

## PRIMER TEMA

Considere el camino formado por: el segmento de la elipse  $3x^2 + 2y^2 = 6$  en el primer cuadrante, el segmento de recta que va desde el punto  $(0, 3)$  hasta el origen y el segmento de recta que va desde el origen hasta el punto  $(2, 0)$ .

Compruebe el Teorema de Green para el trabajo generado por el campo vectorial:

$$\vec{F}(x, y) = [2y - 3x, \quad 3x - 2y]$$

Al recorrer la curva  $C$  en sentido positivo.

Aplicando el teorema de Green:

Sea  $C$  la curva formada con los segmentos indicados en el enunciado.

Como  $C$  es cerrada, suave a trozos y  $\vec{F}(x, y)$  es clase  $C^1$  en la una región abierta que encierra de  $C$ , se cumple con las hipótesis del teorema de Green; entonces se define una región  $D \in \mathbb{R}^2$  tal que su frontera es  $C$ , véase Figura 1, y se cumple que:

$$\oint_{C=\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} dA$$

Donde  $\partial D$  significa la frontera de la región  $D$ ;  $M$  y  $N$  son las componentes del campo vectorial  $\vec{F}(x, y)$ .

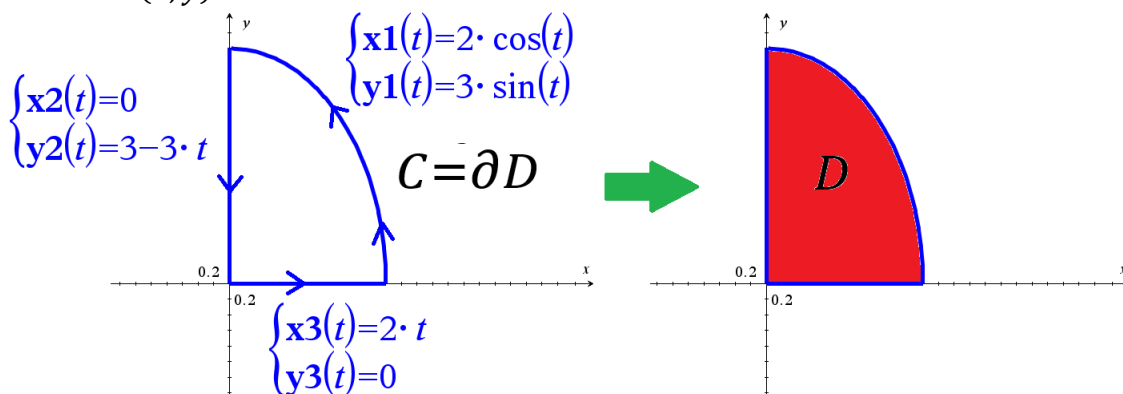


Figura 1. La curva cerrada y suave a trozos  $C$  encierra una región  $D$ , en la región  $D$  el campo vectorial  $F$  cumple las hipótesis del teorema de Green

En la integral doble:

$$\begin{aligned} & \iint_D \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} dA \\ &= \iint_D \frac{\partial}{\partial x} (3x - 2y) - \frac{\partial}{\partial y} (2y - 3x) dA = \iint_D 1 dA = A(D) = \frac{1}{4} \pi (2)(3) = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

Si se usa el cambio a coordenadas polares generalizadas:

$$= \iint_D 1 dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 6 r dr d\theta = 6 \frac{r^2}{2} \Big|_0^1 \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \quad \begin{cases} x = 2 r \cos \theta \\ y = 3 r \sin \theta \\ J = (2)(3)r \end{cases}$$

Usando la definición de integral de línea.

Los segmentos que forman a la curva  $C$  se parametrizan tal como se muestra en la Figura 1, y sus intervalos de parametrización son:

$$r_1(t) = [2 \cos(t), \quad 3 \sin(t)]; \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$r_2(t) = [0, \quad 3 - 3t]; \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$r_3(t) = [2t, 0]; \quad 0 \leq t \leq 1$$

Se calcula cada integral de línea:

$$\oint_{C=\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{r_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\int_{r_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [6 \sin(t) - 6 \cos(t), \quad 6 \cos(t) - 6 \sin(t)] \cdot [-2 \sin(t), \quad 3 \cos(t)] dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 30 \cos^2(t) - 6 \sin(t) \cos(t) - 12 dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 15(1 + \cos(2t)) - 3 \sin(2t) - 12 dt = \frac{3\pi}{2} - 3$$

$$\int_{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 [-6t + 6, \quad 6t - 6] \cdot [0, \quad -3] dt = \int_0^1 -18t + 18 dt = -9t^2 + 18t \Big|_0^1 = 9$$

$$\int_{r_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 [-6t, \quad 6t] \cdot [2, \quad 0] dt = \int_0^1 -12t dt = -6t^2 \Big|_0^1 = -6$$

$$\oint_{C=\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{3\pi}{2} - 3 + 9 - 6 = \frac{3\pi}{2}$$

	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
El estudiante sabe aplicar el teorema de Green y realizar su comprobación por medio de integrales de línea	No puede establecer correctamente el Teorema de Green ni las integrales de línea requeridas	Establece correctamente el Teorema de Green y las tres integrales de línea pero no resuelve correctamente ninguno de los dos métodos	Resuelve correctamente uno de los dos métodos pero comete errores en uno de ellos	Resuelve correctamente ambos métodos y comprueba la igualdad de la respuesta.
	0-5	6-15	16-24	25

## SEGUNDO TEMA

Una partícula da una vuelta moviéndose sobre la curva  $r(t)$ :

$$r(t) = [x(t), y(t)] = [2 \cos(t), 2 \sin(t)]; 0 < t \leq 2\pi$$

Esta curva está en el plano, donde también actúa la función:

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

Demuestre que en todos los puntos sobre los que se mueve la partícula, el valor de la máxima variación de la función  $f(x, y)$  es igual a  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

El gradiente de la función  $f(x, y)$ :

$$\nabla f(x, y) = \left[ \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} \right]$$

El gradiente en cada punto de la curva está dado por:

$$\nabla f(r(t)) = \nabla f(x(t), y(t))$$

$$= \left[ \frac{-2 \cos(t)}{\sqrt{9 - (2 \cos(t))^2 - (2 \sin(t))^2}}, \frac{-2 \sin(t)}{\sqrt{9 - (2 \cos(t))^2 - (2 \sin(t))^2}} \right]$$

$$= \left[ \frac{-2 \cos(t)}{\sqrt{5}}, \frac{-2 \sin(t)}{\sqrt{5}} \right]$$

El valor de la máxima variación de  $f(x, y)$  es el módulo del gradiente:

$$\|\nabla f(r(t))\| = \left\| \left[ \frac{-2 \cos(t)}{\sqrt{5}}, \frac{-2 \sin(t)}{\sqrt{5}} \right] \right\|$$

$$= \sqrt{\left(\frac{-2 \cos(t)}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{-2 \sin(t)}{\sqrt{5}}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Este es el valor de la máxima variación en los puntos de la curva  $r(t)$ , es constante y no depende de  $t$ , i.e. es el mismo en todos los puntos de la curva.

Capacidades deseadas	Desempeño literal			
	Inicial	En Desarrollo	Desarrollado	Excelente
El estudiante debe ser capaz de aplicar el gradiente de una función para obtener el valor de máxima variación de una función	No sabe cómo obtener el gradiente de la función	Calcula correctamente el gradiente de la función pero comete errores al generalizarlo para cada punto de la curva	Deduce que el valor de máxima variación es el módulo del vector gradiente pero lo calcula mal	El estudiante desarrolla en forma correcta todo el ejercicio y demuestra lo solicitado
	0-3	4-8	9-14	15

### TERCER TEMA

Considere el paraboloides de ecuación:

$$z = a(x^2 + y^2); a \in \mathbb{R}^+$$

Utilice  $a=2$ .

Considere la recta  $L_1$  que es una recta paralela al eje  $z$  y que pasa por el punto  $(1, 1, 5)$ .

Considere la recta  $L_2$  que es normal al paraboloides y que inicia desde el punto de intercepción entre la recta  $L_1$  y el paraboloides.

Encuentre el punto en que la recta  $L_2$  intercepta al eje  $z$ .

La recta  $L_1(t) = [2, 3, 5 + t]; t \in \mathbb{R}$

La intercepción entre la recta  $L_1$  y el paraboloides:

$$5 + t = 2(2^2 + 3^2) \Rightarrow t = 21$$

Punto de intercepción:  $(2, 3, 26)$

La recta  $L_2$  inicia en el punto  $(2, 3, 26)$  y es normal al paraboloides; el vector normal al paraboloides en el punto  $(2, 3, 26)$  es:

$$N = \left[ -\frac{\partial z}{\partial x} \quad -\frac{\partial z}{\partial y} \quad 1 \right] = [-4x \quad -4y \quad 1] |_{(2, 3, 26)} = [-8 \quad -12 \quad 1]$$

La recta  $L_2(t) = (2, 3, 26) + [-8 \quad -12 \quad 1]t = [2 - 8t \quad 3 - 12t \quad 26 + t]$

La intercepción de la recta  $L_2(t)$  con el eje  $z$ :

$$[2 - 8t \quad 3 - 12t \quad 26 + t] = (0, 0, k)$$

$$\begin{cases} 2 - 8t = 0 \\ 3 - 12t = 0 \\ 26 + t = k \end{cases} \Rightarrow t = \frac{1}{4}; k = \frac{105}{4}$$

Punto de intercepción:  $(0, 0, \frac{105}{4})$

	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
El estudiante sabe aplicar la teoría de planos y rectas relativos a una superficie	No sabe como obtener el parámetro t producto de la intersección de la recta 1 con la superficie	Obtiene correctamente el parámetro t, el punto de intersección de la recta 1 con la superficie pero tiene problemas al calcular el vector normal al paraboloides	Desarrolla bien todo lo anterior pero comete errores al analizar la intersección de la recta 2 con el paraboloides o calcula mal el punto de intersección solicitado	El estudiante desarrolla en forma correcta todo el ejercicio y obtiene el punto solicitado
	0-3	4-8	9-14	15

#### CUARTO TEMA

Considera las superficies:

$$S_1: z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

$$S_2: x = y$$

$$S_3: x = \frac{\sqrt{3}}{3}y$$

Sea Q el volumen acotado las superficies  $S_1, S_2, S_3$  en el primer octante.

Determine el valor de  $a$  tal que:

$$V(Q) = \pi$$

Usando el sistema cilíndrico, las variables se comportan según los mostrados en la Figura 2.

$$\begin{aligned}
 V(Q) &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - r^2}} r dz dr d\theta = \theta \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} r dr \\
 &= \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} r dr \quad \left[ \begin{array}{l} u = a^2 - r^2 \\ du = -2r dr \\ \frac{du}{-2} = r dr \\ u(0) = a^2 \\ u(a) = 0 \end{array} \right] = \frac{\pi}{12} \int_0^{a^2} \sqrt{u} \frac{du}{2} = \frac{\pi}{24} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^{a^2} = \frac{\pi}{36} a^3 \\
 V(Q) &= \frac{\pi}{36} a^3 \Rightarrow \pi = \frac{\pi}{36} a^3 \Rightarrow a = \sqrt[3]{36}
 \end{aligned}$$

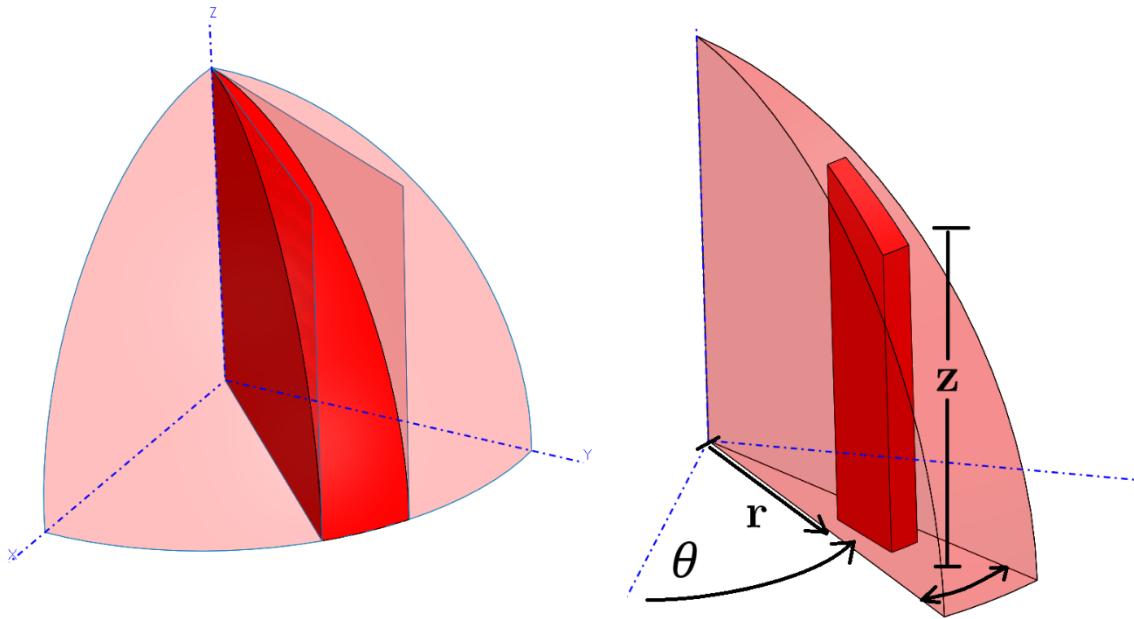


Figura 2. Uso del sistema cilíndrico

Usando el sistema esférico, las variables se comportan según los mostrados en la XXX.

$$\begin{aligned}
 V(Q) &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \rho^2 \sin \phi \, d\rho d\phi d\theta = \theta \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left. \frac{\rho^3}{3} \right|_0^a - \cos \phi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{12} \frac{a^3}{3} (-0 + 1) \\
 &= \frac{\pi}{36} a^3 \\
 V(Q) &= \frac{\pi}{36} a^3 \Rightarrow \pi = \frac{\pi}{36} a^3 \Rightarrow a = \sqrt[3]{36}
 \end{aligned}$$

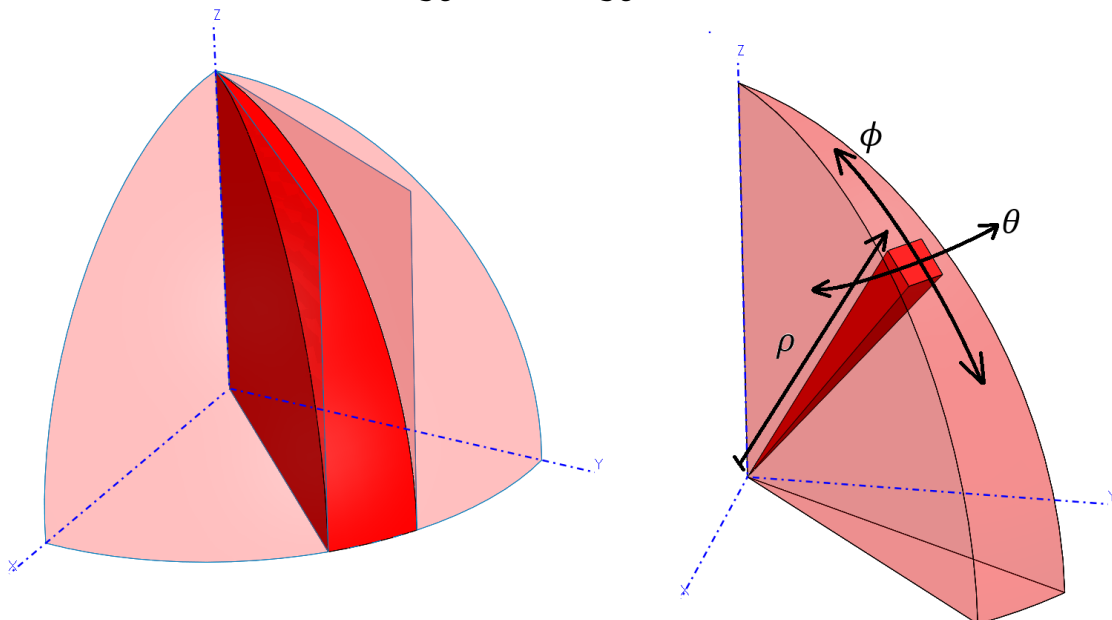


Figura 3. Uso del sistema esférico

	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
El estudiante sabe como calcular el volumen limitado por superficies en coordenadas cilíndricas o esféricas	No sabe como plantear el ejercicio en ninguno de los dos sistemas	Bosqueja el escenario tridimensional del ejercicios y plantea la integral triple en cualquiera de los dos sistemas	Desarrolla lo anterior pero comete errores en el cálculo de la integral y no llega a la respuesta deseada	El estudiante desarrolla en forma correcta todo el ejercicio y demuestra lo solicitado
	0-3	4-8	9-14	15

## QUINTO TEMA

Sea  $C$  una curva dada por  $\vec{r}(t) = \left( \frac{(1+t)^{3/2}}{3}, \frac{(1-t)^{3/2}}{3}, \frac{t}{\sqrt{2}} \right)$ , con  $t \in I \subset \mathbb{R}$

a) Determinar el mayor intervalo  $I$  en el cual la curva  $C$  es regular.

b) Calcular  $L(C)$ , longitud de  $C$ , si  $t \in I$

c) Obtener el vector  $\hat{T}$  en el punto  $P_0 = \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0 \right)$  y sabiendo que el vector

binormal en  $t=0$  es :  $\hat{B}(0) = \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$  calcule  $\hat{N}$ .

a) El intervalo  $I$  debe cumplir  $1+t \geq 0$   $1-t \geq 0 \Rightarrow -1 \leq t \leq 1$

Y Para que la curva  $C$  sea regular se tiene que cumplir que:  $\vec{r}'(t) \neq (0,0,0)$

$$\vec{r}'(t) = \left( \frac{(1+t)^{1/2}}{2}, -\frac{(1-t)^{1/2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \neq (0,0,0)$$

Por tanto,  $C$  es regular, y el intervalo es:  $I = [-1,1]$

b) Dado que  $t \in [-1,1]$ , entonces la longitud de la curva está dada por la expresión

$$L(C) = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt, \quad t \in [a, b]$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{\left(\frac{(1+t)^{1/2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{(1-t)^{1/2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1+t}{4} + \frac{1-t}{4} + \frac{1}{2}}$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = 1$$

Por tanto

$$L(C) = \int_{-1}^1 dt, t \in [-1,1]$$

$$L(C) = 2$$

c) Primero, obtendremos el punto  $t_0$  tal que  $\vec{r}(t_0) = P_0$

$$\vec{r}(t_0) = \left( \frac{(1+t_0)^{3/2}}{3}, \frac{(1-t_0)^{3/2}}{3}, \frac{t_0}{\sqrt{2}} \right) = \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0 \right)$$

Es decir

$$\frac{(1+t_0)^{3/2}}{3} = \frac{1}{3}, \quad \frac{(1-t_0)^{3/2}}{3} = \frac{1}{3},$$

Entonces  $\frac{t_0}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow t_0 = 0$

Para calcular los vectores calculamos primero

las normas  $\|\vec{r}'(0)\| = 1, \quad \|\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0)\| = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

Luego

$$\hat{T}(0) = \frac{\vec{r}'(0)}{\|\vec{r}'(0)\|} \Rightarrow \hat{T}(0) = \left( \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Para  $\hat{N}$  usamos el dato dado:

$$\hat{N}(0) = \hat{B}(0) \times \hat{T}(0) \Rightarrow \hat{N}(0) = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$$

Capacidades deseadas	Desempeño literal			
	Inicial	En Desarrollo	Desarrollado	Excelente
El estudiante debe ser capaz de aplicar las fórmulas de geometría vectorial	No sabe cómo plantear el problema o se confunde a la hora de aplicar las fórmulas.	Aplica las fórmulas para calcular los elementos, pero COMETE ERRORES	Aplica correctamente las fórmulas, pero no llega a los resultados correctos	El estudiante calcula en forma correcta y expresa la respuesta de forma clara
	0-3	4-8	9-14	15

## SEXTO TEMA

Empleando una transformación adecuada, evalué la integral  $\iint_D \frac{y^2}{x^2} \sin(\pi xy) dA$ , donde  $D$  es la región en el primer cuadrante encerrado por las hipérbolas  $xy = 1$ ,  $xy = 4$  y las rectas  $y = x$ ,  $y = 5x$ .

Encontremos la nueva región  $S$  que dependa de  $u$  y  $v$ , para ello consideremos  $u = xy$ ,  $v = \frac{y}{x}$ , así

$$xy = 1 \Rightarrow u = 1 \quad y = x \Rightarrow \frac{y}{x} = 1 \Rightarrow v = 1$$

$$xy = 4 \Rightarrow u = 4 \quad y = 5x \Rightarrow \frac{y}{x} = 5 \Rightarrow v = 5$$

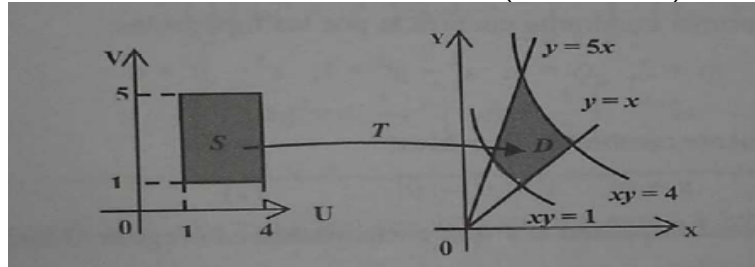


Por lo que  $S = \{(u, v) : 1 \leq u \leq 4, 1 \leq v \leq 5\}$ ,

Despejando  $x, y$  en función de  $u, v$  se tiene que

$$x = \left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{2}} \quad y = (uv)^{\frac{1}{2}}$$

$$T(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) = \left(\left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{2}}, (uv)^{\frac{1}{2}}\right)$$



Ahora

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -y & \frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{2y}{x} = 2v, \text{ de acá } \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{2v}$$

Otra forma es

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & \frac{-1}{2v}\sqrt{\frac{u}{v}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{y^2}{x^2} \sin(\pi xy) dA &= \int_1^4 \int_1^5 v^2 \sin(\pi u) \left| \frac{1}{2v} \right| dv du \\ &= \frac{1}{2} \int_1^4 \int_1^5 v \sin(\pi u) dv du \\ &= \frac{-12}{\pi} \end{aligned}$$

	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
<p>El estudiante debe estar en la capacidad de resolver integrales dobles, mediante cambios de variables</p>	<p>Realiza los cambios de variables adecuados, y encuentra la region S que depende de <math>u,v</math> . Pero no encuentra la transformacion <math>T(u,v)</math>, no grafica las regiones, no encuentra el determinante del Jacobiano de T, no plantea la integral en funcion del cambio de variable, ni resuelve las integrales</p>	<p>Realiza los cambios de variables adecuados, encuentra la region S que depende de <math>u,v</math> . Encuentra la transformacion <math>T(u,v)</math>, y grafica las regiones, pero no encuentra el determinante del Jacobiano de T, no plantea la integral en funcion del cambio de variable, ni resuelve las integrales</p>	<p>Realiza los cambios de variables adecuados, encuentra la region S que depende de <math>u,v</math> . Encuentra la transformacion <math>T(u,v)</math>, grafica las regiones y encuentra el determinante del Jacobiano de T, pero no plantea la integral en funcion del cambio de variable, ni resuelve las integrales</p>	<p>Realiza los cambios de variables adecuados, encuentra la region S que depende de <math>u,v</math> . Encuentra la transformacion <math>T(u,v)</math>, grafica las regiones, encuentra el determinante del Jacobiano de T, plantea la integral en funcion del cambio de variable, y resuelve las integrales de forma correcta</p>
	0-3	4-8	9-14	15