

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

<b>AÑO:</b>	2021	<b>PERÍODO:</b>	II PAO
<b>MATERIA:</b>	Cálculo de una variable	<b>PROFESORES:</b>	Ángel M., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., Díaz R., García A., García E., Laveglia F., Ramos M., Ronquillo C.
<b>EVALUACIÓN:</b>	SEGUNDA	<b>FECHA:</b>	24/enero/2022

**Tema # 1**

**1. (5 PUNTOS)**

Evalúe:

$$\int_0^{1/2} \frac{\arctan(2x)}{1+4x^2} dx$$

**Solución:**

Considere el cambio de variable:

$$u = \arctan(2x)$$

$$du = \frac{1}{1+(2x)^2} \cdot (2)dx = \frac{2}{1+4x^2} dx$$

Entonces:

$$\int \frac{\arctan(2x)}{1+4x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2 \arctan(2x)}{1+4x^2} dx$$

$$\int \frac{\arctan(2x)}{1+4x^2} dx = \frac{1}{2} \int u du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{4} u^2 + C$$

$$\int \frac{\arctan(2x)}{1+4x^2} dx = \frac{1}{4} (\arctan(2x))^2 + C$$

Por lo que:

$$\int_0^{1/2} \frac{\arctan(2x)}{1+4x^2} dx = \frac{1}{4} (\arctan(2x))^2 \Big|_0^{1/2} = \frac{1}{4} ((\arctan(1))^2 - (\arctan(0))^2)$$

$$\int_0^{1/2} \frac{\arctan(2x)}{1+4x^2} dx = \frac{1}{4} \left( \left( \frac{\pi}{4} \right)^2 - (0)^2 \right)$$

$$\therefore \int_0^{1/2} \frac{\arctan(2x)}{1+4x^2} dx = \frac{\pi^2}{64}$$

2. (5 PUNTOS)

Evalúe:

$$\int_0^{1/4} \frac{\arcsen(2x)}{\sqrt{1-4x^2}} dx$$

Solución:

Considere el cambio de variable:

$$u = \arcsen(2x)$$

$$du = \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot (2) dx = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} dx$$

Entonces:

$$\int \frac{\arcsen(2x)}{\sqrt{1-4x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2 \arcsen(2x)}{\sqrt{1-4x^2}} dx$$

$$\int \frac{\arcsen(2x)}{\sqrt{1-4x^2}} dx = \frac{1}{2} \int u du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{4} u^2 + C$$

$$\int \frac{\arcsen(2x)}{\sqrt{1-4x^2}} dx = \frac{1}{4} (\arcsen(2x))^2 + C$$

Por lo que:

$$\int_0^{1/4} \frac{\arcsen(2x)}{\sqrt{1-4x^2}} dx = \frac{1}{4} (\arcsen(2x))^2 \Big|_0^{1/4} = \frac{1}{4} \left( \left( \arcsen\left(\frac{1}{2}\right) \right)^2 - (\arcsen(0))^2 \right)$$

$$\int_0^{1/4} \frac{\arcsen(2x)}{\sqrt{1-4x^2}} dx = \frac{1}{4} \left( \left( \frac{\pi}{6} \right)^2 - (0)^2 \right)$$

$$\therefore \int_0^{1/4} \frac{\arcsen(2x)}{\sqrt{1-4x^2}} dx = \frac{\pi^2}{144}$$

3. (5 PUNTOS)

Evalúe:

$$\int_1^3 \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)} dx$$

Solución:

Considere el cambio de variable:

$$u = \arctan(\sqrt{x})$$

$$du = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} dx$$

Entonces:

$$\int \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)} dx = 2 \int \frac{\arctan(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}(1+x)} dx$$

$$\int \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)} dx = 2 \int u du = 2 \cdot \frac{u^2}{2} + C = u^2 + C$$

$$\int \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)} dx = (\arctan(\sqrt{x}))^2 + C$$

Por lo que:

$$\int_1^3 \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)} dx = (\arctan(\sqrt{x}))^2 \Big|_1^3 = (\arctan(\sqrt{3}))^2 - (\arctan(1))^2$$

$$\int_1^3 \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \pi^2 \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right) = \pi^2 \left(\frac{16-9}{144}\right)$$

$$\boxed{\therefore \int_1^3 \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \frac{7\pi^2}{144}}$$

4. (5 PUNTOS)

Evalúe:

$$\int_{\pi/8}^{\pi/4} \frac{\sqrt{\cot(2x)}}{\operatorname{sen}^2(2x)} dx$$

**Solución:**

Considere el cambio de variable:

$$u = \cot(2x)$$

$$du = -\csc^2(2x) \cdot (2)dx = -2\csc^2(2x)dx = -\frac{2}{\operatorname{sen}^2(2x)}dx$$

Entonces:

$$\int \frac{\sqrt{\cot(2x)}}{\operatorname{sen}^2(2x)} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-2\sqrt{\cot(2x)}}{\operatorname{sen}^2(2x)} dx = -\frac{1}{2} \int u^{1/2} du$$

$$\int \frac{\sqrt{\cot(2x)}}{\operatorname{sen}^2(2x)} dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3} \sqrt{u^3} + C = -\frac{1}{3} \sqrt{\cot^3(2x)} + C$$

Por lo que:

$$\int_{\pi/8}^{\pi/4} \frac{\sqrt{\cot(2x)}}{\operatorname{sen}^2(2x)} dx = -\frac{1}{3} \sqrt{\cot^3(2x)} \Big|_{\pi/8}^{\pi/4}$$

$$\int_{\pi/8}^{\pi/4} \frac{\sqrt{\cot(2x)}}{\operatorname{sen}^2(2x)} dx = -\frac{1}{3} \left( \sqrt{\cot^3\left(\frac{\pi}{2}\right)} - \sqrt{\cot^3\left(\frac{\pi}{4}\right)} \right) = -\frac{1}{3} (0 - \sqrt{1})$$

$$\boxed{\therefore \int_{\pi/8}^{\pi/4} \frac{\sqrt{\cot(2x)}}{\operatorname{sen}^2(2x)} dx = \frac{1}{3}}$$

**5. (5 PUNTOS)**

**Evalúe:**

$$\int_0^{\pi/12} \frac{\sqrt{\tan(3x)}}{\cos^2(3x)} dx$$

**Solución:**

Considere el cambio de variable:

$$u = \tan(3x)$$

$$du = \sec^2(3x) \cdot (3)dx = 3\sec^2(3x)dx = \frac{3}{\cos^2(3x)}dx$$

Entonces:

$$\int \frac{\sqrt{\tan(3x)}}{\cos^2(3x)} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3\sqrt{\tan(3x)}}{\cos^2(3x)} dx = \frac{1}{3} \int u^{1/2} du$$

$$\int \frac{\sqrt{\tan(3x)}}{\cos^2(3x)} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9} \sqrt{u^3} + C = \frac{2}{9} \sqrt{\tan^3(3x)} + C$$

Por lo que:

$$\int_0^{\pi/12} \frac{\sqrt{\tan(3x)}}{\cos^2(3x)} dx = \frac{2}{9} \sqrt{\tan^3(3x)} \Big|_0^{\pi/12}$$

$$\int_0^{\pi/12} \frac{\sqrt{\tan(3x)}}{\cos^2(3x)} dx = \frac{2}{9} \left( \sqrt{\tan^3\left(\frac{\pi}{4}\right)} - \sqrt{\tan^3(0)} \right) = \frac{2}{9} (\sqrt{1} - 0)$$

$$\boxed{\therefore \int_0^{\pi/12} \frac{\sqrt{\tan(3x)}}{\cos^2(3x)} dx = \frac{2}{9}}$$

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

<b>AÑO:</b>	2021	<b>PERÍODO:</b>	II PAO
<b>MATERIA:</b>	Cálculo de una variable	<b>PROFESORES:</b>	Ángel M., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., Díaz R., García A., García E., Laveglia F., Ramos M., Ronquillo C.
<b>EVALUACIÓN:</b>	SEGUNDA	<b>FECHA:</b>	24/enero/2022

Tema # 2

6. (7 PUNTOS)

Obtenga la familia de antiderivadas correspondiente a:

$$\int (\alpha x^2 + \beta x) 2^{\theta x} dx \quad ; \quad \alpha, \beta, \theta \text{ son constantes}$$

**Solución:**

Se aplica la TÉCNICA DE INTEGRACIÓN POR PARTES:

$$\begin{aligned} u &= \alpha x^2 + \beta x & dv &= 2^{\theta x} dx \\ du &= (2\alpha x + \beta) dx & v &= \frac{2^{\theta x}}{\theta \ln(2)} \end{aligned}$$

$$\int (\alpha x^2 + \beta x) 2^{\theta x} dx = \left( \frac{\alpha x^2 + \beta x}{\theta \ln(2)} \right) 2^{\theta x} - \frac{1}{\theta \ln(2)} \int (2\alpha x + \beta) 2^{\theta x} dx$$

Se aplica nuevamente la TÉCNICA DE INTEGRACIÓN POR PARTES:

$$\begin{aligned} u &= 2\alpha x + \beta & dv &= 2^{\theta x} dx \\ du &= 2\alpha dx & v &= \frac{2^{\theta x}}{\theta \ln(2)} \end{aligned}$$

$$\int (2\alpha x + \beta) 2^{\theta x} dx = \left( \frac{2\alpha x + \beta}{\theta \ln(2)} \right) 2^{\theta x} - \frac{2\alpha}{\theta \ln(2)} \int 2^{\theta x} dx$$

$$\int (2\alpha x + \beta) 2^{\theta x} dx = \left( \frac{2\alpha x + \beta}{\theta \ln(2)} \right) 2^{\theta x} - \frac{2\alpha}{\theta \ln(2)} \cdot \frac{2^{\theta x}}{\theta \ln(2)} + K$$

$$\therefore \int (\alpha x^2 + \beta x) 2^{\theta x} dx = \frac{1}{\theta \ln(2)} \left[ \alpha x^2 + \beta x - \frac{2\alpha x + \beta}{\theta \ln(2)} + \frac{2\alpha}{\theta^2 \ln^2(2)} \right] 2^{\theta x} + C ; C \in \mathbb{R}$$

7. (7 PUNTOS)

Obtenga la familia de antiderivadas correspondiente a:

$$\int (\alpha x^2 + \beta x) \operatorname{sen}(\theta x) dx \quad ; \quad \alpha, \beta, \theta \text{ son constantes}$$

Solución:

Se aplica la TÉCNICA DE INTEGRACIÓN POR PARTES:

$$\begin{aligned} u &= \alpha x^2 + \beta x & dv &= \operatorname{sen}(\theta x) dx \\ du &= (2\alpha x + \beta) dx & v &= -\frac{1}{\theta} \cos(\theta x) \end{aligned}$$

$$\int (\alpha x^2 + \beta x) \operatorname{sen}(\theta x) dx = -\left(\frac{\alpha x^2 + \beta x}{\theta}\right) \cos(\theta x) + \frac{1}{\theta} \int (2\alpha x + \beta) \cos(\theta x) dx$$

Se aplica nuevamente la TÉCNICA DE INTEGRACIÓN POR PARTES:

$$\begin{aligned} u &= 2\alpha x + \beta & dv &= \cos(\theta x) dx \\ du &= 2\alpha dx & v &= \frac{1}{\theta} \operatorname{sen}(\theta x) \end{aligned}$$

$$\int (2\alpha x + \beta) \cos(\theta x) dx = \left(\frac{2\alpha x + \beta}{\theta}\right) \operatorname{sen}(\theta x) - \frac{2\alpha}{\theta} \int \operatorname{sen}(\theta x) dx$$

$$\int (2\alpha x + \beta) \cos(\theta x) dx = \left(\frac{2\alpha x + \beta}{\theta}\right) \operatorname{sen}(\theta x) + \frac{2\alpha}{\theta} \cdot \frac{1}{\theta} \cos(\theta x) + K$$

$$\therefore \int (\alpha x^2 + \beta x) \operatorname{sen}(\theta x) dx = \frac{1}{\theta} \left[ \left(\frac{2\alpha x + \beta}{\theta}\right) \operatorname{sen}(\theta x) - \left(\alpha x^2 + \beta x - \frac{2\alpha}{\theta^2}\right) \cos(\theta x) \right] + C ; C \in \mathbb{R}$$

8. (7 PUNTOS)

Obtenga la familia de antiderivadas correspondiente a:

$$\int (\alpha x^2 + \beta x) \cos(\theta x) dx \quad ; \quad \alpha, \beta, \theta \text{ son constantes}$$

Solución:

Se aplica la TÉCNICA DE INTEGRACIÓN POR PARTES:

$$\begin{aligned} u &= \alpha x^2 + \beta x & dv &= \cos(\theta x) dx \\ du &= (2\alpha x + \beta) dx & v &= \frac{1}{\theta} \operatorname{sen}(\theta x) \end{aligned}$$

$$\int (\alpha x^2 + \beta x) \cos(\theta x) dx = \left( \frac{\alpha x^2 + \beta x}{\theta} \right) \text{sen}(\theta x) - \frac{1}{\theta} \int (2\alpha x + \beta) \text{sen}(\theta x) dx$$

Se aplica nuevamente la TÉCNICA DE INTEGRACIÓN POR PARTES:

$$\begin{aligned} u &= 2\alpha x + \beta & dv &= \text{sen}(\theta x) dx \\ du &= 2\alpha dx & v &= -\frac{1}{\theta} \cos(\theta x) \end{aligned}$$

$$\int (2\alpha x + \beta) \text{sen}(\theta x) dx = -\left( \frac{2\alpha x + \beta}{\theta} \right) \cos(\theta x) + \frac{2\alpha}{\theta} \int \cos(\theta x) dx$$

$$\int (2\alpha x + \beta) \text{sen}(\theta x) dx = -\left( \frac{2\alpha x + \beta}{\theta} \right) \cos(\theta x) + \frac{2\alpha}{\theta} \cdot \frac{1}{\theta} \text{sen}(\theta x) + K$$

$$\therefore \int (\alpha x^2 + \beta x) \cos(\theta x) dx = \frac{1}{\theta} \left[ \left( \alpha x^2 + \beta x - \frac{2\alpha}{\theta^2} \right) \text{sen}(\theta x) + \left( \frac{2\alpha x + \beta}{\theta} \right) \cos(\theta x) \right] + C ; C \in \mathbb{R}$$

### 9. (7 PUNTOS)

Obtenga la familia de antiderivadas correspondiente a:

$$\int (\alpha x - \beta x^2) 2^{-\theta x} dx ; \alpha, \beta, \theta \text{ son constantes}$$

**Solución:**

Se aplica la TÉCNICA DE INTEGRACIÓN POR PARTES:

$$\begin{aligned} u &= \alpha x - \beta x^2 & dv &= 2^{-\theta x} dx \\ du &= (\alpha - 2\beta x) dx & v &= -\frac{2^{-\theta x}}{\theta \ln(2)} \end{aligned}$$

$$\int (\alpha x - \beta x^2) 2^{-\theta x} dx = -\left( \frac{\alpha x - \beta x^2}{\theta \ln(2)} \right) 2^{-\theta x} + \frac{1}{\theta \ln(2)} \int (\alpha - 2\beta x) 2^{-\theta x} dx$$

Se aplica nuevamente la TÉCNICA DE INTEGRACIÓN POR PARTES:

$$\begin{aligned} u &= \alpha - 2\beta x & dv &= 2^{-\theta x} dx \\ du &= -2\beta dx & v &= -\frac{2^{-\theta x}}{\theta \ln(2)} \end{aligned}$$

$$\int (\alpha - 2\beta x) 2^{-\theta x} dx = -\left( \frac{\alpha - 2\beta x}{\theta \ln(2)} \right) 2^{-\theta x} - \frac{2\beta}{\theta \ln(2)} \int 2^{-\theta x} dx$$



$$\int (\alpha - 2\beta x)2^{-\theta x} dx = -\left(\frac{\alpha - 2\beta x}{\theta \ln(2)}\right)2^{-\theta x} + \frac{2\beta}{\theta \ln(2)} \cdot \frac{2^{-\theta x}}{\theta \ln(2)} + K$$

$$\therefore \int (\alpha x - \beta x^2)2^{-\theta x} dx = -\frac{1}{\theta \ln(2)} \left[ \alpha x - \beta x^2 + \frac{\alpha - 2\beta x}{\theta \ln(2)} - \frac{2\beta}{\theta^2 \ln^2(2)} \right] 2^{-\theta x} + C ; C \in \mathbb{R}$$

**10. (7 PUNTOS)**

**Obtenga la familia de antiderivadas correspondiente a:**

$$\int (\alpha x - \beta x^2) \cos(\theta x) dx ; \alpha, \beta, \theta \text{ son constantes}$$

**Solución:**

Se aplica la TÉCNICA DE INTEGRACIÓN POR PARTES:

$$\begin{aligned} u &= \alpha x - \beta x^2 & dv &= \cos(\theta x) dx \\ du &= (\alpha - 2\beta x) dx & v &= \frac{1}{\theta} \text{sen}(\theta x) \end{aligned}$$

$$\int (\alpha x - \beta x^2) \cos(\theta x) dx = \left(\frac{\alpha x - \beta x^2}{\theta}\right) \text{sen}(\theta x) - \frac{1}{\theta} \int (\alpha - 2\beta x) \text{sen}(\theta x) dx$$

Se aplica nuevamente la TÉCNICA DE INTEGRACIÓN POR PARTES:

$$\begin{aligned} u &= \alpha - 2\beta x & dv &= \text{sen}(\theta x) dx \\ du &= -2\beta dx & v &= -\frac{1}{\theta} \cos(\theta x) \end{aligned}$$

$$\int (\alpha - 2\beta x) \text{sen}(\theta x) dx = -\left(\frac{\alpha - 2\beta x}{\theta}\right) \cos(\theta x) - \frac{2\beta}{\theta} \int \cos(\theta x) dx$$

$$\int (\alpha - 2\beta x) \text{sen}(\theta x) dx = -\left(\frac{\alpha - 2\beta x}{\theta}\right) \cos(\theta x) - \frac{2\beta}{\theta} \cdot \frac{1}{\theta} \text{sen}(\theta x) + K$$

$$\therefore \int (\alpha x - \beta x^2) \cos(\theta x) dx = \frac{1}{\theta} \left[ \left(\alpha x - \beta x^2 + \frac{2\beta}{\theta^2}\right) \text{sen}(\theta x) + \left(\frac{\alpha - 2\beta x}{\theta}\right) \cos(\theta x) \right] + C ; C \in \mathbb{R}$$

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

<b>AÑO:</b>	2021	<b>PERÍODO:</b>	II PAO
<b>MATERIA:</b>	Cálculo de una variable	<b>PROFESORES:</b>	Ángel M., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., Díaz R., García A., García E., Laveglia F., Ramos M., Ronquillo C.
<b>EVALUACIÓN:</b>	SEGUNDA	<b>FECHA:</b>	24/enero/2022

Tema # 3

11. (7 PUNTOS)

Obtenga la familia de antiderivadas correspondiente a:

$$\int \frac{2x^2 - 3x + 9}{x^3 - 3x^2 + 7x - 5} dx$$

Solución:

Se aplica división sintética al polinomio del denominador:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & 7 & -5 \\ & & 1 & -2 & 5 \\ \hline & 1 & -2 & 5 & 0 \end{array}$$

$$x^3 - 3x^2 + 7x - 5 = (x - 1)(x^2 - 2x + 5)$$

Se aplica la TÉCNICA DE DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES PARCIALES a la función integrando:

$$\frac{2x^2 - 3x + 9}{x^3 - 3x^2 + 7x - 5} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 5}$$

$$\frac{2x^2 - 3x + 9}{x^3 - 3x^2 + 7x - 5} = \frac{A(x^2 - 2x + 5) + (Bx + C)(x - 1)}{x^3 - 3x^2 + 7x - 5}$$

Se plantea una IGUALDAD ENTRE POLINOMIOS y se calculan los coeficientes:

$$2x^2 - 3x + 9 = A(x^2 - 2x + 5) + (Bx + C)(x - 1)$$

$$\text{Cuando } x = 1: 8 = A(4) + (B + C)(0) \rightarrow A = 2$$

$$\text{Del término cuadrático: } 2 = 2 + B \rightarrow B = 0$$

$$\text{Del término independiente: } 9 = 10 - C \rightarrow C = 1$$

$$\int \frac{2x^2 - 3x + 9}{x^3 - 3x^2 + 7x - 5} dx = \int \left( \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x^2 - 2x + 1 + 4} \right) dx$$

$$\int \frac{2x^2 - 3x + 9}{x^3 - 3x^2 + 7x - 5} dx = 2 \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{1}{(x-1)^2 + 2^2} dx$$

$$\therefore \int \frac{2x^2 - 3x + 9}{x^3 - 3x^2 + 7x - 5} dx = 2 \ln|x-1| + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + C ; C \in \mathbb{R}$$

12. (7 PUNTOS)

Obtenga la familia de antiderivadas correspondiente a:

$$\int \frac{4x^2 - 2x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1} dx$$

Solución:

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 - x - 1 &= (x^3 + x^2) - (x + 1) = x^2(x + 1) - (x + 1) \\ x^3 + x^2 - x - 1 &= (x^2 - 1)(x + 1) = (x - 1)(x + 1)^2 \end{aligned}$$

Se aplica la TÉCNICA DE DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES PARCIALES a la función integrando:

$$\frac{4x^2 - 2x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$\frac{4x^2 - 2x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1} = \frac{A(x+1)^2 + B(x^2-1) + C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

Se plantea una IGUALDAD ENTRE POLINOMIOS y se calculan los coeficientes:

$$4x^2 - 2x + 1 = A(x+1)^2 + B(x^2-1) + C(x-1)$$

$$\text{Cuando } x = 1: 3 = A(4) + B(0) + C(0) \rightarrow A = \frac{3}{4}$$

$$\text{Del término cuadrático: } 4 = \frac{3}{4} + B \rightarrow B = \frac{13}{4}$$

$$\text{Del término independiente: } 1 = A - B - C \rightarrow C = -\frac{7}{2}$$

$$\int \frac{4x^2 - 2x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1} dx = \int \left( \frac{3/4}{x-1} + \frac{13/4}{x+1} - \frac{7/2}{(x+1)^2} \right) dx$$

$$\int \frac{4x^2 - 2x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1} dx = \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{13}{4} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{7}{2} \int \frac{dx}{(x+1)^2}$$

$$\therefore \int \frac{4x^2 - 2x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1} dx = \frac{3}{4} \ln|x-1| + \frac{13}{4} \ln|x+1| + \frac{7}{2(x+1)} + C ; C \in \mathbb{R}$$

**13. (7 PUNTOS)**

**Obtenga la familia de antiderivadas correspondiente a:**

$$\int \frac{x^2 - 14x + 15}{x^3 - 3x^2 + x + 5} dx$$

**Solución:**

Se aplica división sintética al polinomio del denominador:

$$\begin{array}{r} \boxed{-1} \quad \begin{array}{r} 1 \quad -3 \quad 1 \quad 5 \\ -1 \quad 4 \quad -5 \\ \hline 1 \quad -4 \quad 5 \quad 0 \end{array} \end{array}$$

$$x^3 - 3x^2 + x + 5 = (x + 1)(x^2 - 4x + 5)$$

Se aplica la TÉCNICA DE DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES PARCIALES a la función integrando:

$$\frac{x^2 - 14x + 15}{x^3 - 3x^2 + x + 5} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-4x+5}$$

$$\frac{x^2 - 14x + 15}{x^3 - 3x^2 + x + 5} = \frac{A(x^2 - 4x + 5) + (Bx + C)(x + 1)}{x^3 - 3x^2 + x + 5}$$

Se plantea una IGUALDAD ENTRE POLINOMIOS y se calculan los coeficientes:

$$x^2 - 14x + 15 = A(x^2 - 4x + 5) + (Bx + C)(x + 1)$$

Quando  $x = -1$ :  $30 = A(10) + (-B + C)(0) \rightarrow A = 3$

Del término cuadrático:  $1 = 3 + B \rightarrow B = -2$

Del término independiente:  $15 = 15 + C \rightarrow C = 0$

$$\int \frac{x^2 - 14x + 15}{x^3 - 3x^2 + x + 5} dx = \int \left( \frac{3}{x+1} - \frac{2x}{x^2 - 4x + 5} \right) dx$$

$$\int \frac{x^2 - 14x + 15}{x^3 - 3x^2 + x + 5} dx = 3 \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{2x - 4 + 4}{x^2 - 4x + 5} dx$$

$$\int \frac{x^2 - 14x + 15}{x^3 - 3x^2 + x + 5} dx = 3 \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{2x-4}{x^2-4x+5} dx - \int \frac{4}{(x-2)^2+1^2} dx$$

$$\therefore \int \frac{x^2 - 14x + 15}{x^3 - 3x^2 + x + 5} dx = 3\ln|x+1| - \ln|x^2 - 4x + 5| - 4\arctan(x-2) + C ; C \in \mathbb{R}$$

**14. (7 PUNTOS)**

**Obtenga la familia de antiderivadas correspondiente a:**

$$\int \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$$

**Solución:**

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - x + 1 &= (x^3 - x^2) - (x - 1) = x^2(x - 1) - (x - 1) \\ x^3 - x^2 - x + 1 &= (x^2 - 1)(x - 1) = (x + 1)(x - 1)^2 \end{aligned}$$

Se aplica la TÉCNICA DE DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES PARCIALES a la función integrando:

$$\frac{3x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$\frac{3x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{A(x-1)^2 + B(x^2-1) + C(x+1)}{(x+1)(x-1)^2}$$

Se plantea una IGUALDAD ENTRE POLINOMIOS y se calculan los coeficientes:

$$3x^2 - 2x + 1 = A(x-1)^2 + B(x^2-1) + C(x+1)$$

$$\text{Cuando } x = -1: 6 = A(4) + B(0) + C(0) \rightarrow A = \frac{3}{2}$$

$$\text{Del término cuadrático: } 3 = \frac{3}{2} + B \rightarrow B = \frac{3}{2}$$

$$\text{Del término independiente: } 1 = A - B + C \rightarrow C = 1$$

$$\int \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx = \int \left( \frac{3/2}{x+1} + \frac{3/2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx$$

$$\int \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$\therefore \int \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx = \frac{3}{2} \ln|x + 1| + \frac{3}{2} \ln|x - 1| - \frac{1}{x - 1} + C ; C \in \mathbb{R}$$

15. (7 PUNTOS)

Obtenga la familia de antiderivadas correspondiente a:

$$\int \frac{1 - 4x - 3x^2 - 3x^3}{x^4 + x^3 + x^2} dx$$

Solución:

$$x^4 + x^3 + x^2 = x^2(x^2 + x + 1)$$

Se aplica la TÉCNICA DE DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES PARCIALES a la función integrando:

$$\frac{1 - 4x - 3x^2 - 3x^3}{x^4 + x^3 + x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1}$$

$$\frac{1 - 4x - 3x^2 - 3x^3}{x^4 + x^3 + x^2} = \frac{Ax(x^2 + x + 1) + B(x^2 + x + 1) + (Cx + D)x^2}{x^4 + x^3 + x^2}$$

Se plantea una IGUALDAD ENTRE POLINOMIOS y se calculan los coeficientes:

$$1 - 4x - 3x^2 - 3x^3 = Ax(x^2 + x + 1) + B(x^2 + x + 1) + (Cx + D)x^2$$

$$\text{Cuando } x = 0: 1 = A(0) + B(1) + C(0) \rightarrow B = 1$$

$$1 - 4x - 3x^2 - 3x^3 = Ax^3 + Ax^2 + Ax + x^2 + x + 1 + Cx^3 + Dx^2$$

$$\text{Del término lineal: } -4 = A + B \rightarrow A = -5$$

$$\text{Del término cuadrático: } -3 = A + 1 + D \rightarrow D = 1$$

$$\text{Del término cúbico: } -3 = A + C \rightarrow C = 2$$

$$\int \frac{1 - 4x - 3x^2 - 3x^3}{x^4 + x^3 + x^2} dx = \int \left( -\frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} \right) dx$$

$$\int \frac{1 - 4x - 3x^2 - 3x^3}{x^4 + x^3 + x^2} dx = -5 \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx$$

$$\therefore \int \frac{1 - 4x - 3x^2 - 3x^3}{x^4 + x^3 + x^2} dx = -5 \ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x^2 + x + 1| + C ; C \in \mathbb{R}$$

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

<b>AÑO:</b>	2021	<b>PERÍODO:</b>	II PAO
<b>MATERIA:</b>	Cálculo de una variable	<b>PROFESORES:</b>	Ángel M., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., Díaz R., García A., García E., Laveglia F., Ramos M., Ronquillo C.
<b>EVALUACIÓN:</b>	SEGUNDA	<b>FECHA:</b>	24/enero/2022

Tema # 4

16. (9 PUNTOS)

Utilizando la definición de la integral definida, evalúe:

$$\int_{-2}^1 (4 - |x|) dx$$

**Solución:**

Debido al comportamiento de la función valor absoluto, para evaluar la integral definida, es necesario aplicar la PROPIEDAD ADITIVA:

$$\int_{-2}^1 (4 - |x|) dx = \int_{-2}^0 (4 + x) dx + \int_0^1 (4 - x) dx$$

Para ambos intervalos especificados, se establecerá una partición regular  $P$ , con  $n$  subintervalos de igual longitud y los puntos muestra  $\bar{x}_i$  se elegirán de tal forma que, en cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $\bar{x}_i = x_i$ .

Luego, a partir de la definición, la integral definida para cada intervalo estará dada por:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

Para la primera integral, se tiene que:

$$\int_{-2}^0 (4 + x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

Luego:

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{0 - (-2)}{n} = \frac{2}{n}$$

$$\begin{aligned}
 x_0 &= -2 \\
 x_1 &= -2 + \Delta x = -2 + \frac{2}{n} \\
 x_2 &= -2 + 2\Delta x = -2 + 2\left(\frac{2}{n}\right) \\
 x_3 &= -2 + 3\Delta x = -2 + 3\left(\frac{2}{n}\right) \\
 &\vdots \\
 x_i &= -2 + i\Delta x = -2 + i\left(\frac{2}{n}\right) \\
 &\vdots \\
 x_n &= -2 + n\Delta x = -2 + \cancel{n}\left(\frac{2}{\cancel{n}}\right) = -2 + 2 = 0
 \end{aligned}$$

Con lo cual:

$$f(x_i) = 4 + x_i = 4 + \left(-2 + i\left(\frac{2}{n}\right)\right) = 2 + \frac{2i}{n}$$

Y la integral definida, estará dada por:

$$\begin{aligned}
 \int_{-2}^0 (4 + x) dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \left(2 + \frac{2i}{n}\right) \left(\frac{2}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n}\right) \sum_{i=1}^n \left(2 + \frac{2i}{n}\right) \\
 \int_{-2}^0 (4 + x) dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n}\right) \left(\sum_{i=1}^n 2 + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n i\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n}\right) \left(2n + \frac{2}{n} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\right) \\
 \int_{-2}^0 (4 + x) dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n}\right) (2n + n + 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(6 + \frac{2}{n}\right) = 6 + 0
 \end{aligned}$$

Por lo que:

$$\int_{-2}^0 (4 + x) dx = 6$$

Para la segunda integral, se tiene que:

$$\int_0^1 (4 - x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

Luego:

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{1 - 0}{n} = \frac{1}{n}$$



$$\begin{aligned}
 x_0 &= 0 \\
 x_1 &= \Delta x = \frac{1}{n} \\
 x_2 &= 2\Delta x = 2\left(\frac{1}{n}\right) \\
 x_3 &= 3\Delta x = 3\left(\frac{1}{n}\right) \\
 &\vdots \\
 x_i &= i\Delta x = i\left(\frac{1}{n}\right) \\
 &\vdots \\
 x_n &= n\Delta x = \cancel{n}\left(\frac{1}{\cancel{n}}\right) = 1
 \end{aligned}$$

Con lo cual:

$$f(x_i) = 4 - x_i = 4 - i\left(\frac{1}{n}\right) = 4 - \frac{i}{n}$$

Y la integral definida, estará dada por:

$$\int_0^1 (4 - x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \left(4 - \frac{i}{n}\right) \left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^n \left(4 - \frac{i}{n}\right)$$

$$\int_0^1 (4 - x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \left(\sum_{i=1}^n 4 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \left(4n - \frac{1}{n} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\right)$$

$$\int_0^1 (4 - x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \left(4n - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{7}{2} - 0$$

Por lo que:

$$\int_0^1 (4 - x)dx = \frac{7}{2}$$

Pero:

$$\int_{-2}^1 (4 - |x|)dx = \int_{-2}^0 (4 + x)dx + \int_0^1 (4 - x)dx = 6 + \frac{7}{2}$$

$$\boxed{\therefore \int_{-2}^1 (4 - |x|)dx = \frac{19}{2}}$$

17. (9 PUNTOS)

Utilizando la definición de la integral definida, evalúe:

$$\int_{-1}^2 (|x| + 1) dx$$

**Solución:**

Debido al comportamiento de la función valor absoluto, para evaluar la integral definida, es necesario aplicar la PROPIEDAD ADITIVA:

$$\int_{-1}^2 (|x| + 1) dx = \int_{-1}^0 (-x + 1) dx + \int_0^2 (x + 1) dx$$

Para ambos intervalos especificados, se establecerá una partición regular  $P$ , con  $n$  subintervalos de igual longitud y los puntos muestra  $\bar{x}_i$  se elegirán de tal forma que, en cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $\bar{x}_i = x_i$ .

Luego, a partir de la definición, la integral definida para cada intervalo estará dada por:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

Para la primera integral, se tiene que:

$$\int_{-1}^0 (-x + 1) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

Luego:

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{0 - (-1)}{n} = \frac{1}{n}$$

$$x_0 = -1$$

$$x_1 = -1 + \Delta x = -1 + \frac{1}{n}$$

$$x_2 = -1 + 2\Delta x = -1 + 2\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$x_3 = -1 + 3\Delta x = -1 + 3\left(\frac{1}{n}\right)$$

⋮

$$x_i = -1 + i\Delta x = -1 + i\left(\frac{1}{n}\right)$$

⋮

$$x_n = -1 + n\Delta x = -1 + \cancel{n} \left( \frac{1}{\cancel{n}} \right) = -1 + 1 = 0$$

Con lo cual:

$$f(x_i) = -x_i + 1 = -\left(-1 + i\left(\frac{1}{n}\right)\right) + 1 = 2 - \frac{i}{n}$$

Y la integral definida, estará dada por:

$$\int_{-1}^0 (-x + 1) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \left(2 - \frac{i}{n}\right) \left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^n \left(2 - \frac{i}{n}\right)$$

$$\int_{-1}^0 (-x + 1) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \left(\sum_{i=1}^n 2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \left(2n - \frac{1}{\cancel{n}} \left(\frac{\cancel{n}(n+1)}{2}\right)\right)$$

$$\int_{-1}^0 (-x + 1) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \left(2n - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{3}{2} - 0$$

Por lo que:

$$\int_{-1}^0 (-x + 1) dx = \frac{3}{2}$$

Para la segunda integral, se tiene que:

$$\int_0^2 (x + 1) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

Luego:

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{2 - 0}{n} = \frac{2}{n}$$

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = \Delta x = \frac{2}{n}$$

$$x_2 = 2\Delta x = 2\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$x_3 = 3\Delta x = 3\left(\frac{2}{n}\right)$$

⋮

$$x_i = i\Delta x = i\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_n = n\Delta x = \cancel{n} \left( \frac{2}{\cancel{n}} \right) = 2$$

Con lo cual:

$$f(x_i) = x_i + 1 = i \left( \frac{2}{n} \right) + 1 = \frac{2i}{n} + 1$$

Y la integral definida, estará dada por:

$$\int_0^2 (x + 1) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \left( \frac{2i}{n} + 1 \right) \left( \frac{2}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{n} \right) \sum_{i=1}^n \left( \frac{2i}{n} + 1 \right)$$

$$\int_0^2 (x + 1) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{n} \right) \left( \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{n} \right) \left( \frac{2}{\cancel{n}} \left( \frac{\cancel{n}(n+1)}{2} \right) + n \right)$$

$$\int_0^2 (x + 1) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{n} \right) (n + 1 + n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left( 2 + \frac{1}{n} \right) = 2(2 + 0)$$

Por lo que:

$$\int_0^2 (x + 1) dx = 4$$

Pero:

$$\int_{-1}^2 (|x| + 1) dx = \int_{-1}^0 (-x + 1) dx + \int_0^2 (x + 1) dx = \frac{3}{2} + 4$$

$$\boxed{\therefore \int_{-1}^2 (|x| + 1) dx = \frac{11}{2}}$$

## 18. (9 PUNTOS)

Utilizando la definición de la integral definida, evalúe:

$$\int_{-1}^4 (|x - 2|) dx$$

**Solución:**

Debido al comportamiento de la función valor absoluto, para evaluar la integral definida, es necesario aplicar la PROPIEDAD ADITIVA:

$$\int_{-1}^4 (|x - 2|) dx = \int_{-1}^2 (2 - x) dx + \int_2^4 (x - 2) dx$$

Para ambos intervalos especificados, se establecerá una partición regular  $P$ , con  $n$  subintervalos de igual longitud y los puntos muestra  $\bar{x}_i$  se elegirán de tal forma que, en cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $\bar{x}_i = x_i$ .

Luego, a partir de la definición, la integral definida para cada intervalo estará dada por:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

Para la primera integral, se tiene que:

$$\int_{-1}^2 (2 - x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

Luego:

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{2 - (-1)}{n} = \frac{3}{n}$$

$$x_0 = -1$$

$$x_1 = -1 + \Delta x = -1 + \frac{3}{n}$$

$$x_2 = -1 + 2\Delta x = -1 + 2\left(\frac{3}{n}\right)$$

$$x_3 = -1 + 3\Delta x = -1 + 3\left(\frac{3}{n}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_i = -1 + i\Delta x = -1 + i\left(\frac{3}{n}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_n = -1 + n\Delta x = -1 + \cancel{n}\left(\frac{3}{\cancel{n}}\right) = -1 + 3 = 2$$

Con lo cual:

$$f(x_i) = 2 - x_i = 2 - \left(-1 + i\left(\frac{3}{n}\right)\right) = 3 - \frac{3i}{n}$$

Y la integral definida, estará dada por:

$$\int_{-1}^2 (2-x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \left(3 - \frac{3i}{n}\right) \left(\frac{3}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{n}\right) \sum_{i=1}^n \left(3 - \frac{3i}{n}\right)$$

$$\int_{-1}^2 (2-x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{n}\right) \left(\sum_{i=1}^n 3 - \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n i\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{n}\right) \left(3n - \frac{3}{n} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\right)$$

$$\int_{-1}^2 (2-x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{n}\right) \left(3n - \frac{3}{2}n - \frac{3}{2}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{9}{2} - \frac{9}{2n}\right) = \frac{9}{2} - 0$$

Por lo que:

$$\int_{-1}^2 (2-x)dx = \frac{9}{2}$$

Para la segunda integral, se tiene que:

$$\int_2^4 (x-2)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

Luego:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-2}{n} = \frac{2}{n}$$

$$x_0 = 2$$

$$x_1 = 2 + \Delta x = 2 + \frac{2}{n}$$

$$x_2 = 2 + 2\Delta x = 2 + 2\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$x_3 = 2 + 3\Delta x = 2 + 3\left(\frac{2}{n}\right)$$

⋮

$$x_i = 2 + i\Delta x = 2 + i\left(\frac{2}{n}\right)$$

⋮

$$x_n = 2 + n\Delta x = 2 + n\left(\frac{2}{n}\right) = 2 + 2 = 4$$

Con lo cual:

$$f(x_i) = x_i - 2 = \left(2 + \frac{2i}{n}\right) - 2 = \frac{2i}{n}$$

Y la integral definida, estará dada por:

$$\int_2^4 (x - 2) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{2i}{n}\right) \left(\frac{2}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{n^2}\right) \sum_{i=1}^n i$$

$$\int_2^4 (x - 2) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{n^2}\right) \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{2}{n}\right) = 2 + 0$$

Por lo que:

$$\int_2^4 (x - 2) dx = 2$$

Pero:

$$\int_{-1}^4 (|x - 2|) dx = \int_{-1}^2 (2 - x) dx + \int_2^4 (x - 2) dx = \frac{9}{2} + 2$$

$$\therefore \int_{-1}^4 (|x - 2|) dx = \frac{13}{2}$$

## 19. (9 PUNTOS)

Utilizando la definición de la integral definida, evalúe:

$$\int_{-3}^0 (|x + 2|) dx$$

**Solución:**

Debido al comportamiento de la función valor absoluto, para evaluar la integral definida, es necesario aplicar la PROPIEDAD ADITIVA:

$$\int_{-3}^0 (|x + 2|) dx = \int_{-3}^{-2} (-x - 2) dx + \int_{-2}^0 (x + 2) dx$$

Para ambos intervalos especificados, se establecerá una partición regular  $P$ , con  $n$  subintervalos de igual longitud y los puntos muestra  $\bar{x}_i$  se elegirán de tal forma que, en cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $\bar{x}_i = x_i$ .

Luego, a partir de la definición, la integral definida para cada intervalo estará dada por:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

Para la primera integral, se tiene que:

$$\int_{-3}^{-2} (-x - 2) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

Luego:

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{-2 - (-3)}{n} = \frac{1}{n}$$

$$x_0 = -3$$

$$x_1 = -3 + \Delta x = -3 + \frac{1}{n}$$

$$x_2 = -3 + 2\Delta x = -3 + 2\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$x_3 = -3 + 3\Delta x = -3 + 3\left(\frac{1}{n}\right)$$

⋮

$$x_i = -3 + i\Delta x = -3 + i\left(\frac{1}{n}\right)$$

⋮

$$x_n = -3 + n\Delta x = -3 + \cancel{n}\left(\frac{1}{\cancel{n}}\right) = -3 + 1 = -2$$

Con lo cual:

$$f(x_i) = -x_i - 2 = -\left(-3 + i\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 2 = 1 - \frac{i}{n}$$

Y la integral definida, estará dada por:

$$\int_{-3}^{-2} (-x - 2) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{i}{n}\right) \left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{i}{n}\right)$$

$$\int_{-3}^{-2} (-x - 2) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \left(\sum_{i=1}^n 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \left(n - \frac{1}{\cancel{n}} \left(\frac{\cancel{n}(n+1)}{2}\right)\right)$$

$$\int_{-3}^{-2} (-x - 2) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \left(n - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2} - 0$$

Por lo que:

$$\int_{-3}^{-2} (-x - 2) dx = \frac{1}{2}$$



Para la segunda integral, se tiene que:

$$\int_{-2}^0 (x + 2)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

Luego:

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{0 - (-2)}{n} = \frac{2}{n}$$

$$x_0 = -2$$

$$x_1 = -2 + \Delta x = -2 + \frac{2}{n}$$

$$x_2 = -2 + 2\Delta x = -2 + 2\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$x_3 = -2 + 3\Delta x = -2 + 3\left(\frac{2}{n}\right)$$

⋮

$$x_i = -2 + i\Delta x = -2 + i\left(\frac{2}{n}\right)$$

⋮

$$x_n = -2 + n\Delta x = -2 + n\left(\frac{2}{n}\right) = -2 + 2 = 0$$

Con lo cual:

$$f(x_i) = x_i + 2 = \left(-2 + \frac{2i}{n}\right) + 2 = \frac{2i}{n}$$

Y la integral definida, estará dada por:

$$\int_{-2}^0 (x + 2)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{2i}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{n^2}\right) \sum_{i=1}^n i$$

$$\int_{-2}^0 (x + 2)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{n^2}\right)\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{2}{n}\right) = 2 + 0$$

Por lo que:

$$\int_{-2}^0 (x + 2)dx = 2$$

Pero:

$$\int_{-3}^0 (|x + 2|) dx = \int_{-3}^{-2} (-x - 2) dx + \int_{-2}^0 (x + 2) dx = \frac{1}{2} + 2$$

$$\boxed{\therefore \int_{-3}^0 (|x + 2|) dx = \frac{5}{2}}$$

**20. (9 PUNTOS)**

Utilizando la definición de la integral definida, evalúe:

$$\int_{-1}^2 (3 - |x|) dx$$

**Solución:**

Debido al comportamiento de la función valor absoluto, para evaluar la integral definida, es necesario aplicar la PROPIEDAD ADITIVA:

$$\int_{-1}^2 (3 - |x|) dx = \int_{-1}^0 (3 + x) dx + \int_0^2 (3 - x) dx$$

Para ambos intervalos especificados, se establecerá una partición regular  $P$ , con  $n$  subintervalos de igual longitud y los puntos muestra  $\bar{x}_i$  se elegirán de tal forma que, en cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $\bar{x}_i = x_i$ .

Luego, a partir de la definición, la integral definida para cada intervalo estará dada por:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

Para la primera integral, se tiene que:

$$\int_{-1}^0 (3 + x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

Luego:

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{0 - (-1)}{n} = \frac{1}{n}$$

$$x_0 = -1$$

$$x_1 = -1 + \Delta x = -1 + \frac{1}{n}$$

$$\begin{aligned}
 x_2 &= -1 + 2\Delta x = -1 + 2\left(\frac{1}{n}\right) \\
 x_3 &= -1 + 3\Delta x = -1 + 3\left(\frac{1}{n}\right) \\
 &\vdots \\
 x_i &= -1 + i\Delta x = -1 + i\left(\frac{1}{n}\right) \\
 &\vdots \\
 x_n &= -1 + n\Delta x = -1 + \cancel{n}\left(\frac{1}{\cancel{n}}\right) = -1 + 1 = 0
 \end{aligned}$$

Con lo cual:

$$f(x_i) = 3 + x_i = 3 + \left(-1 + i\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 2 + \frac{i}{n}$$

Y la integral definida, estará dada por:

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^0 (3+x)dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \left(2 + \frac{i}{n}\right) \left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^n \left(2 + \frac{i}{n}\right) \\
 \int_{-1}^0 (3+x)dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \left(\sum_{i=1}^n 2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \left(2n + \frac{1}{n} \left(\frac{\cancel{n}(n+1)}{2}\right)\right) \\
 \int_{-1}^0 (3+x)dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right) \left(2n + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2n}\right) = \frac{5}{2} + 0
 \end{aligned}$$

Por lo que:

$$\int_{-1}^0 (3+x)dx = \frac{5}{2}$$

Para la segunda integral, se tiene que:

$$\int_0^2 (3-x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

Luego:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

$$\begin{aligned}
 x_0 &= 0 \\
 x_1 &= \Delta x = \frac{2}{n}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2 &= 2\Delta x = 2\left(\frac{2}{n}\right) \\x_3 &= 3\Delta x = 3\left(\frac{2}{n}\right) \\&\vdots \\x_i &= i\Delta x = i\left(\frac{2}{n}\right) \\&\vdots \\x_n &= n\Delta x = \cancel{n}\left(\frac{2}{\cancel{n}}\right) = 2\end{aligned}$$

Con lo cual:

$$f(x_i) = 3 - x_i = 3 - i\left(\frac{2}{n}\right) = 3 - \frac{2i}{n}$$

Y la integral definida, estará dada por:

$$\begin{aligned}\int_0^2 (3 - x)dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \left(3 - \frac{2i}{n}\right) \left(\frac{2}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n}\right) \sum_{i=1}^n \left(3 - \frac{2i}{n}\right) \\ \int_0^2 (3 - x)dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n}\right) \left(\sum_{i=1}^n 3 - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n i\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n}\right) \left(3n - \frac{2}{n} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\right) \\ \int_0^2 (3 - x)dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n}\right) (3n - n - 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(4 - \frac{2}{n}\right) = 4 - 0\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\int_0^2 (3 - x)dx = 4$$

Pero:

$$\int_{-1}^2 (3 - |x|)dx = \int_{-1}^0 (3 + x)dx + \int_0^2 (3 - x)dx = \frac{5}{2} + 4$$

$$\boxed{\therefore \int_{-1}^2 (3 - |x|)dx = \frac{13}{2}}$$

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

<b>AÑO:</b>	2021	<b>PERÍODO:</b>	II PAO
<b>MATERIA:</b>	Cálculo de una variable	<b>PROFESORES:</b>	Ángel M., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., Díaz R., García A., García E., Laveglia F., Ramos M., Ronquillo C.
<b>EVALUACIÓN:</b>	SEGUNDA	<b>FECHA:</b>	24/enero/2022

Tema # 5

21. (5 PUNTOS)

Califique la siguiente proposición como VERDADERA o FALSA, justificando su respuesta:

“Sea  $f$  una función continua en el intervalo  $[a, b]$  y además  $\int_a^b f(x)dx = k$ , entonces  $\int_a^b f^2(x)dx = k^2$ .”

**Solución:**

A continuación, se proporciona un posible contraejemplo que evidencie que la proposición dada es FALSA.

Considere la función continua  $f(x) = x ; x \in [0, 2]$ :

$$\int_0^2 x dx = \frac{1}{2}(x^2)|_0^2 = \frac{1}{2}(4 - 0) = 2$$

$$\int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{3}(x^3)|_0^2 = \frac{1}{3}(8 - 0) = \frac{8}{3}$$

Observe que el operador lógico principal que está presente en la proposición compuesta dada es la condicional. Para el contraejemplo seleccionado:  $a = 0, b = 2$  y  $k = 2$ .

$$\underbrace{\left( \underbrace{f \text{ es continua en } [a, b]}_{\text{Verdadero}} \wedge \underbrace{\int_a^b f(x)dx = k}_{\text{Verdadero}} \right)}_{\text{Verdadero}} \rightarrow \underbrace{\int_a^b f^2(x)dx = k^2}_{\text{Falso}} \equiv \text{Falso}$$

∴ La proposición es FALSA.

22. (5 PUNTOS)

Califique la siguiente proposición como VERDADERA o FALSA, justificando su respuesta:

*“Sea  $f$  una función continua en el intervalo  $[a, b]$  y además  $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ , entonces  $f(x) \geq 0$  en  $[a, b]$ .”*

**Solución:**

A continuación, se proporciona un posible contraejemplo que evidencie que la proposición dada es FALSA.

Considere la función continua  $f(x) = x ; x \in [-1, 2]$ :

$$\int_{-1}^2 x dx = \frac{1}{2}(x^2)|_{-1}^2 = \frac{1}{2}(4 - 1) = \frac{3}{2}$$

Nótese que la función  $f$  tiene ordenadas con valores negativos en  $[-1, 0)$  y ordenadas con valores positivos o iguales a cero en  $[0, 2]$ .

Observe que el operador lógico principal que está presente en la proposición compuesta dada es la condicional. Para el contraejemplo seleccionado:  $a = -1$  y  $b = 2$ .

$$\underbrace{\left( \underbrace{f \text{ es continua en } [a, b]}_{\text{Verdadero}} \wedge \underbrace{\int_a^b f(x)dx \geq 0}_{\text{Verdadero}} \right)}_{\text{Verdadero}} \rightarrow \underbrace{f(x) \geq 0 \text{ en } [a, b]}_{\text{Falso}} \equiv \text{Falso}$$

∴ La proposición es FALSA.

23. (5 PUNTOS)

Califique la siguiente proposición como VERDADERA o FALSA, justificando su respuesta:

*“Sea  $f$  una función continua en el intervalo  $[a, b]$  y además  $\int_a^b f(x)dx = k$ , entonces  $\int_a^b (f(x) + 1)dx = k + 1$ .”*

**Solución:**

A continuación, se proporciona un posible contraejemplo que evidencie que la proposición dada es FALSA.

Considere la función continua  $f(x) = x ; x \in [0, 2]$ :

$$\int_0^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x^2)|_0^2 = \frac{1}{2}(4 - 0) = 2$$

$$\int_0^2 (x + 1) \, dx = \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\Big|_0^2 = (2 - 0) + (2 - 0) = 4$$

Observe que el operador lógico principal que está presente en la proposición compuesta dada es la condicional. Para el contraejemplo seleccionado:  $a = 0$ ,  $b = 2$  y  $k = 2$ .

$$\underbrace{\left( \underbrace{f \text{ es continua en } [a, b]}_{\text{Verdadero}} \wedge \underbrace{\int_a^b f(x) \, dx = k}_{\text{Verdadero}} \right)}_{\text{Verdadero}} \rightarrow \underbrace{\int_a^b (f(x) + 1) \, dx = k + 1}_{\text{Falso}} \equiv \text{Falso}$$

∴ La proposición es FALSA.

#### 24. (5 PUNTOS)

Califique la siguiente proposición como VERDADERA o FALSA, justificando su respuesta:

**“Sea  $f$  una función continua en el intervalo  $[a, b]$  y además  $\int_a^b f(x) \, dx = k$ , entonces  $\int_a^b f(x - 1) \, dx = k - 1$ .”**

**Solución:**

A continuación, se proporciona un posible contraejemplo que evidencie que la proposición dada es FALSA.

Considere la función continua  $f(x) = x^2$ ;  $x \in [0, 2]$ :

$$\int_0^2 x^2 \, dx = \frac{1}{3}(x^3)|_0^2 = \frac{1}{3}(8 - 0) = \frac{8}{3}$$

$$\int_0^2 (x - 1)^2 \, dx = \frac{1}{3}(x - 1)^3 \Big|_0^2 = \frac{1}{3}(1 - (-1)) = \frac{2}{3}$$

Observe que el operador lógico principal que está presente en la proposición compuesta dada es la condicional. Para el contraejemplo seleccionado:  $a = 0$ ,  $b = 2$  y  $k = \frac{8}{3}$ .

$$\underbrace{\left( \underbrace{f \text{ es continua en } [a, b]}_{\text{Verdadero}} \wedge \underbrace{\int_a^b f(x) \, dx = k}_{\text{Verdadero}} \right)}_{\text{Verdadero}} \rightarrow \underbrace{\int_a^b f(x - 1) \, dx = k - 1}_{\text{Falso}} \equiv \text{Falso}$$

∴ La proposición es FALSA.

25. (5 PUNTOS)

Califique la siguiente proposición como VERDADERA o FALSA, justificando su respuesta:

*“Sea  $f$  una función continua en el intervalo  $[0, k]$ ,  
entonces  $\int_0^k f(kx)dx = \frac{1}{k} \int_0^{k^2} f(x)dx.$ ”*

**Solución:**

Considere la TÉCNICA DE INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN:

$$\begin{aligned} u = kx &\rightarrow du = k dx \\ x = 0 &\rightarrow u = 0 \\ x = k &\rightarrow u = k^2 \end{aligned}$$

$$\int_0^k f(kx)dx = \int_0^k f(kx) \frac{k dx}{k}$$

$$\int_0^k f(kx)dx = \int_0^{k^2} f(u) \frac{du}{k}$$

$$\int_0^k f(kx)dx = \frac{1}{k} \int_0^{k^2} f(u)du$$

$$\therefore \int_0^k f(kx)dx = \frac{1}{k} \int_0^{k^2} f(x)dx$$

∴ La proposición es VERDADERA.



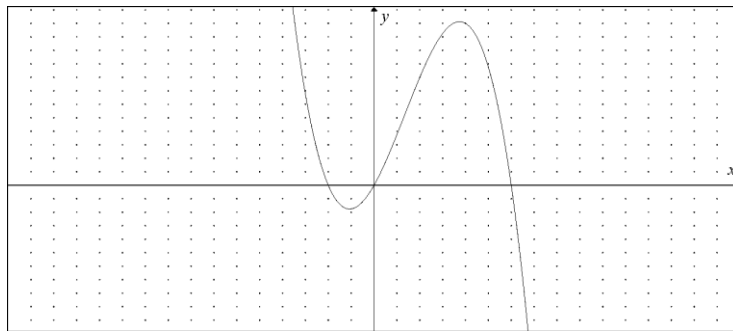
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

<b>AÑO:</b>	2021	<b>PERÍODO:</b>	II PAO
<b>MATERIA:</b>	Cálculo de una variable	<b>PROFESORES:</b>	Ángel M., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., Díaz R., García A., García E., Laveglia F., Ramos M., Ronquillo C.
<b>EVALUACIÓN:</b>	SEGUNDA	<b>FECHA:</b>	24/enero/2022

**Tema # 6**

26. (8 PUNTOS)

Considere la gráfica de la función  $y = f(x) = 3x + 2x^2 - x^3$ :



Si se define la región  $R$  en el plano cartesiano limitada por la función  $f$ , el eje  $X$  y  $|x - 1| \leq 2$ , calcule su área.

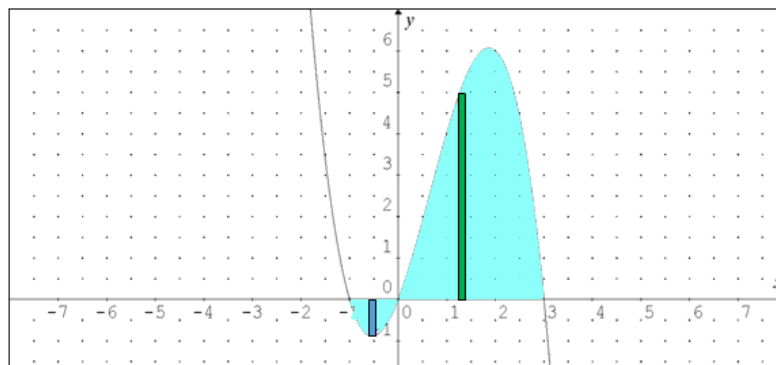
**Solución:**

Nótese que:

$$\begin{aligned} |x - 1| &\leq 2 \\ -2 &\leq x - 1 \leq 2 \\ -1 &\leq x \leq 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 3x + 2x^2 - x^3 \\ y &= x(3 + 2x - x^2) \\ y &= -x(x^2 - 2x - 3) \\ y &= -x(x - 3)(x + 1) \end{aligned}$$

Se bosqueja la región  $R$  en el plano cartesiano:



El área de la región requerida se obtendrá utilizando dos rectángulos representativos, uno para cada una de las subregiones y luego se planteará el cálculo del área de la superficie de cada rectángulo:

$$dA_1 = [0 - (3x + 2x^2 - x^3)]dx ; x \in [-1, 0]$$

$$dA_2 = [(3x + 2x^2 - x^3) - 0]dx ; x \in [0, 3]$$

Por lo que:

$$\text{Área} = A_1 + A_2$$

$$\text{Área} = \int_{-1}^0 -(3x + 2x^2 - x^3)dx + \int_0^3 (3x + 2x^2 - x^3)dx$$

$$\text{Área} = -\left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Big|_{-1}^0 + \left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^3$$

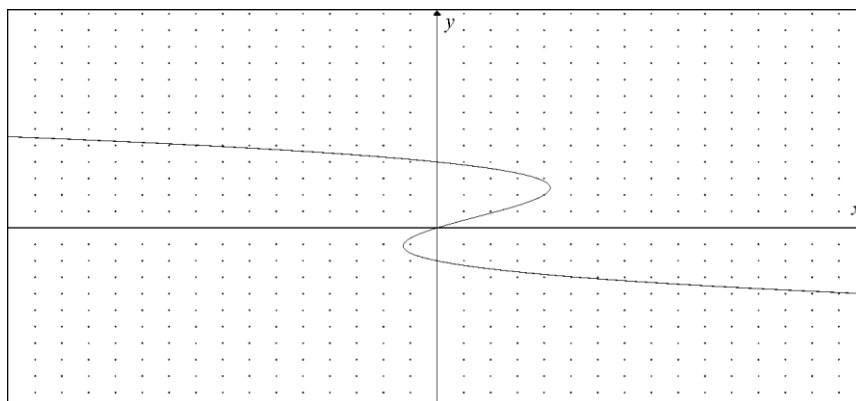
$$\text{Área} = \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{27}{2} + 18 - \frac{81}{4}\right)$$

$$\text{Área} = \frac{30}{2} - \frac{2}{3} - \frac{82}{4} + 18 = 33 - \frac{2}{3} - \frac{41}{2} = \frac{198 - 4 - 123}{6}$$

$$\therefore \text{Área} = \frac{71}{6} u^2$$

27. (8 PUNTOS)

Considere la gráfica de la relación  $x = g(y) = 2y + y^2 - y^3$ :



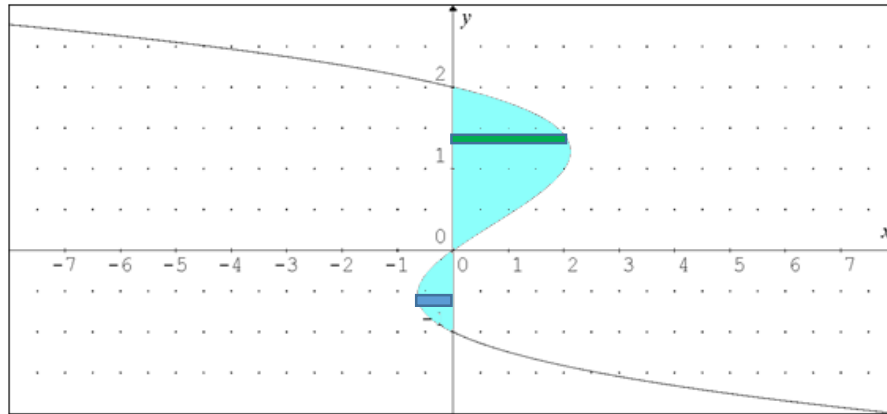
Si se define la región  $R$  en el plano cartesiano limitada por la relación  $g$ , el eje  $Y$  y  $\left|y - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{3}{2}$ , calcule su área.

**Solución:**

Nótese que:

$$\begin{aligned} \left|y - \frac{1}{2}\right| &\leq \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} &\leq y - \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2} \\ -1 &\leq y \leq 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= 2y + y^2 - y^3 \\ x &= y(2 + y - y^2) \\ x &= -y(y^2 - y - 2) \\ x &= -y(y - 2)(y + 1) \end{aligned}$$

Se bosqueja la región  $R$  en el plano cartesiano:



El área de la región requerida se obtendrá utilizando dos rectángulos representativos, uno para cada una de las subregiones y luego se planteará el cálculo del área de la superficie de cada rectángulo:

$$\begin{aligned} dA_1 &= [0 - (2y + y^2 - y^3)]dy ; y \in [-1, 0] \\ dA_2 &= [(2y + y^2 - y^3) - 0]dy ; y \in [0, 2] \end{aligned}$$

Por lo que:

$$\text{Área} = A_1 + A_2$$

$$\text{Área} = \int_{-1}^0 -(2y + y^2 - y^3)dy + \int_0^2 (2y + y^2 - y^3)dy$$

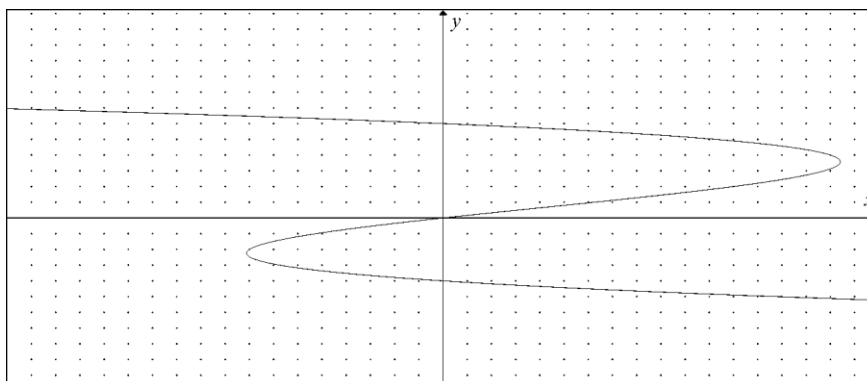
$$\text{Área} = -\left(y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4\right)\Big|_{-1}^0 + \left(y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4\right)\Big|_0^2$$

$$\text{Área} = \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\cancel{4} + \frac{8}{3} - \cancel{4}\right) = 1 + \frac{7}{3} - \frac{1}{4} = \frac{12 + 28 - 3}{12}$$

$$\boxed{\therefore \text{Área} = \frac{37}{12} u^2}$$

28. (8 PUNTOS)

Considere la gráfica de la relación  $x = g(y) = 6y + y^2 - y^3$ :



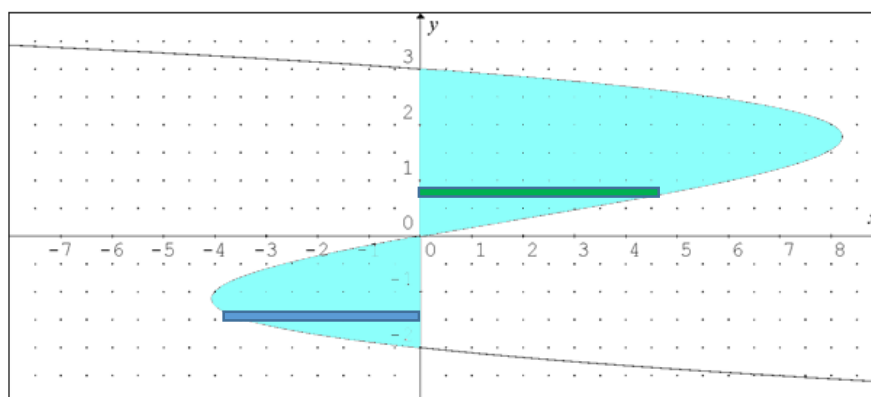
Si se define la región  $R$  en el plano cartesiano limitada por la relación  $g$ , el eje  $Y$  y  $\left|y - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{5}{2}$ , calcule su área.

Solución:

Nótese que:

$$\begin{aligned} \left|y - \frac{1}{2}\right| &\leq \frac{5}{2} & x &= 6y + y^2 - y^3 \\ -\frac{5}{2} &\leq y - \frac{1}{2} \leq \frac{5}{2} & x &= y(6 + y - y^2) \\ -2 &\leq y \leq 3 & x &= -y(y^2 - y - 6) \\ & & x &= -y(y - 3)(y + 2) \end{aligned}$$

Se bosqueja la región  $R$  en el plano cartesiano:



El área de la región requerida se obtendrá utilizando dos rectángulos representativos, uno para cada una de las subregiones y luego se planteará el cálculo del área de la superficie de cada rectángulo:

$$\begin{aligned} dA_1 &= [0 - (6y + y^2 - y^3)]dy ; y \in [-2, 0] \\ dA_2 &= [(6y + y^2 - y^3) - 0]dy ; y \in [0, 3] \end{aligned}$$

Por lo que:

$$\text{Área} = A_1 + A_2$$

$$\text{Área} = \int_{-2}^0 -(6y + y^2 - y^3)dy + \int_0^3 (6y + y^2 - y^3)dy$$

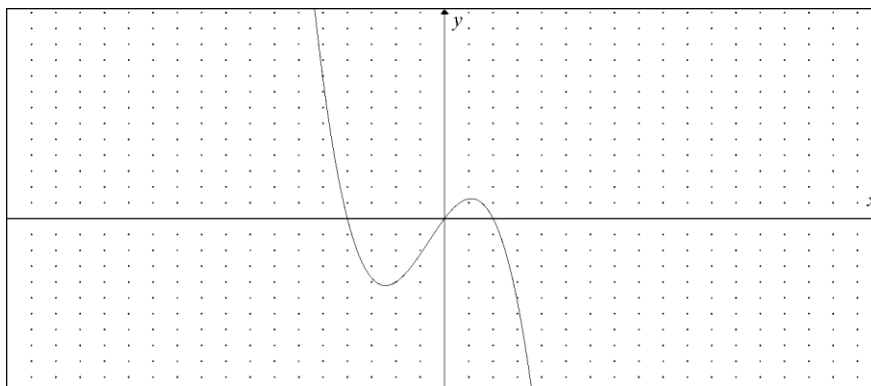
$$\text{Área} = -\left(3y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4\right)\Big|_{-2}^0 + \left(3y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4\right)\Big|_0^3$$

$$\text{Área} = \left(12 - \frac{8}{3} - 4\right) + \left(27 + 9 - \frac{81}{4}\right) = 44 - \frac{8}{3} - \frac{81}{4} = \frac{528 - 32 - 243}{12}$$

$$\therefore \text{Área} = \frac{253}{12} u^2$$

29. (8 PUNTOS)

Considere la gráfica de la función  $y = f(x) = 2x - x^2 - x^3$ :



Si se define la región  $R$  en el plano cartesiano limitada por la función  $f$ , el eje  $X$  y  $\left|x + \frac{1}{2}\right| \leq \frac{3}{2}$ , calcule su área.

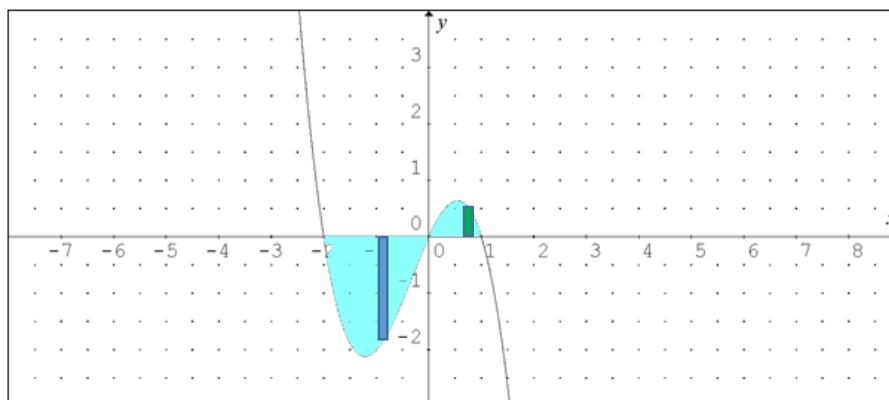
Solución:

Nótese que:

$$\begin{aligned} \left|x + \frac{1}{2}\right| &\leq \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} &\leq x + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2} \\ -2 &\leq x \leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 2x - x^2 - x^3 \\ y &= x(2 - x - x^2) \\ y &= -x(x^2 + x - 2) \\ y &= -x(x + 2)(x - 1) \end{aligned}$$

Se bosqueja la región  $R$  en el plano cartesiano:



El área de la región requerida se obtendrá utilizando dos rectángulos representativos, uno para cada una de las subregiones y luego se planteará el cálculo del área de la superficie de cada rectángulo:

$$dA_1 = [0 - (2x - x^2 - x^3)]dx ; x \in [-2, 0]$$

$$dA_2 = [(2x - x^2 - x^3) - 0]dx ; x \in [0, 1]$$

Por lo que:

$$\text{Área} = A_1 + A_2$$

$$\text{Área} = \int_{-2}^0 -(2x - x^2 - x^3)dx + \int_0^1 (2x - x^2 - x^3)dx$$

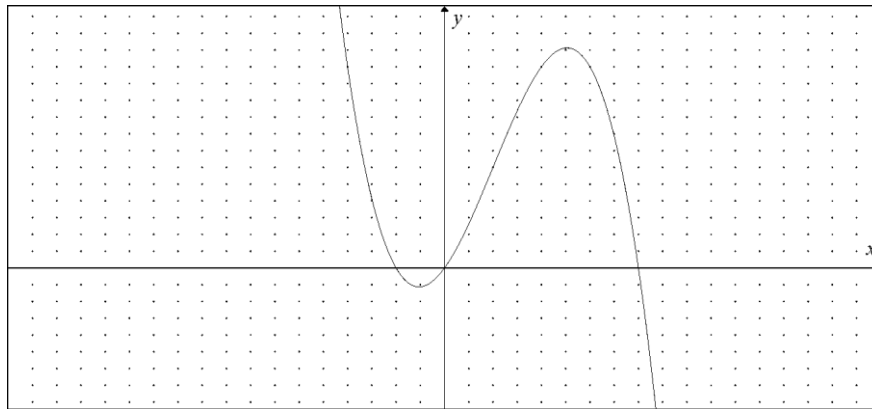
$$\text{Área} = -\left(x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Big|_{-2}^0 + \left(x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1$$

$$\text{Área} = \left(\cancel{4} + \frac{8}{3} - \cancel{4}\right) + \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{7}{3} - \frac{1}{4} = \frac{12 + 28 - 3}{12}$$

$$\therefore \text{Área} = \frac{37}{12} u^2$$

30. (8 PUNTOS)

Considere la gráfica de la función  $y = f(x) = 4x + 3x^2 - x^3$ :



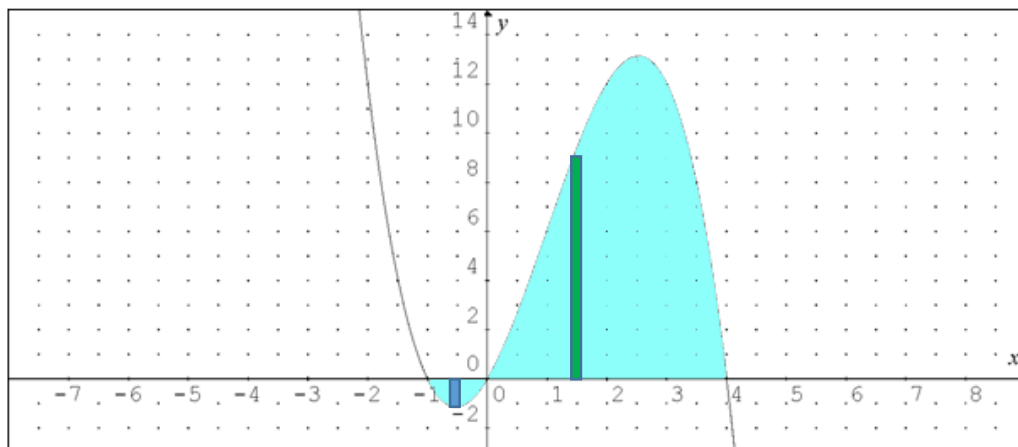
Si se define la región  $R$  en el plano cartesiano limitada por la función  $f$ , el eje  $X$  y  $|x - \frac{3}{2}| \leq \frac{5}{2}$ , calcule su área.

**Solución:**

Nótese que:

$$\begin{aligned} |x - \frac{3}{2}| &\leq \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} &\leq x - \frac{3}{2} \leq \frac{5}{2} \\ -1 &\leq x \leq 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y &= 4x + 3x^2 - x^3 \\ y &= x(4 + 3x - x^2) \\ y &= -x(x^2 - 3x - 4) \\ y &= -x(x - 4)(x + 1) \end{aligned}$$

Se bosqueja la región  $R$  en el plano cartesiano:



El área de la región requerida se obtendrá utilizando dos rectángulos representativos, uno para cada una de las subregiones y luego se planteará el cálculo del área de la superficie de cada rectángulo:

$$dA_1 = [0 - (4x + 3x^2 - x^3)]dx ; x \in [-1, 0]$$

$$dA_2 = [(4x + 3x^2 - x^3) - 0]dx ; x \in [0, 4]$$

Por lo que:

$$\text{Área} = A_1 + A_2$$

$$\text{Área} = \int_{-1}^0 -(4x + 3x^2 - x^3)dx + \int_0^4 (4x + 3x^2 - x^3)dx$$

$$\text{Área} = -\left(2x^2 + x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Big|_{-1}^0 + \left(2x^2 + x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^4$$

$$\text{Área} = \left(2 - 1 - \frac{1}{4}\right) + (32 + \cancel{64} - \cancel{64}) = 33 - \frac{1}{4} = \frac{132 - 1}{4}$$

$$\boxed{\therefore \text{Área} = \frac{131}{4} u^2}$$



FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

<b>AÑO:</b>	2021	<b>PERÍODO:</b>	II PAO
<b>MATERIA:</b>	Cálculo de una variable	<b>PROFESORES:</b>	Ángel M., Avilés J., Baquerizo G., Crow P., Díaz R., García A., García E., Laveglia F., Ramos M., Ronquillo C.
<b>EVALUACIÓN:</b>	SEGUNDA	<b>FECHA:</b>	24/enero/2022

Tema # 7

31. (9 PUNTOS)

Dada la región:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (y \geq \ln(-x)) \wedge (y \leq 0)\}$$

Bosqueje la región  $R$  en el plano cartesiano y calcule el volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar  $R$  alrededor del eje  $y = 1$ , mediante la generación de cascarones cilíndricos.

Solución:

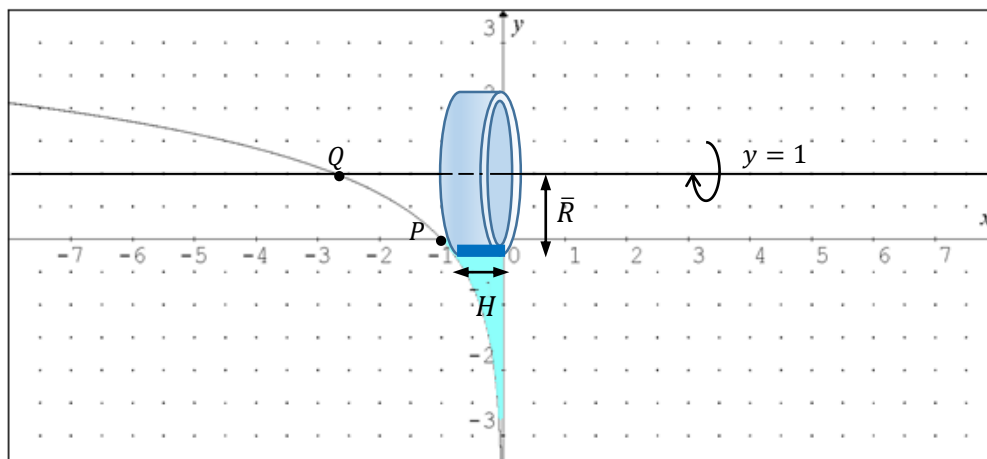
Se identifica el punto de intersección entre la gráfica de la función  $y = \ln(-x)$  y el eje  $X$ :

$$\ln(-x) = 0 \rightarrow -x = e^0 \rightarrow x = -1 \rightarrow P(-1, 0)$$

Se identifica el punto de intersección entre la gráfica de la función  $y = \ln(-x)$  y el eje de rotación  $y = 1$ :

$$\ln(-x) = 1 \rightarrow -x = e^1 \rightarrow x = -e \rightarrow Q(-e, 1)$$

Se bosqueja la región  $R$ :



Tal como se puede observar, la región  $R$  constituye un subconjunto del  $III$  cuadrante. En este caso, se considerará un rectángulo representativo horizontal y al rotarlo con respecto a la recta  $y = 1$ , se generará el cascarón cilíndrico correspondiente, para el cual se establece que:

$$\bar{R} = 1 - y \quad H = e^y$$

$$dV = 2\pi\bar{R}H = 2\pi(1 - y)(e^y)dy$$

Se plantea el cálculo del volumen como una integral definida, la cual resulta ser una integral impropia:

$$V = \int_{-\infty}^0 dV = 2\pi \int_{-\infty}^0 (1 - y)(e^y)dy = 2\pi \left[ \lim_{a \rightarrow -\infty} \left( \int_a^0 (1 - y)e^y dy \right) \right]$$

Se obtiene la antiderivada general correspondiente:

$$\int (1 - y)(e^y)dy = \int e^y dy - \int y e^y dy$$

$$\begin{aligned} u = y &\rightarrow du = dy \\ dv = e^y dy &\rightarrow v = e^y \end{aligned}$$

$$\int (1 - y)e^y dy = e^y - \left( ye^y - \int e^y dy \right)$$

$$\int (1 - y)e^y dy = e^y - ye^y + e^y + C$$

$$\int (1 - y)e^y dy = 2e^y - ye^y + C$$

Por lo que:

$$V = 2\pi \left[ \lim_{a \rightarrow -\infty} (2e^y - ye^y) \Big|_a^0 \right] = 2\pi \left[ \lim_{a \rightarrow -\infty} ((2e^0 - 0e^0) - (2e^a - ae^a)) \right]$$

Se calcula el límite:

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} (2 - 0 - 2e^a + ae^a) = 2 - 2 \left( \lim_{a \rightarrow -\infty} (e^a) \right) + \left( \lim_{a \rightarrow -\infty} (ae^a) \right)$$

Pero, aplicando el teorema de L'Hôpital:

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \left( \frac{a}{e^{-a}} \right) = - \lim_{a \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{e^{-a}} \right) = 0$$

Entonces:

$$V = 2\pi(2 - 2(0) + 0)$$

$$\boxed{\therefore V = 4\pi u^3}$$

**32. (9 PUNTOS)**

**Dada la región:**

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \left( y \leq \log_{\frac{1}{2}}(x) \right) \wedge (y \geq 1) \right\}$$

**Bosqueje la región  $R$  en el plano cartesiano y calcule el volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar  $R$  alrededor del eje  $y = 0$ , mediante la generación de cascarones cilíndricos.**

**Solución:**

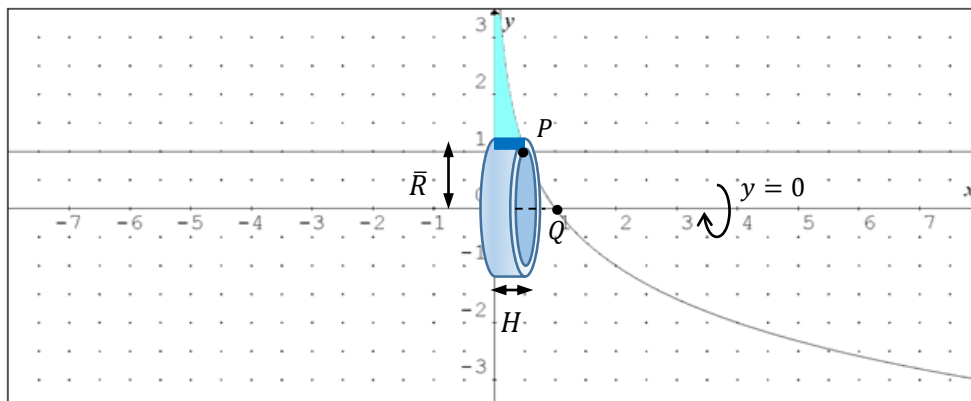
Se identifica el punto de intersección entre la gráfica de la función  $y = \log_{\frac{1}{2}}(x)$  y la recta  $y = 1$ :

$$\log_{\frac{1}{2}}(x) = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow P\left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

Se identifica el punto de intersección entre la gráfica de la función  $y = \log_{\frac{1}{2}}(x)$  y el eje de rotación  $y = 0$ :

$$\log_{\frac{1}{2}}(x) = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow Q(1, 0)$$

Se bosqueja la región  $R$ :



Tal como se puede observar, la región  $R$  constituye un subconjunto del  $I$  cuadrante. En este caso, se considerará un rectángulo representativo horizontal y al rotarlo con respecto a la recta  $y = 0$ , se generará el cascarón cilíndrico correspondiente, para el cual se establece que:

$$\bar{R} = y \quad H = \left(\frac{1}{2}\right)^y = 2^{-y}$$

$$dV = 2\pi\bar{R}H = 2\pi y 2^{-y} dy$$

Se plantea el cálculo del volumen como una integral definida, la cual resulta ser una integral impropia:

$$V = \int_1^{+\infty} dV = 2\pi \int_1^{+\infty} y 2^{-y} dy = 2\pi \left[ \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \int_1^b y 2^{-y} dy \right) \right]$$

Se obtiene la antiderivada general correspondiente:

$$\begin{aligned} u = y &\rightarrow du = dy \\ dv = 2^{-y} dy &\rightarrow v = -\frac{2^{-y}}{\ln(2)} \end{aligned}$$

$$\int y 2^{-y} dy = -\frac{1}{\ln(2)} y 2^{-y} + \frac{1}{\ln(2)} \int 2^{-y} dy = -\frac{1}{\ln(2)} y 2^{-y} - \frac{1}{\ln^2(2)} 2^{-y} + C$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} V &= -2\pi \left[ \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\ln(2)} y 2^{-y} + \frac{1}{\ln^2(2)} 2^{-y} \right) \Big|_1^b \right] \\ V &= -2\pi \left[ \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \left( \frac{1}{\ln(2)} b 2^{-b} + \frac{1}{\ln^2(2)} 2^{-b} \right) - \left( \frac{1}{2\ln(2)} + \frac{1}{2\ln^2(2)} \right) \right) \right] \end{aligned}$$

Se calcula el límite:

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\ln(2)} b 2^{-b} + \frac{1}{\ln^2(2)} 2^{-b} - \frac{1}{2\ln(2)} - \frac{1}{2\ln^2(2)} \right) \\ = \left( \frac{1}{\ln(2)} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{b}{2^b} \right) \right) + \frac{1}{\ln^2(2)} \left( \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2^b} \right) \right) - \frac{1}{2\ln(2)} - \frac{1}{2\ln^2(2)} \end{aligned}$$

Pero, aplicando el teorema de L'Hôpital:

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{b}{2^b} \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2^b \ln(2)} \right) = 0$$

Entonces:

$$V = \cancel{2}\pi \left( 0 + \frac{1}{\ln^2(2)}(0) + \frac{1}{2\ln(2)} + \frac{1}{2\ln^2(2)} \right)$$

$$\therefore V = \frac{\pi}{\ln(2)} \left( 1 + \frac{1}{\ln(2)} \right) u^3$$

### 33. (9 PUNTOS)

Dada la región:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (y \leq 10^x) \wedge (y \geq 0) \wedge (x \leq 0)\}$$

Bosqueje la región  $R$  en el plano cartesiano y calcule el volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar  $R$  alrededor del eje  $x = 1$ , mediante la generación de cascarones cilíndricos.

Solución:

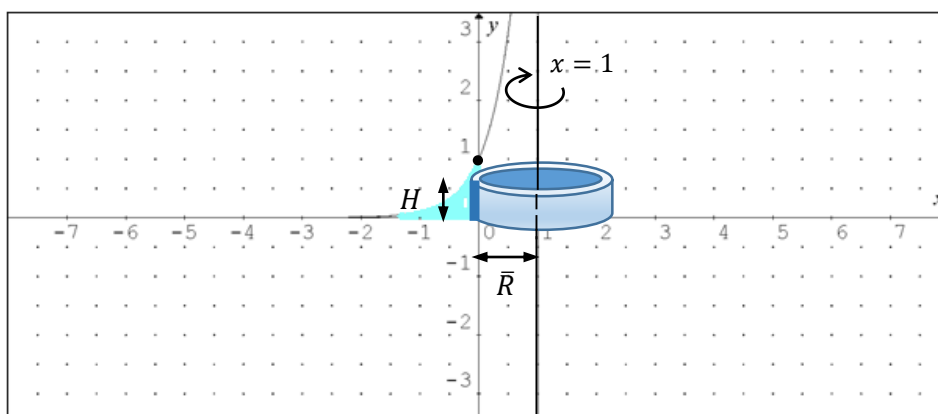
Se identifica el punto de intersección entre la gráfica de la función  $y = 10^x$  y el eje  $Y$ :

$$x = 0 \rightarrow 10^0 = 1 \rightarrow P(0, 1)$$

Se identifica el punto de intersección entre la gráfica de la función  $y = 10^x$  y el eje de rotación  $x = 1$ :

$$x = 1 \rightarrow 10^1 = 10 \rightarrow Q(1, 10)$$

Se bosqueja la región  $R$ :



Tal como se puede observar, la región  $R$  constituye un subconjunto del II cuadrante. En este caso, se considerará un rectángulo representativo vertical y al rotarlo con respecto a la recta  $x = 1$ , se generará el cascarón cilíndrico correspondiente, para el cual se establece que:

$$\bar{R} = 1 - x \quad H = 10^x$$

$$dV = 2\pi\bar{R}H = 2\pi(1-x)(10^x)dx$$

Se plantea el cálculo del volumen como una integral definida, la cual resulta ser una integral impropia:

$$V = \int_{-\infty}^0 dV = 2\pi \int_{-\infty}^0 (1-x)(10^x) dx = 2\pi \left[ \lim_{a \rightarrow -\infty} \left( \int_a^0 (1-x)10^x dx \right) \right]$$

Se obtiene la antiderivada general correspondiente:

$$\int (1-x)10^x dx = \int 10^x dx - \int x 10^x dx$$

$$\begin{aligned} u = x &\rightarrow du = dx \\ dv = 10^x dx &\rightarrow v = \frac{10^x}{\ln(10)} \end{aligned}$$

$$\int (1-x)10^x dx = \frac{1}{\ln(10)} 10^x - \left( \frac{1}{\ln(10)} x 10^x - \frac{1}{\ln(10)} \int 10^x dx \right)$$

$$\int (1-x)10^x dx = \frac{1}{\ln(10)} 10^x - \frac{1}{\ln(10)} x 10^x + \frac{1}{\ln^2(10)} 10^x + C$$

$$\int (1-x)10^x dx = \frac{1}{\ln(10)} \left( 1 + \frac{1}{\ln(10)} \right) 10^x - \frac{1}{\ln(10)} x 10^x + C$$

Por lo que:

$$V = 2\pi \left[ \lim_{a \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{\ln(10)} \left( 1 + \frac{1}{\ln(10)} \right) 10^x - \frac{1}{\ln(10)} x 10^x \right) \Big|_a^0 \right]$$

$$V = \frac{2\pi}{\ln(10)} \left[ \lim_{a \rightarrow -\infty} \left( \left( 1 + \frac{1}{\ln(10)} \right) 10^x - x 10^x \right) \Big|_a^0 \right]$$

$$V = \frac{2\pi}{\ln(10)} \left[ \lim_{a \rightarrow -\infty} \left( \left( 1 + \frac{1}{\ln(10)} \right) 10^0 - 0 \cdot 10^0 - \left( \left( 1 + \frac{1}{\ln(10)} \right) 10^a - a 10^a \right) \right) \right]$$

Se calcula el límite:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow -\infty} \left( 1 + \frac{1}{\ln(10)} - 0 - \left( 1 + \frac{1}{\ln(10)} \right) 10^a + a 10^a \right) \\ = 1 + \frac{1}{\ln(10)} - \left( 1 + \frac{1}{\ln(10)} \right) \left( \lim_{a \rightarrow -\infty} (10^a) \right) + \left( \lim_{a \rightarrow -\infty} (a 10^a) \right) \end{aligned}$$

Pero, aplicando el teorema de L'Hôpital:

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \left( \frac{a}{10^{-a}} \right) = - \lim_{a \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{10^{-a} \ln(10)} \right) = 0$$

Entonces:

$$V = \frac{2\pi}{\ln(10)} \left( 1 + \frac{1}{\ln(10)} - \left( 1 + \frac{1}{\ln(10)} \right) (0) + 0 \right)$$

$$\therefore V = \frac{2\pi}{\ln(10)} \left( 1 + \frac{1}{\ln(10)} \right) u^3$$

### 34. (9 PUNTOS)

Dada la región:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (y \geq \ln(x)) \wedge (y \leq 0)\}$$

Bosqueje la región  $R$  en el plano cartesiano y calcule el volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar  $R$  alrededor del eje  $y = 2$ , mediante la generación de cascarones cilíndricos.

Solución:

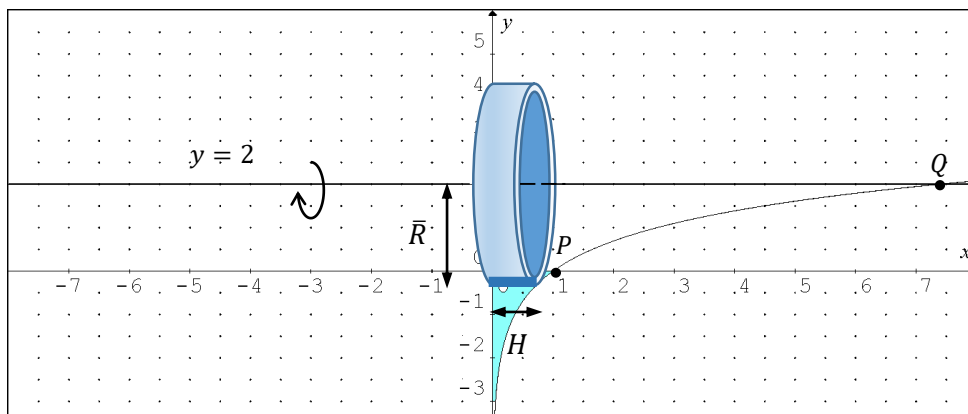
Se identifica el punto de intersección entre la gráfica de la función  $y = \ln(x)$  y el eje  $X$ :

$$\ln(x) = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow P(1, 0)$$

Se identifica el punto de intersección entre la gráfica de la función  $y = \ln(x)$  y el eje de rotación  $y = 2$ :

$$\ln(x) = 2 \rightarrow x = e^2 \rightarrow Q(e^2, 2)$$

Se bosqueja la región  $R$ :



Tal como se puede observar, la región  $R$  constituye un subconjunto del  $IV$  cuadrante. En este caso, se considerará un rectángulo representativo horizontal y al rotarlo con respecto a la recta  $y = 2$ , se generará el cascarón cilíndrico correspondiente, para el cual se establece que:

$$\bar{R} = 2 - y \quad H = e^y$$

$$dV = 2\pi\bar{R}H = 2\pi(2 - y)(e^y)dy$$

Se plantea el cálculo del volumen como una integral definida, la cual resulta ser una integral impropia:

$$V = \int_{-\infty}^0 dV = 2\pi \int_{-\infty}^0 (2 - y)(e^y) dy = 2\pi \left[ \lim_{a \rightarrow -\infty} \left( \int_a^0 (2 - y)e^y dy \right) \right]$$

Se obtiene la antiderivada general correspondiente:

$$\int (2 - y)(e^y) dy = 2 \int e^y dy - \int y e^y dy$$

$$\begin{aligned} u = y &\rightarrow du = dy \\ dv = e^y dy &\rightarrow v = e^y \end{aligned}$$

$$\int (2 - y)e^y dy = 2e^y - \left( ye^y - \int e^y dy \right) = 2e^y - ye^y + e^y + C = 3e^y - ye^y + C$$

Por lo que:

$$V = 2\pi \left[ \lim_{a \rightarrow -\infty} (3e^y - ye^y)|_a^0 \right] = 2\pi \left[ \lim_{a \rightarrow -\infty} ((3e^0 - 0e^0) - (3e^a - ae^a)) \right]$$

Se calcula el límite:

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} (3 - 0 - 3e^a + ae^a) = 3 - 3 \left( \lim_{a \rightarrow -\infty} (e^a) \right) + \left( \lim_{a \rightarrow -\infty} (ae^a) \right)$$

Pero, aplicando el teorema de L'Hôpital:

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \left( \frac{a}{e^{-a}} \right) = - \lim_{a \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{e^{-a}} \right) = 0$$

Entonces:

$$V = 2\pi(3 - 3(0) + 0)$$

$$\boxed{\therefore V = 6\pi u^3}$$



35. (9 PUNTOS)

Dada la región:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (y \leq -\ln(x)) \wedge (y \geq 0)\}$$

Bosqueje la región  $R$  en el plano cartesiano y calcule el volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar  $R$  alrededor del eje  $y = -2$ , mediante la generación de cascarones cilíndricos.

Solución:

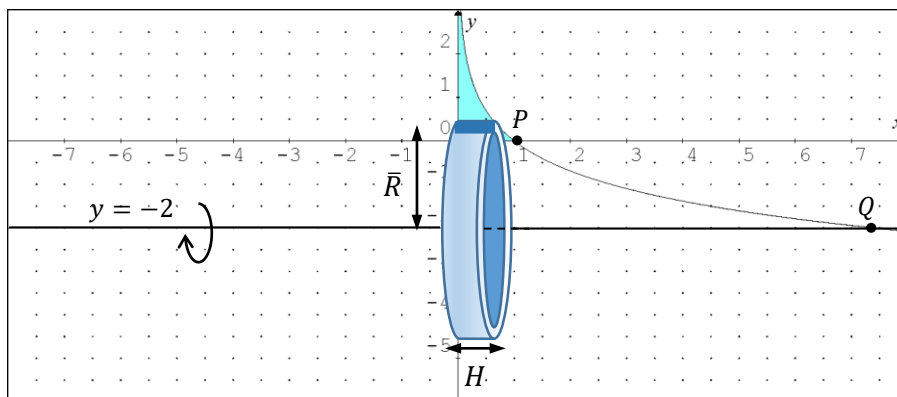
Se identifica el punto de intersección entre la gráfica de la función  $y = -\ln(x)$  y el eje  $X$ :

$$-\ln(x) = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow P(1, 0)$$

Se identifica el punto de intersección entre la gráfica de la función  $y = \ln(x)$  y el eje de rotación  $y = -2$ :

$$-\ln(x) = -2 \rightarrow x = e^2 \rightarrow Q(e^2, -2)$$

Se bosqueja la región  $R$ :



Tal como se puede observar, la región  $R$  constituye un subconjunto del  $I$  cuadrante. En este caso, se considerará un rectángulo representativo horizontal y al rotarlo con respecto a la recta  $y = -2$ , se generará el cascarón cilíndrico correspondiente, para el cual se establece que:

$$\bar{R} = 2 + y \quad H = e^{-y}$$

$$dV = 2\pi\bar{R}H = 2\pi(2 + y)(e^{-y})dy$$

Se plantea el cálculo del volumen como una integral definida, la cual resulta ser una integral impropia:

$$V = \int_0^{+\infty} dV = 2\pi \int_0^{+\infty} (2+y)(e^{-y}) dy = 2\pi \left[ \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \int_0^b (2+y)e^{-y} dy \right) \right]$$

Se obtiene la antiderivada general correspondiente:

$$\int (2+y)(e^{-y}) dy = 2 \int e^{-y} dy + \int y e^{-y} dy$$

$$\begin{aligned} u = y &\rightarrow du = dy \\ dv = e^{-y} dy &\rightarrow v = -e^{-y} \end{aligned}$$

$$\int (2+y)e^{-y} dy = -2e^{-y} + \left( -ye^{-y} + \int e^{-y} dy \right) = -2e^{-y} - ye^{-y} - e^{-y} + C$$

$$\int (2+y)e^{-y} dy = -3e^{-y} - ye^{-y} + C$$

Por lo que:

$$V = -2\pi \left[ \lim_{b \rightarrow +\infty} (3e^{-y} + ye^{-y}) \Big|_0^b \right] = -2\pi \left[ \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( (3e^{-b} + be^{-b}) - (3e^0 + 0e^0) \right) \right]$$

Se calcula el límite:

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} (3e^{-b} + be^{-b} - 3 - 0) = 3 \left( \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{e^b} \right) \right) + \left( \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{b}{e^b} \right) \right) - 3$$

Pero, aplicando el teorema de L'Hôpital:

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{b}{e^b} \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{e^b} \right) = 0$$

Entonces:

$$V = -2\pi(3(0) + 0 - 3)$$

$$\boxed{\therefore V = 6\pi u^3}$$