Primer tema - a

Cambiar el orden en la siguiente integral:

$$\int_{-6}^{2}\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)\ dy\ dx$$

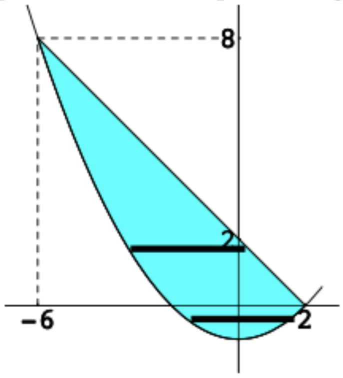
NOTA: Usted debe obligatoriamente seguir los siguientes pasos:

1. Analizar el tipo de barrido original

2. Representar gráficamente la región original de integración en el plano

3. Plantear la integral(es) con el nuevo barrido

Se trata de la región comprendida entre la parábola $y = x^2/4 - 1$ y la recta $y = 2 - x$.



Al invertir el orden de integración, la integral se descompone así:

$$I = \int_{-1}^{0} dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y)\,dx + \int_{0}^{8} dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x,y)\,dx.$$

Primer tema - b

Cambiar el orden en la siguiente integral:

$$\int_{0}^{3}\int_{\frac{4x}{3}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)\ dy\ dx$$

NOTA: Usted debe obligatoriamente seguir los siguientes pasos:

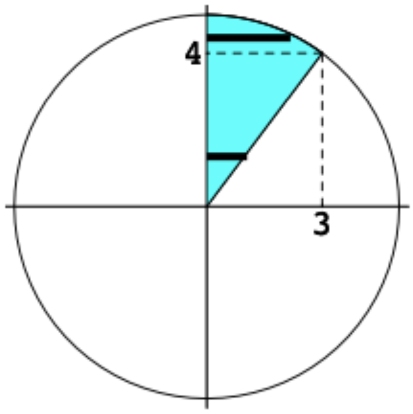
1. Analizar el tipo de barrido original

2. Representar gráficamente la región original de integración en el plano

3. Plantear la integral(es) con el nuevo barrido

La región de integración, indicada en la figura, es la que verifica el sistema

$$0 \leq x \leq 3, \; 4x/3 \leq y \leq \sqrt{25 - x^2}.$$



Como el punto $(3, 4)$ es la intersección entre la circunferencia y la recta, la nueva integral se escribirá como

$$\int_0^3 dx \int_{4x/3}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)\,dy = \int_0^4 dy \int_0^{3y/4} f(x,y)\,dx + \int_4^5 dy \int_0^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

Rúbrica:

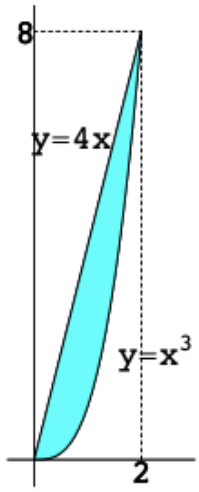
Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante entiende la estructura de una integral doble y sabe como invertir el orden de integración.	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No puede interpretar la integral y/o no puede graficar correctamente la región de integración.	Interpreta correctamente la integral y bosqueja la región de integración.	Establece correctamente las 3 integrales requeridas e barrido horizontal o comete errores en los límites de integración respectivos.	Resuelve correctamente el ejercicio entregando las tres integrales requeridas para el barrido horizontal.
	0-5	6-9	10-14	15

Segundo tema - a

Calcular la siguiente integral doble:

$$\int_{0}^{8}\int_{\frac{y}{4}}^{-1} e^{x^2}\ dx\ dy$$

La región de integración es la que se ilustra en la figura adjunta.



Intercambiando el orden de integración se obtiene

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 dx \int_{x^3}^{4x} e^{x^2} dy = \int_0^2 (4xe^{x^2} - x^3 e^{x^2})\, dx \\ &= 2e^{x^2}\Big|_0^2 - \frac{x^2}{2} e^{x^2}\Big|_0^2 + \int_0^2 x e^{x^2} dx = \frac{e^4}{2} - \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

(Aplicar el método de integración por partes en la segunda integral.)

Segundo tema - b

Calcular la siguiente integral doble:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y}\ dx\ dy$$

Calculamos primero la integral respecto a la variable y:

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y}\, dy = \int_{-1}^{1} e^{x+y}\Big|_{-2|x|}^{|x|} dx = \int_{-1}^{1} (e^{x+|x|} - e^{x-2|x|})\, dx.$$

Ahora descomponemos la integral simple en suma de dos integrales para sustituir el valor absoluto:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \left(e^{x+|x|} - e^{x-2|x|}\right) dx &= \int_{-1}^{0} (1 - e^{3x})\, dx + \int_{0}^{1} (e^{2x} - e^{-x})\, dx \\
&= \left(x - \frac{1}{3}\, e^{3x}\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(\frac{1}{2}\, e^{2x} + e^{-x}\right)\Bigg|_{0}^{1} \\
&= -\frac{5}{6} + \frac{1}{3}\, e^{-3} + \frac{1}{2}\, e^{2} + e^{-1}.
\end{aligned}$$

Rúbrica:

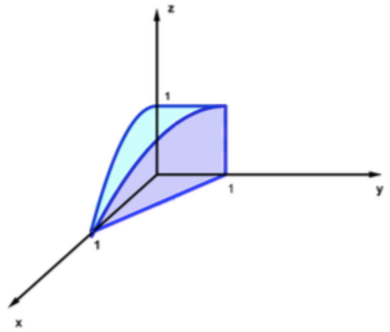
Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante entiende la estructura de una integral doble y sabe como calcularla	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No puede interpretar correctamente la integral ni la región de integración respectiva	Interpreta correctamente la integral pero bosqueja mal la región de integración o comete errores en los límites de integración	Interpreta correctamente la integral, bosqueja bien la región de integración pero tiene problemas para operar el integrando o calcular la integral doble	Resuelve correctamente el ejercicio bosquejando la región de integración, operando el integrando y calculando la integral doble
	0-3	4-7	8-14	15

Tercer tema - a

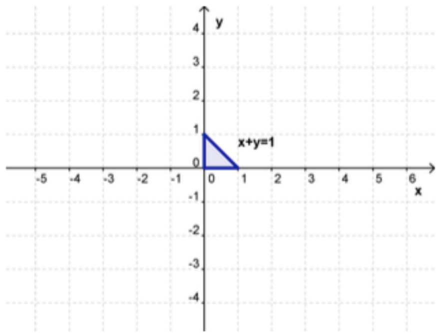
Sea Q la región del espacio que está en el primer octante limitada por las gráficas de las superficies con ecuaciones: $x + y = 1$; $z = 1 - x^2$

a) **Bosqueje la región tridimensional Q**
b) **Calcule el volumen del sólido Q utilizando integrales triples**

a) La ecuación $x + y = 1$ corresponde a la ecuación de un plano que se extiende paralelamente al eje *z*, y $z = 1 - x^2$ corresponde a la ecuación de una superficie que se extiende paralelamente al eje *y*, e interseca al plano *xz* en la parábola de ecuación $z = 1 - x^2$. El sólido *Q* es la parte del sólido limitado por ambas superficies que está en el primer octante.



b) La proyección en el plano *xy* de *Q* es el triángulo limitado por las rectas de ecuaciones $x + y = 1$, $x = 0$ y $y = 0$.



Por lo tanto,

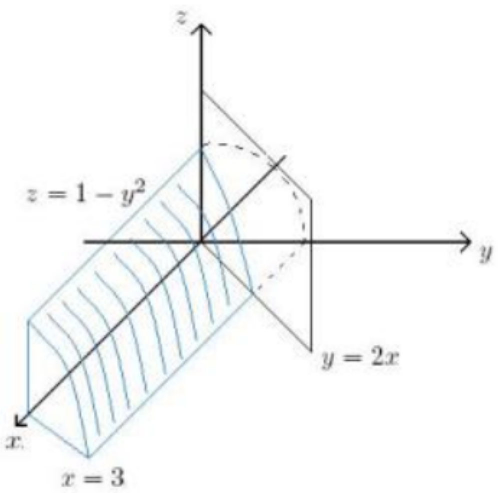
$$V = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x^2} dz\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(1 - x^2\right) dy dx = \int_0^1 \left(1 - x^2\right)\left(1 - x\right) dx = \int_0^1 \left(1 - x - x^2 + x^3\right) dx =$$

$$= \left[x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

Tercer tema - b

Sea D la región del espacio que está en el primer octante limitada por las gráficas de las superficies con ecuaciones: $x = 3$; $y = 2x$; $z = 1 - y^2$

a) **Bosqueje la región tridimensional D**
b) **Calcule el volumen del sólido D utilizando integrales triples**



La integración con respecto a z sería de $0 \leq z \leq 1 - y^2$

la proyección en el el plano xy es del tipo II

$\frac{y}{2} \leq x \leq 3$

$0 \leq y \leq 1$

$$\iiint_D dv = \int_0^1 \int_{\frac{y}{2}}^3 \int_0^{1-y^2} dzdxdy = \int_0^1 \int_{\frac{y}{2}}^3 1 - y^2 dxdy = \int_0^1 x - xy^2 \Big|_{\frac{y}{2}}^3 dy =$$

$$= \int_0^1 3 - 3y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y^3 dy = 3y - y^3 - \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{8}y^4 \Big|_0^1 = \frac{15}{8}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe bosquejar una región tridimensional de integración y calcular el volumen de un sólido	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	Bosqueja mal el escenario del ejercicio y/o no detemina bien la proyección sobre el plano XY	Bosqueja correctamente la región tridimensional, determina bien la proyección pero tiene problemas para establecer la integral triple	Desarrolla bien el ejercicio hasta plantear la integral triple pero comete errores en su resolución	Resuelve correctamente todo el ejercicio respetando los pasos requeridos y obteniendo el valor correcto de la integral doble
	0-5	6-10	11-14	15

Cuarto tema - a

Calcule la integral $\int\int_R (x^2 + y^2)\, dA$ mediante un cambio de variable apropiado, si R es el cuadrado de vértices (2,0), (0,2), (-2,0) y (0,-2)

Los puntos $(2,0)$, $(0,2)$ quedan sobre la recta de ecuación $x + y = 2$, ¿por qué?

Los puntos $(-2,0)$ y $(0,2)$ quedan sobre la recta de ecuación $y - x = 2$, ¿por qué?

Los puntos $(-2,0)$ y $(0,-2)$ quedan sobre la recta de ecuación $x + y = -2$, ¿por qué?

Los puntos $(0,-2)$ y $(2,0)$ quedan sobre la recta de ecuación $x - y = 2$, ¿por qué?

Si hacemos el cambio de variable $x + y = u$ y $y - x = v$, despejando *x* y *y* en términos de *u* y *v* se obtiene $x = \frac{u-v}{2}$ y $y = \frac{u+v}{2}$,

La recta de ecuación $x + y = 2$ se transforma en $u = 2$

La recta de ecuación $y - x = 2$ se transforma en $v = 2$

La recta de ecuación $x + y = -2$ se transforma en $u = -2$

La recta de ecuación $x - y = 2$ se transforma en $v = -2$

La imagen de la región *R*, bajo la transformación dada es el cuadrado *S* de vértices $(2,2)$, $(-2,2)$, $(-2,-2)$ y $(2,-2)$.

Por otra parte $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Por lo tanto,

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_S f(x(u,v), y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\, dv = \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\left(\left(\frac{u-v}{2}\right)^2 + \left(\frac{u+v}{2}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}\right)dv\, du$$

$$= \frac{1}{8}\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\left(2u^2 + 2v^2\right)dv\, du = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\left(u^2 + v^2\right)dv\, du = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2}\left(u^2 v + \frac{v^3}{3}\right)_{-2}^{2} du = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2}\left(4u^2 + \frac{16}{3}\right)du =$$

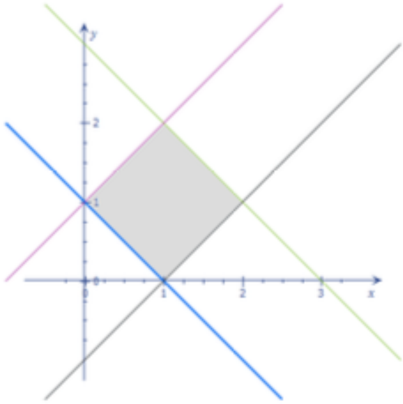
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{4}{3}u^{3}{}' + \frac{16}{3}u\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{3}\left[(8+8) + (8+8)\right] = \frac{32}{3}$$

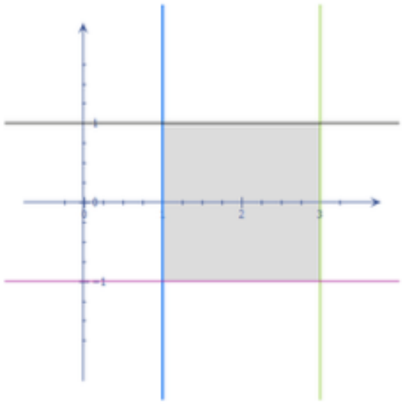
Cuarto tema - b

Calcule la integral $\int\int_R\ (x + y)^2\, sen^2\, (x - y)\, dx\, dy$ mediante un cambio de variable apropiado, si R es el cuadrado de vértices (0,1), (1,2), (2,1) y (1,0)

El recinto R está limitado por las rectas $x + y = 1$, $x + y = 3$, $x - y = -1$, $x - y = 1$

Junto con la presencia de los términos $x+y$ y $x-y$ en el integrando, esto sugiere efectuar el cambio de variables $u = x+y$, $v = x-y$.





El inverso de este cambio está dado por las ecuaciones $x = (u+v)/2$, $y = (u-v)/2$, cuyo jacobiano en valor absoluto es $|J(u,v)| = 1/2$, mientras que el nuevo recinto de integración viene determinado por las condiciones $1 \leq u \leq 3$, $-1 \leq v \leq 1$. Consecuentemente,

$$\iint_R (x+y)^2 \operatorname{sen}^2(x-y)\, dx\, dy =$$
$$= \frac{1}{2}\int_1^3 u^2\, du \int_{-1}^1 \operatorname{sen}^2 v\, dv = \frac{26}{12}\int_{-1}^1 (1-\cos 2v)\, dv = \frac{13}{6}\left[v - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2v\right]_{-1}^1 = \frac{13}{6}(2-\operatorname{sen} 2)$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
El estudiante sabe calcular una integral doble mediante un cambio de variables adecuado	No puede establecer bien la región de integración original ni escoger un cambio de variables adecuado	Establece bien la región de integración original, escoge bien el cambio de variables, pero comete errores al calcular el Jacobiano o plantear la nueva región de integración	Desarrolla bien el ejercicio hasta calcular el Jacobiano pero plantea mal la integral final o comete errores al calcularla	Resuelve correctamente todo el ejercicio respetando los pasos requeridos y obteniendo el valor de la integral doble solicitada.
	0-4	5-10	11-14	15

Quinto tema

Para una industria de software la función de producción de Cobb-Douglas está dada por: $f(x,y) = 100\, x^{3/4}\, y^{1/4}$, donde x representa las unidades de trabajo a \$ 150 por unidad y y representa las unidades de capital a \$ 250 por unidad. El costo total de trabajo y capital está limitado a \$ 50.000 . Utilizando multiplicadores de Lagrange determine el nivel máximo de producción de este fabricante.

$$max\ f(x,y) = 100x^{3/4}y^{1/4}$$
$$s.a\ g(x,y) = 150x + 250y = 50{,}000$$

Aplicar la función lagrangeana $\mathcal{L}\ (x, y, \lambda) = f\ (x, y) + \lambda\ (c - g\ (x, y))$ para resolver:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = 100x^{3/4}y^{1/4} + \lambda\big(50{,}000 - (150x + 250y)\big)$$
$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = 100x^{3/4}y^{1/4} + \lambda(50{,}000 - 150x - 250y)$$
$$\mathcal{L}_x = 100\left(\frac{3}{4}\right)x^{-1/4}y^{1/4} - 150\lambda = 0 \Leftrightarrow 75x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} - 150\lambda = 0 \quad (1)$$
$$\mathcal{L}_y = 100\left(\frac{1}{4}\right)x^{3/4}y^{-3/4} - 250\lambda = 0 \Leftrightarrow 25x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}} - 250\lambda = 0 \quad (2)$$
$$\mathcal{L}_\lambda = -150x - 250y + 50{,}000 = 0 \Leftrightarrow 150x + 250y - 50{,}000 = 0 \quad (3)$$

Resolviendo para λ en (1):

$$75x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} - 150\lambda = 0 \Leftrightarrow 150\lambda = 75x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow \lambda = \frac{75x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}}{150} = \frac{x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}}{2}$$
$$\lambda = \frac{x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}}{2} \quad (4)$$

Resolviendo para λ en (2):

$$25x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}} - 250\lambda = 0 \Leftrightarrow 250\lambda = 25x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}} \Leftrightarrow \lambda = \frac{25x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}}}{250}$$
$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}}}{10} \quad (5)$$

Se iguala (4) y (5):

$$\frac{x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}}{2} = \frac{x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}}}{10} \Leftrightarrow \frac{10y^{\frac{1}{4}}}{y^{-\frac{3}{4}}} = \frac{2x^{\frac{3}{4}}}{x^{-\frac{1}{4}}} \Leftrightarrow 10y^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 2x^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} \Leftrightarrow 10y^{\frac{4}{4}} = 2x^{\frac{4}{4}}$$

$$\Leftrightarrow 10y = 2x \Leftrightarrow x = 5y \quad (6)$$

Sustituyendo (6) en (3), se tiene

$$150(5y) + 250y = 50{,}000 \Leftrightarrow 750y + 250y = 50{,}000 \Leftrightarrow 1{,}000y = 50{,}000$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{50{,}000}{1{,}000} = 50$$

Se sustituye $y = 50$ en (6): $x = 50(50) = 250$

Finalmente:

$f(250{,}50) = 100\ (250)^{3/4}\ (50)^{1/4}$ unidades de producto

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe aplicar los conceptos de optimización para resolver un problema de economía con restricción	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	Tiene problemas para identificar función objetivo, restricción o función langragiana	Identifica bien la función objetivo, restricción, función langragiana pero no puede resolver correctamente el sistema algebraico	Resuelve coorectamente todo lo anterior pero tiene problemas intepretar y obtener el dato solicitado	Resuelve correctamente todo el ejercicio respetando los pasos requeridos y obteniendo el valor del nivel máximo de producción
	0-5	6-14	15-24	15