad F_y = xz - 1 \quad F_z = xy - 1$$

Con lo cual

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1 - yz}{xy - 1} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1 - xz}{xy - 1}$$

Con lo que resulta:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial} dy = \frac{(1 - yz)\, dx + (1 - xz)\, dy}{xy - 1}$$

| **Capacidades deseadas** | **Desempeño** | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Inicial** | **En Desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelente** |
| El estudiante debe ser capaz de calcular el diferencial de una función implícita de varias variables | No sabe cómo plantear el problema | El estudiante reconoce la función implícita, pero tiene problemas al obtener sus derivadas parciales | El estudiante reconoce la función implícita, obtiene correctamente todas las derivadas parciales, pero no sabe como obtener el diferencial solicitada | El estudiante calcula correctamente las derivadas parciales y llega al resultado correcto del deiferencial o comete algún error no significativo |
| | 0 | 1-6 | 7-12 | 13-15 |

TEMA 6-3

Calcular las derivadas parciales:

$$\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}$$

A partir de: $3x^2 - x^2y^2 + 2z^3 + 3yz - 5 = 0$

Tenemos: $F(x, y, z) = 3x^2 z - x^2 y^2 + 2z^3 + 3y\,z - 5$

hallamos las derivadas parciales:

$$F_x = 6xz - 2xy^2 \; ; \; F_y = -2x^2 y + 3z \; ; \; F_z = 3x^2 + 6z^2 + 3y$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-F_x}{F_z} = \frac{-6xz + 2xy^2}{3x^2 + 6z^2 + 3y} \; ; \; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-F_y}{F_z} = \frac{2x^{2y} - 3z}{3x^2 + 6z^2 + 3y}$$

Rúbrica:

| **Capacidades deseadas** | **Desempeño** | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Inicial** | **En Desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelente** |
| El estudiante debe ser capaz de obtener derivadas parciales a partir de una función implícita de varias variables | No sabe cómo plantear el problema | El estudiante reconoce la función implícta pero tiene problemas al obtener sus derivadas parciales | El estudiante reconoce la función implícita, obtiene correctamente todas las derivadas parciales, pero tiene problemas al obtener las derivadas parciales solicitadas | El estudiante calcula correctamente lo solicitado y llega al resultado correcto de ambas derivadas parciales o comete algún error no significativo |
| | 0 | 1-6 | 7-12 | 13-15 |