

T  
551.4702  
C813

**ESCUELA SUPERIOR  
POLITECNICA DEL LITORAL**

**FACULTAD DE INGENIERIA MARITIMA Y CIENCIAS DEL MAR**

**Estudio Estadístico de un Registro Analógico  
de Olas**

**TESIS DE GRADO**

**Previa a la obtención del Título:**

**LICENCIADO EN OCEANOGRAFIA**

**Presentado por:**

**MARIA DEL PILAR CORNEJO RODRIGUEZ**



**BIBLIOTECA**

**GUAYAQUIL - ECUADOR\***

**1984**

## AGRADECIMIENTO



*Un agradecimiento especial a quien siempre me ha orientado y ayudado cuando he necesitado de ello, mi Director de Tesis el M.Sc. Jorge Calderón Velásquez.*

*Agradezco también a todos los que pusieron su granito de arena en la elaboración de esta Tesis.*

DEDICATORIA



BIBLIOTECA

*A mis padres, quienes  
han compartido conmi-  
go todos mis momentos,  
empujándome siempre ha-  
cia adelante.*

*Marco Velarde*

.....  
Ing. Marco Velarde Toscano  
Subdecano Facultad Ing. Marítima  
y Ciencias del Mar  
Presidente Tribunal

*Waldemar*

.....  
Jorge Calderón Velásquez, M.Sc.  
Director de Tesis

*Enrique Sánchez Cuadros*

.....  
Ing. Enrique Sánchez Cuadros  
Miembro Tribunal

*Alexandro Ponce*

.....  
~~Lda. Alexandro Ponce, M.Sc.~~  
Miembro Tribunal



BIBLIOTECA



DECLARACION EXPRESA

"La responsabilidad por los hechos, ideas y doctrinas expuestos en esta tesis, me corresponden exclusivamente; y, el patrimonio intelectual de la misma, a la ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL".

(Reglamento de Exámenes y Títulos profesionales de la ESPOL).

*Maria del Pilar Cornejo R.*  
MARIA DEL PILAR CORNEJO RODRIGUEZ



BIBLIOTECA



## RESUMEN

BIBLIOTECA

La serie de tiempo analizada corresponde a alturas de olas, esta fue registrada por un olígrafo colocado en el área de estudio que se indica en la figura N°18 , en la provincia de Manabí.

La serie de tiempo consta de treinta registros digitalizados por medio de un computador Hewlet-Packard.

La técnica aplicada para estudiar dicha serie fue el análisis espectral, por medio del método indirecto (vía autocovarianza); de esta forma fueron calculados los espectros de potencia para los treinta registros. Al mismo tiempo se hizo el análisis estadístico convencional.

A través de los estimados espectrales se han podido determinar relaciones funcionales entre los diferentes parámetros espectrales y los parámetros de las olas: altura significativa y altura media como función de la varianza total (momento espectral de orden cero); período medio como función de los momentos espectrales de orden cero y segundo orden; el período significativo, como aquel correspondiente a la máxima ordenada de potencia.

Del análisis de los resultados obtenidos se concluye que en el área de estudio estuvieron presentes simultáneamente trenes de onda, cuyos períodos significativos fueron: 17.05 seg., 15.30 seg. y 14.17 seg.

Los valores promedios de los parámetros de las olas fueron: altura me-

dia promedio 1.24 m, altura significativa promedio 1.89 m y período medio promedio 15.61 seg.

Además a través de esta tesis se ha podido comprender la importancia de la aplicación de las técnicas de análisis espectral a las series de tiempo.

# INDICE GENERAL



	Pág.
RESUMEN .....	VI
INDICE GENERAL .....	VIII
INTRODUCCION .....	11
I. ASPECTOS TEORICOS.....	13
1.1. Características generales de las olas.....	13
1.1.1. Generación de las olas por el viento...	16
1.1.2. Las olas y la topografía submarina.....	20
1.1.3. Clasificación de las olas oceánicas....	25
1.2. Las olas como una suma de sinusoides.....	27
1.2.1. La suma de dos sinusoides-interferencia, modulación de la amplitud y velocidad de grupo.....	27
1.2.2. Suma de un número infinito de sinusoides, espectro de amplitud con la configuración de la superficie, el paquete gaussiano...	38
1.2.3. Suma de un número infinito de sinusoides, configuración de la superficie, el pro- blema de Cauchy-Poisson de la onda.....	47
1.2.4. Una suma de infinitos sinusoides, confi- guración del espectro de amplitudes, tren de olas de Pierson en función de tres <u>va</u> riables.....	65
1.3. Las olas como un proceso estocástico .....	70
1.3.1. Estacionaridad y ergodicidad.....	73

	Pág.
II. METODOLOGIA.....	76
2.1. Naturaleza de los datos.....	76
2.1.1. Ubicación geográfica del sensor de <u>pre</u> <u>sión</u> .....	76
2.1.2. Instrumento de medida.....	76
2.1.3. Recolección de datos.....	80
2.1.4. Proceso de digitalización.....	80
2.2. Parámetros Estadísticos.....	87
2.2.1. Teoría de Probabilidad.....	87
2.2.2. Distribución Normal (gaussiana).....	89
2.2.3. Intervalos de confianza .....	91
2.2.4. Varianza y media .....	93
2.2.5. Momentos espectrales.....	94
2.3. Análisis espectral.....	96
2.3.1. El análisis de Fourier de series de - tiempo.....	96
2.3.1.1. Procesos Estocásticos y series de tiempo.....	96
2.3.1.2. Descripción de una serie de tiempo en el dominio del - tiempo.....	100
2.3.1.3. El espectro de densidad de potencia.....	105
2.3.2. Aplicación del análisis espectral de oleajes.....	121



	Pág.
III. PROCESAMIENTO. . . . .	124
3.1. Documentación del programa de computadora . . . . .	124
3.1.1. Descripción del programa . . . . .	125
3.1.2. Entrada de datos . . . . .	125
3.1.3. Descripción de las variables . . . . .	126
3.2. Resultados del procesamiento. . . . .	134
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES . . . . .	156
ANEXO A: Gráficos de algunas series de datos . . . . .	160
ANEXO B: Gráficos de porcentaje de altura. . . . .	165
ANEXO C: Gráficos de porcentaje de períodos. . . . .	169
ANEXO D: Espectro de potencia. . . . .	173
ANEXO E: Gráficos del espectro de potencia . . . . .	183
BIBLIOGRAFIA . . . . .	187

## INTRODUCCION

El objetivo de esta tesis fue el de realizar el estudio de un registro analógico de olas por métodos estadísticos no convencionales en nuestro medio, como es el análisis espectral y para este caso específico, el método directo (vía autocovarianza)

Las ventajas del uso del análisis espectral son muy claras; este sirve para determinar características y propiedades de las series de tiempo que no se revelen a simple vista, ni con los métodos convencionales de análisis. Además tenemos que la implementación de estas técnicas en programas de computadora, en una época en que cualquier persona puede disponer, de una, facilita sobre manera los cálculos y permite tener más tiempo para el análisis de los resultados obtenidos.

En el primer capítulo se tratan los aspectos teóricos de las olas, realizando un estudio general de sus características, del tratamiento matemático que se aplica para el entendimiento de las mismas, así como del proceso aleatorio que representan.

En el segundo capítulo se describe la metodología utilizada en la recolección, análisis y procesamiento de la serie original de datos, hablando un poco sobre la forma en que fueron obtenidos y los parámetros de los mismos que se pueden determinar y las técnicas de análisis espectral aplicadas.

En el último capítulo, tenemos la documentación del programa de computadora utilizada, un análisis de los resultados del procesamiento en la información.





## RESUMEN

BIBLIOTECA

La serie de tiempo analizada corresponde a alturas de olas, esta fue registrada por un olígrafo colocado en el área de estudio que se indica en la figura N°18 , en la provincia de Manabí.

La serie de tiempo consta de treinta registros digitalizados por medio de un computador Hewlet-Packard.

La técnica aplicada para estudiar dicha serie fue el análisis espectral, por medio del método indirecto (vía autocovarianza); de esta forma fueron calculados los espectros de potencia para los treinta registros. Al mismo tiempo se hizo el análisis estadístico convencional.

A través de los estimados espectrales se han podido determinar relaciones funcionales entre los diferentes parámetros espectrales y los parámetros de las olas: altura significativa y altura media como función de la varianza total (momento espectral de orden cero); período medio como función de los momentos espectrales de orden cero y segundo orden; el período significativo, como aquel correspondiente a la máxima ordenada de potencia.

Del análisis de los resultados obtenidos se concluye que en el área de estudio estuvieron presentes simultáneamente trenes de onda, cuyos períodos significativos fueron: 17.05 seg., 15.30 seg. y 14.17 seg.

Los valores promedios de los parámetros de las olas fueron: altura me-

dia promedio 1.24 m, altura significativa promedio 1.89 m y período medio promedio 15.61 seg.

Además a través de esta tesis se ha podido comprender la importancia de la aplicación de las técnicas de análisis espectral a las series de tiempo.



# INDICE GENERAL



	Pág.
RESUMEN .....	VI
INDICE GENERAL .....	VIII
INTRODUCCION .....	11
I. ASPECTOS TEORICOS.....	13
1.1. <i>Características generales de las olas.....</i>	13
1.1.1. <i>Generación de las olas por el viento...</i>	16
1.1.2. <i>Las olas y la topografía submarina.....</i>	20
1.1.3. <i>Clasificación de las olas oceánicas....</i>	25
1.2. <i>Las olas como una suma de sinusoides.....</i>	27
1.2.1. <i>La suma de dos sinusoides-interferencia, modulación de la amplitud y velocidad de grupo.....</i>	27
1.2.2. <i>Suma de un número infinito de sinusoides, espectro de amplitud con la configuración de la superficie, el paquete gaussiano...</i>	38
1.2.3. <i>Suma de un número infinito de sinusoides, configuración de la superficie, el problema de Cauchy-Poisson de la onda.....</i>	47
1.2.4. <i>Una suma de infinitos sinusoides, configuración del espectro de amplitudes, tren de olas de Pierson en función de tres variables.....</i>	65
1.3. <i>Las olas como un proceso estocástico .....</i>	70
1.3.1. <i>Estacionaridad y ergodicidad.....</i>	73

	Pág.
II. METODOLOGIA.....	76
2.1. Naturaleza de los datos.....	76
2.1.1. Ubicación geográfica del sensor de presión.....	76
2.1.2. Instrumento de medida.....	76
2.1.3. Recolección de datos.....	80
2.1.4. Proceso de digitalización.....	80
2.2. Parámetros Estadísticos.....	87
2.2.1. Teoría de Probabilidad.....	87
2.2.2. Distribución Normal (gaussiana).....	89
2.2.3. Intervalos de confianza .....	91
2.2.4. Varianza y media .....	93
2.2.5. Momentos espectrales.....	94
2.3. Análisis espectral.....	96
2.3.1. El análisis de Fourier de series de tiempo.....	96
2.3.1.1. Procesos Estocásticos y series de tiempo.....	96
2.3.1.2. Descripción de una serie de tiempo en el dominio del tiempo.....	100
2.3.1.3. El espectro de densidad de potencia.....	105
2.3.2. Aplicación del análisis espectral de oleajes.....	121

	Pág.
III. PROCESAMIENTO. . . . .	124
3.1. Documentación del programa de computadora . . . . .	124
3.1.1. Descripción del programa . . . . .	125
3.1.2. Entrada de datos . . . . .	125
3.1.3. Descripción de las variables . . . . .	126
3.2. Resultados del procesamiento. . . . .	134
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES . . . . .	156
ANEXO A: Gráficos de algunas series de datos . . . . .	160
ANEXO B: Gráficos de porcentaje de altura. . . . .	165
ANEXO C: Gráficos de porcentaje de períodos. . . . .	169
ANEXO D: Espectro de potencia. . . . .	173
ANEXO E: Gráficos del espectro de potencia . . . . .	183
BIBLIOGRAFIA . . . . .	187

## INTRODUCCION

El objetivo de esta tesis fue el de realizar el estudio de un registro analógico de olas por métodos estadísticos no convencionales en nuestro medio, como es el análisis espectral y para este caso específico, el método directo (vía autocovarianza)

Las ventajas del uso del análisis espectral son muy claras; este sirve para determinar características y propiedades de las series de tiempo que no se revelen a simple vista, ni con los métodos convencionales de análisis. Además tenemos que la implementación de estas técnicas en programas de computadora, en una época en que cualquier persona puede disponer, de una, facilita sobre manera los cálculos y permite tener más tiempo para el análisis de los resultados obtenidos.

En el primer capítulo se tratan los aspectos teóricos de las olas, realizando un estudio general de sus características, del tratamiento matemático que se aplica para el entendimiento de las mismas, así como del proceso aleatorio que representan.

En el segundo capítulo se describe la metodología utilizada en la recolección, análisis y procesamiento de la serie original de datos, hablando un poco sobre la forma en que fueron obtenidos y los parámetros de los mismos que se pueden determinar y las técnicas de análisis espectral aplicadas.

En el último capítulo, tenemos la documentación del programa de computadora utilizada, un análisis de los resultados del procesamiento en la información.





## CAPITULO 1

### ASPECTOS TEORICOS

#### 1.1. Características Generales de las Olas

Las olas constituyen una clase importante de movimiento en el océano. Ellas se desarrollan en una variedad infinita de tamaños, desde los pequeños rizos, hasta las gigantes olas de marea. Curiosamente sus formas son más o menos semejantes a un senoide, lo que ha permitido la aplicación de la teoría física de oscilación, al análisis de las olas oceánicas.

Veamos ahora algunas propiedades características de estas perturbaciones, las cuales son comunes a todas las oscilaciones.

Supongamos ahora que tenemos una progresión de olas con amplitudes pequeñas viajando en la superficie con una altura  $h$  sobre el fondo sólido. Si asumimos que el desplazamiento, oscilatorio de la superficie  $\xi$ , de la profundidad media tiene la forma de un senoide, entonces:

$$\xi = A \text{ sen } \{k(x-ct)\}, \quad (1.1.)$$

donde  $A$  es el desplazamiento máximo o amplitud,  $t$  se refiere al tiempo, y  $K$  denota el número de onda. La velocidad de fase  $c$  de la onda, es la distancia horizontal que viaja una partícula de la ola por unidad de tiempo. El período  $T$  es el tiempo entre el paso de idénticas partículas de olas observadas en un punto fijo. El pe-



riodo y la velocidad de fase están relacionados por la siguiente fórmula:

$$C = L / T = L \cdot f \quad (1.2)$$

La longitud de onda  $L$ , de un tren de olas está definida como la distancia horizontal que separa dos puntos que tienen la misma fase de oscilación; y la frecuencia  $f$ , ( $1/T$ ), es el número de olas que pasan por un punto fijo en la unidad de tiempo. (Ver figura N°1).

Las ondas en el océano presentan un comportamiento, mucho más complicado que el desarrollado son las diferentes teorías que tenemos. La superficie del océano está compuesta por una serie de elementos de ola que varían ampliamente de un lugar a otro, en dirección, velocidad y longitud. A pesar de la variedad en geometría y origen de las olas propias del mar, ellas han sido clasificadas dentro del marco de las oscilaciones ideales. Posiblemente, para un oceanógrafo, las más importantes sean las variaciones en el régimen de olas de gravedad, donde la tensión superficial no es importante para su dinámica. Estas olas en el océano se clasifican en: "mar de leva" (swells), que consisten en ondas relativamente simétricas, de períodos grandes; y "mar de viento" (seas), ondas de período corto y con formas asimétricas. Los "swells" son producidos por la acción del viento a larga escala o por cambios de presión originados por tormentas. Estas olas pueden mantenerse y viajar grandes distancias, aun cuando la fuerza generadora haya desaparecido. Los "seas" son

D

$c$  →

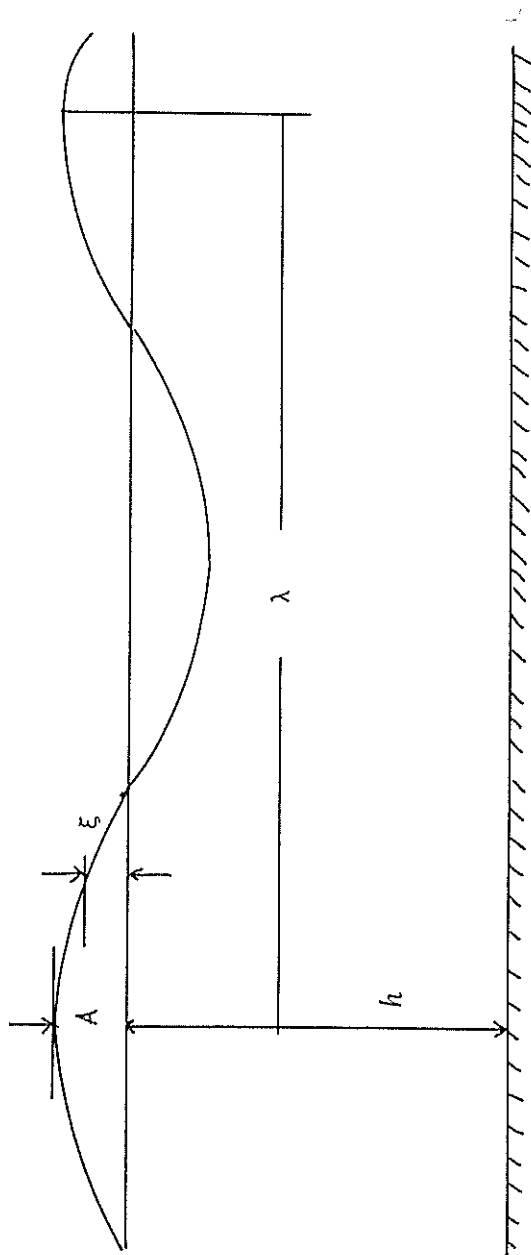


Fig. Nº 1 ONDAS VIAJANDO A LO LARGO DE LA SUPERFICIE DEL AGUA

generados por el campo local de vientos; debido a su pequeño tamaño, tienden a disiparse localmente por la acción de la fricción en el agua.

### 1.1.1. Generación de Olas por el Viento

A pesar de que cualquier observador puede decir que el viento es el que genera las olas, los detalles de dicho mecanismo no han sido fáciles de establecer. Al soplar el viento sobre el agua, le transmite energía mecánica a través de las fuerzas superficiales, tanto por su componente normal como por la tangencial. Uno podría pensar que es la componente tangencial la más importante en el mantenimiento de la corriente de deriva superficial de las olas, más es la componente normal la influencia perturbadora dominante en la superficie del agua para la generación de las olas.

Se debe pensar en el proceso generador de olas como uno donde el viento gobierna un oscilador cuya frecuencia de salida está determinada por la resonancia natural del oscilador. La energía suministrada por el viento, debe ser transmitida por pulsos, cuyas frecuencias y fases están determinadas por la retroalimentación que produce el oscilador de agua por sí mismo.

Entonces comenzarán a aparecer en el agua pequeños rizos, que tenderán a perturbar el aire que sopla sobre ellos, de tal manera que aumente su propio crecimiento por obstrucción de la energía del



BIBLIOTECA

viento. Esto se muestra en la figura N<sup>o</sup> 2.

Por ejemplo, si es que tenemos un flujo laminar soplando sobre las crestas, las líneas de corriente del mismo se correrán tendiendo a tomar la forma de la onda como se muestra en la figura 2 a. Lejos de la superficie de la ola el viento permanece uniforme. Por efecto de la presencia de las olas, las líneas de corriente, cerca de las crestas en la superficie se acercarán y cerca de los senos se apartarán.

Observando en la misma figura, lo que ocurre en las posiciones A, B y C, veremos que la presión tienden a decrecer en el flujo, hacia las crestas, en A y a incrementarse en los valles, en B. Las oscilaciones de este tipo están dadas por una línea segmentada y representan un pulso de la misma frecuencia que la ola pero 180 grados fuera de fase con ella. Este tipo de perturbación no produce trabajo neto en la superficie del agua durante un período de ola. Sin embargo si este pulso está fuera de fase con la ola entre 0 grados y 180 grados, o es asimétrico con respecto a la ola, una cantidad neta de energía será transmitida al agua en un período ola. La figura 2 B, muestra un pulso asimétrico (presión) desarrollado durante la separación del flujo del aire sobre una cresta escarpada.

En general una vez que las ondas están presentes la naturaleza



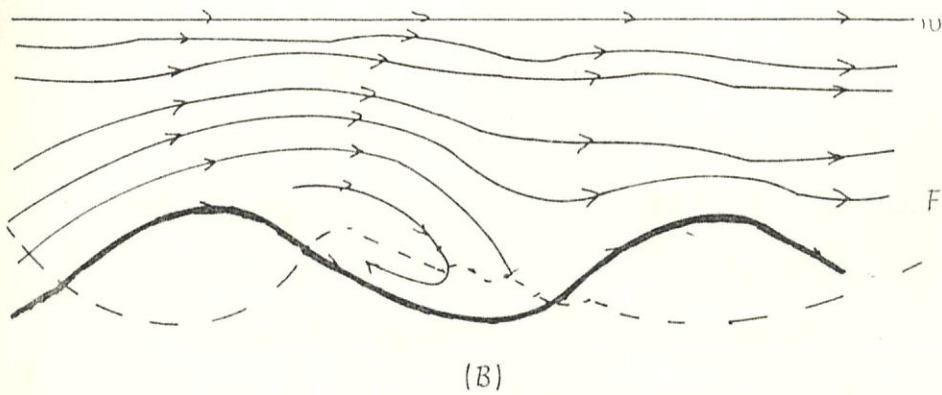
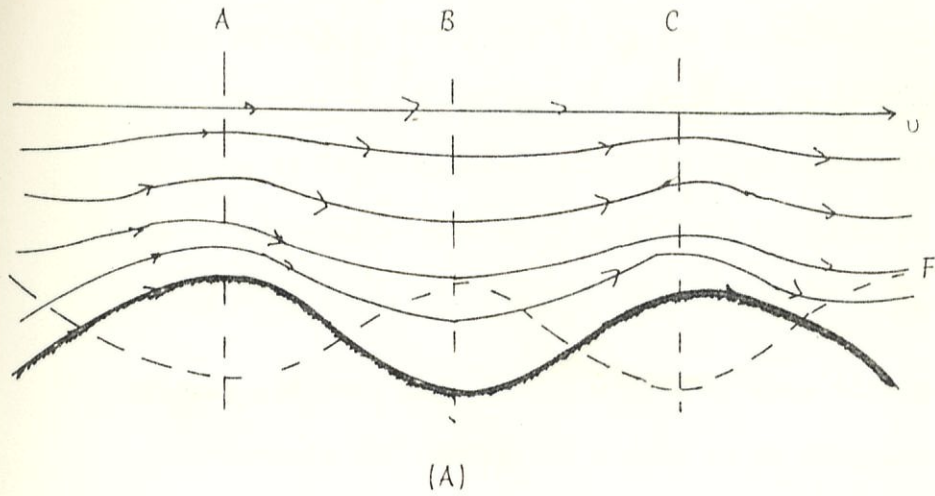


Fig. N°2 Flujo sobre las olas (línea continua), y Distribución de presión (línea segmentada): (A) sin separación, (B) con separación



inestable de los vientos turbulentos, posibilitarán la transferencia de energía al agua. John Mils de Scripps Oceanographic Institution, mostró en 1957, que si es que la distribución promedio del flujo del aire fuera tal que la curvatura en la distribución de la velocidad de los vientos locales sea igual a la velocidad de las olas, puede existir una perturbación de presión, la cual puede estar fuera de fase, con las olas sin separación.

Las olas obtienen energía del viento de tres maneras:

- directamente del empuje del viento en su cara que da al mismo
- por el arrastre friccional del aire en la superficie
- a través de las diferencias de presión en el aire que está sobre ellas.

La energía transmitida por el viento es disipada principalmente por los movimientos turbulentos del agua. El proceso por el cual las olas crecen y alcanzan un balance no tiene un solo paso. Olas de diferentes longitudes corren a diferentes velocidades por lo cual olas de diferentes tamaño y generación se combinan y recombinan en un patrón de interferencia constantemente cambiante. Cuan altas son las olas, dependen de la fuerza o velocidad del viento, de su duración y del "fetch" o sea de la distancia sobre la cual el viento sopla.

Las olas generadas por el viento son olas irregulares, sucesivas

que difieren en altura; el factor observado de que las olas tienden a viajar en grupos de olas altas y bajas se lo explica por el fenómeno de interferencia.

A medida que las olas crecen en altura, también lo hacen en longitud y a una razón más rápida. Aun cuando ya no crezcan más en altura, la longitud puede continuar aumentando. Un factor muy importante es la pendiente  $\mathcal{J}$  de la ola, o sea el radio de la altura de la ola a la longitud de la misma.

$$\mathcal{J} = H/L \quad (1.3)$$

Las olas son más "empinadas" durante la primera parte del flujo del viento que cuando el mar está totalmente desarrollado. Observaciones de la pendiente o escarpamiento de las olas dan valores para  $\mathcal{J}$  entre 0.1 y 0.008. Ver figura N°3.

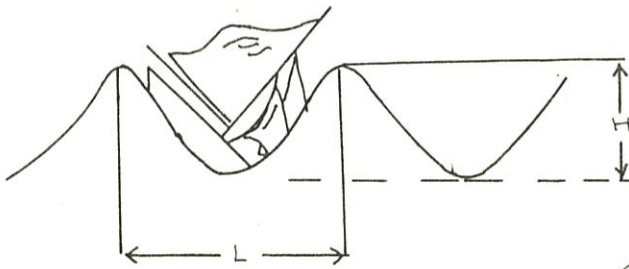
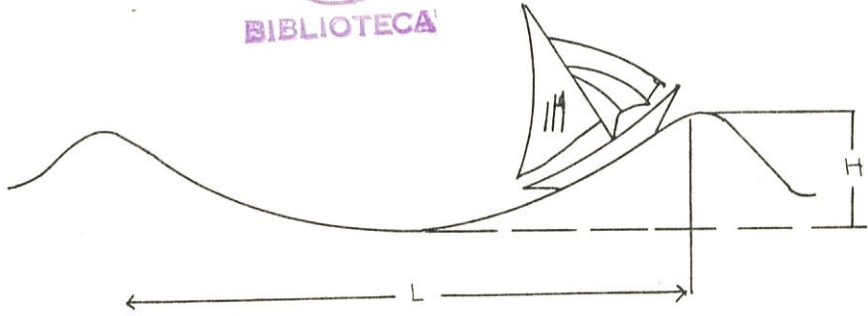
### 1.1.2. Las Olas y la Topografía Submarina

El movimiento de las olas en regiones grandes no está afectado por la aceleración de coriolis; está acompañado por movimiento neto hacia adelante muy pequeño.

En aguas profundas la perturbación inducida por las olas disminuye exponencialmente con la profundidad. En aguas rasas se extiende virtualmente desde la superficie hasta el fondo y la velocidad de una ola no está más gobernada por su longitud sino por la pro-



BIBLIOTECA



$$d = H/L$$
$$\text{tg } \alpha = H/L/2 = 2d$$

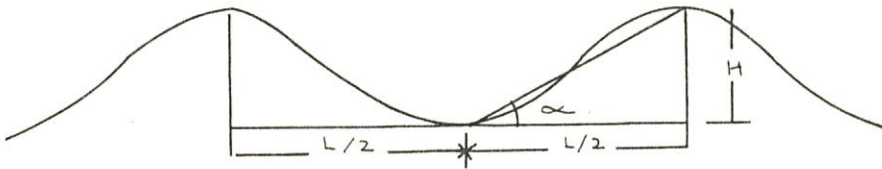


Fig. N° 3 Diferentes pendientes de las olas

fundidad del agua y es proporcional a la raíz cuadrada de la misma. La dirección tomada por las olas puede ser alterada por la topografía submarina, lo mismo que su altura. Los fenómenos que ocurren debido a la variación de la topografía submarina y en presencia de obstáculos naturales o construidos por el hombre son la reflexión, refracción y difracción.

Si es que un tren de olas encuentra cambios en las condiciones de borde, una porción de energía en el tren de olas será reflejada. Si es que el obstáculo es vertical sin fricción, una pared inelástica, la ola será completamente reflejada, dando como resultado una ola estacionaria con un altura de antinodo el doble de la de la ola incidente y con un movimiento de partículas como el mostrado en la figura N<sup>o</sup>4.

La refracción ocurre en aguas intermedias y rasas donde la velocidad de la onda decrece con la disminución de la profundidad provocando que la proción de la cresta que está en agua rasa o intermedia se propague a una velocidad menor que la que está en aguas profundas. El resultado es una curvatura de las crestas de las ondas que se aproximan a la orientación del contorno de fondo. (Figura N<sup>o</sup>5).

Las ortogonales de la ola también se curvarán y su convergencia o divergencia producirá el aumento o decrecimiento local de la energía.

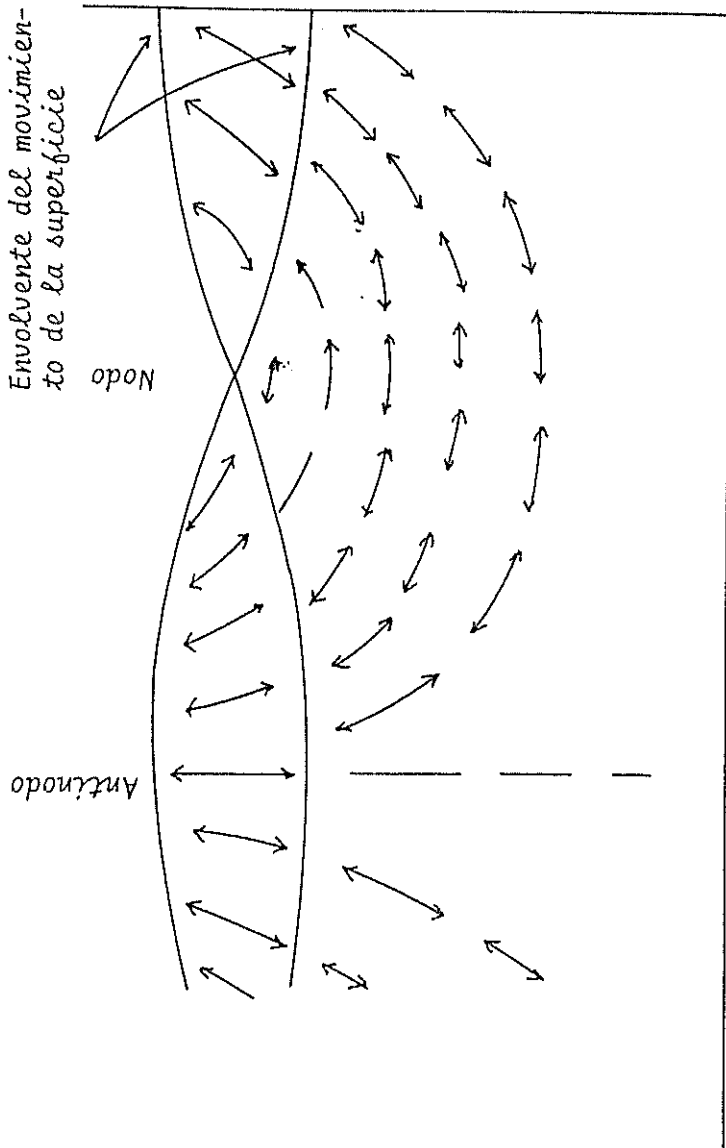


Fig. N° 4 Olas reflejadas

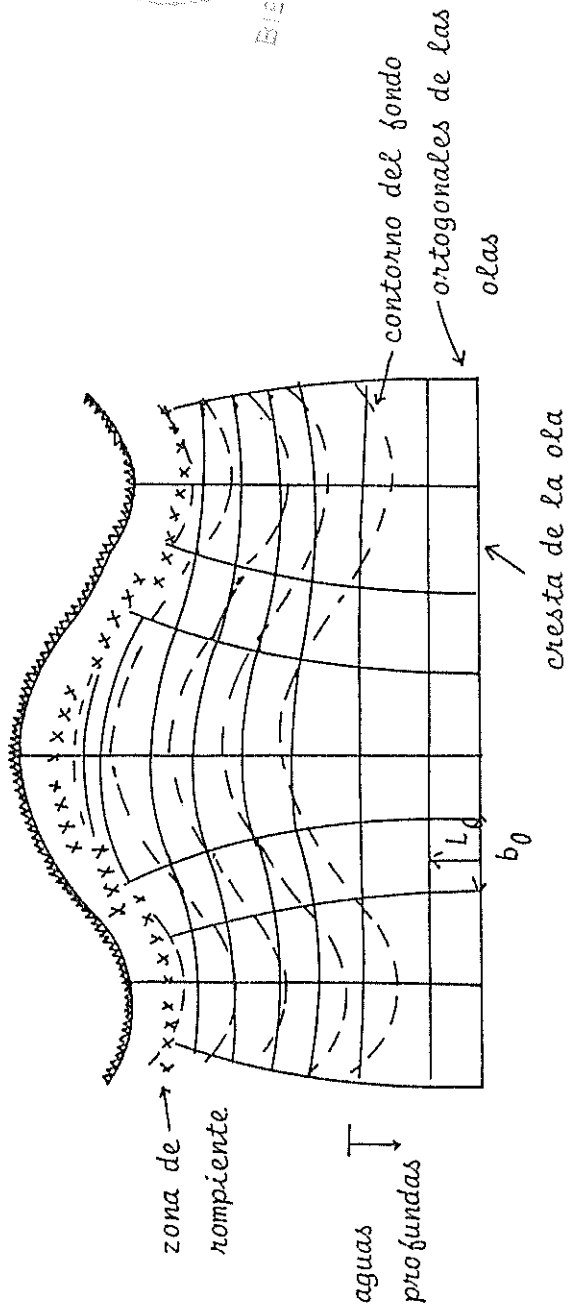
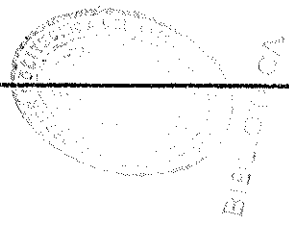


Fig. N° 5 Refracción de olas



gía de la ola y consecuentemente de su altura.

La difracción se produce cuando la altura de la ola es mayor en un punto a lo largo de la cresta que en uno adyacente, dando lugar a un flujo de energía a lo largo de la cresta en la dirección de decrecimiento de altura y un ajuste de las alturas a lo largo de las crestas. Esto es importante por ejemplo en la propagación de la energía en la región de sombra a lado de una estructura costera que interrumpe el tren de olas. Figura N°6.

La reflexión, refracción y difracción de olas determinan la altura de la ola en la zona cercana a la costa y la orientación de la cresta en una localidad dada. Entonces el espectro de las olas será modificado debido al relativo incremento o decrecimiento en la altura en las diferentes componentes de las olas.

### 1.1.3. Clasificación de las Olas Oceánicas

Las olas oceánicas pueden ser clasificadas en un número útil de maneras. Han sido clasificadas en base a: su permanencia, anchura, localización en la dirección vertical, movimiento, número, período, fuerzas de generación, fuerzas que las gobiernan, localización con respecto al desarrollo y evolución, teoría, largo, altura.

La clasificación en este caso que más nos interesa es aquella hecha en base al período o frecuencia, relacionados con su energía. (Tabla N° I).



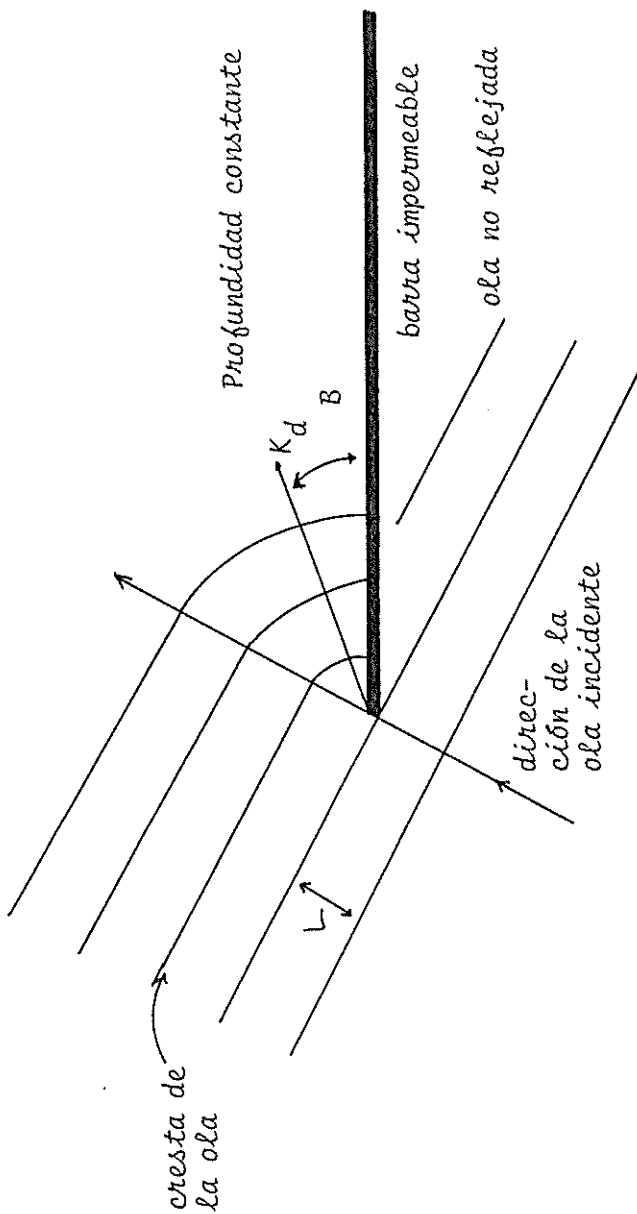


Fig. N° 6 Difracción de olas y en presencia de un obstáculo idealizado



BIBLIOTECA

Observando la tabla N°1 y figura N°7 vemos que es posible tener un arreglo análogo al de bandas en el espectro electromagnético.

La curva que representa las cantidades relativas de energía contenida en las olas, en el océano, es una aproximación hecha por Kinsman. La figura sugiere que la banda de las olas de gravedad generadas por el viento contiene más energía que cualquier otra banda. La banda de ola que interese a una persona deberá ser aquella relacionada con el problema que se esté tratando de resolver.

## 1.2. Las olas como una suma de sinusoides

### 1.2.1. La suma de 2 sinusoides-interferencia, modulación de la amplitud y velocidad de grupo

Al desarrollar la teoría lineal de ondas, se han hecho algunas simplificaciones, que nos llevan a perder contacto con la realidad, pero de esta manera se ha ganado capacidad para construir nuevas soluciones por adición a las viejas. Las soluciones de pequeña amplitud son sinusoides y esto nos indicaría que lo apropiado es usar Fourier: Tomemos antes el caso de dos sinusoides.

Supongamos que tenemos dos ondas:

$$\eta_1 = a \cos(k_1 x - \sigma_1 t) \text{ y } \eta_2 = a \cos(k_2 x - \sigma_2 t) \quad (1.4)$$

donde  $k_1 - k_2 = \Delta k$  y  $\sigma_1 - \sigma_2 = \Delta \sigma$

$$\text{entonces } \eta = \eta_1 + \eta_2 = a \cos(k_1 x - \sigma_1 t) + a \cos(k_2 x - \sigma_2 t) \quad (1.5)$$

$\eta$  nos va a dar el perfil de la nueva onda, aunque  $\eta_1$  y  $\eta_2$  tengan

TABLA N°1

Clasificación de las olas según su energía

Nombre de la Ola	Banda de Período		Banda de Frecuencia	
Capilares	0	- $10^{-1}$	x	10
Ultragravedad	$10^{-1}$	- 1	10	1
Gravedad	1	- 3	1	$3.33 \times 10^{-2}$
Infragravedad	3	- 300	$3.33 \times 10^{-2}$	$3.33 \times 10^{-3}$
Períodos Largos	300	$8.64 \times 10^{+4}$	$3.33 \times 10^{-3}$	$3.33 \times 10^{-5}$
Transmarea	$8.64 \times 10^{-4}$	x	$1.16 \times 10^{-5}$	0

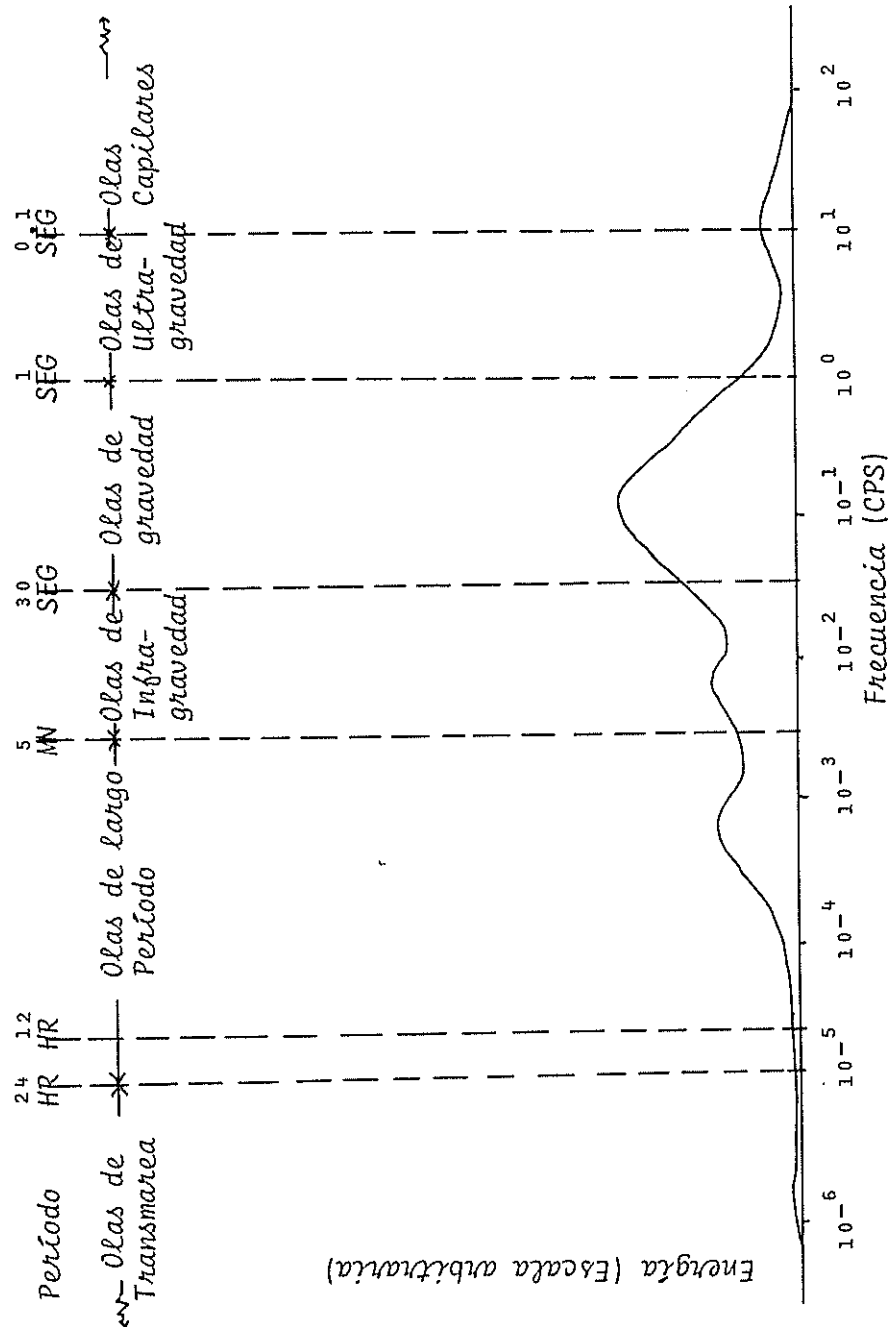


Fig. N°7 Representación esquemática del contenido de energía de las olas en los océanos

las mismas amplitudes, sus longitudes de onda y períodos son diferentes, (denotado esto por  $\Delta k$  y  $\Delta \sigma$ ), lo que nos indica que tenemos diferentes fases de tal manera que en un momento dado, cuando la diferencia de fase es pequeña se produce un reforzamiento y cuando esta es grande una cancelación. A medida que el tiempo pasa cada onda tiene una velocidad de fase de tal manera que las componentes de  $\eta$  son dispersivas y el reforzamiento y cancelación de las ondas no permanece constante. Entonces lo que  $\eta$  nos da en realidad es el patrón de interferencia.

Aplicando igualdades trigonométricas:

$$\eta(x,t) = 2a \cos \left[ (k_1 x - \sigma_1 t) - \left( \frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta \sigma}{2} t \right) \right] \cos \left( \frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta \sigma}{2} t \right)$$

solo consideraremos dos casos para  $\eta$  en  $t=0$  y en  $x=0$

$$t=0$$

$$\eta(x) = 2a \cos \left( k_1 x - \frac{\Delta k}{2} x \right) \cos \frac{\Delta k}{2} x \quad (1.6)$$

$$x=0$$

$$\eta(t) = 2a \cos \left( \sigma_1 t - \frac{\Delta \sigma}{2} t \right) \cos \frac{\Delta \sigma}{2} t \quad (1.7)$$

Supongamos ahora que las longitudes de onda y períodos de  $\eta_1$  y  $\eta_2$  son aproximadamente los mismos:

$$\Delta k \ll k_1 \text{ y } \Delta \sigma \ll \sigma_1 \text{ y } \sigma_1 \approx \sigma_2 \text{ y } k_1 \approx k_2$$

$$\cos \left( k x - \frac{\Delta k}{2} x \right) = \cos \left[ \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta k}{k} \right) k x \right] \approx \cos k x$$

$$\eta(x) \approx 2a \cos \left( \frac{\Delta k}{2} x \right) \cos k x, \quad t = 0 \quad (1.8)$$

$$\eta(t) \approx 2a \cos \left( \frac{\Delta \sigma}{2} t \right) \cos \sigma t, \quad x = 0 \quad (1.9)$$

Estas dos expresiones son las ecuaciones de una onda de amplitud modulada, de tal manera que  $\cos kx$  y  $\cos \sigma t$  son la onda básica cuya amplitud será modulada por los factores  $\cos (\Delta k / 2)x$  y  $\cos (\Delta \sigma / 2)t$ . Debido a que (1)  $\Delta k \ll k$  y  $\Delta \sigma \ll \sigma$ , la longitud de onda y período de modulación  $L_{\text{mod}}$  y  $T_{\text{mod}}$ , son mucho mayores que la longitud de onda y período de la onda. Esto significa que la onda oscilará muchas veces mientras su máxima amplitud decrece lentamente y luego se incrementa. (Figura N°8).

En el patrón de interferencia mostrado las olas viajan en grupos de olas altas y bajas, y nuestra atención estará fija en estos grupos y no en las crestas individuales.

Si nosotros queremos conocer la distancia entre grupos de crestas altas, lo que estaremos haciendo es determinando  $L_{\text{mod}}$ . De las expresiones (1.7) la función que indica la modulación espacial de la amplitud es  $\cos (\Delta k / 2)x$ . Las dos líneas que modulan la amplitud de la onda son entonces:  $\underline{(n_1)gr} = 2a \cos \frac{\Delta k}{2} x$ ,  $\underline{(n_2)gr} = -2a \cos \frac{\Delta k}{2} x$  y por lo tanto:

$$L_{\text{mod}} = 4\pi / \Delta k \quad (1.10)$$

---

(1) En realidad si  $\Delta k \ll k$ , el cambio en la amplitud es tan lento que va a ser imposible distinguirlo del senoide puro que se observa (localmente).

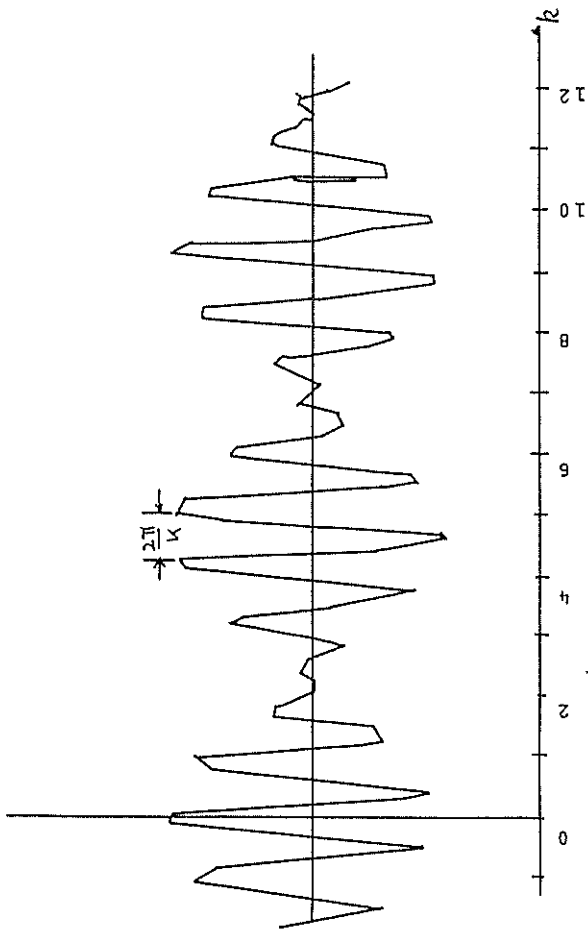


Fig. N° 8 Ola con amplitud modulada



ya que la onda  $\eta$ , físicamente real, alcanza las líneas límite  $(\eta_1)_{gr}$  y  $(\eta_2)_{gr}$  que existen conceptualmente, en cualquier momento que  $x = n\pi/k$ , en donde  $n$  es entero  $\cos kx = +1$ ; para los otros valores de  $x$ ,  $|\cos kx| < 1$  y  $|\eta| < |(\eta_1)_{gr}| = |(\eta_2)_{gr}|$  y por lo tanto  $L_{mod}$  será la longitud de cualesquiera de las  $(\eta)_{gr}$  funciones.

Un razonamiento análogo se sigue para encontrar el período:

$$T_{mod} = 4\pi / \Delta\sigma \quad (1.11).$$

Entonces la distancia entre sucesivos grupos de ondas de crestas altas es  $L_{mod}/2$  cuando  $t=0$  y el tiempo de arribo en  $x=0$  es  $T_{mod}/2$

La velocidad con que esta modulación viaja es:

$$C_{mod} = \frac{L_{mod}}{T_{mod}} = \frac{\Delta\sigma}{\Delta k} \quad (1.12)$$

$$\lim_{\substack{\Delta\sigma \rightarrow 0 \\ \Delta k \rightarrow 0}} \frac{d\sigma}{dk} \quad (1.13)$$

Para ondas de pequeña amplitud la velocidad de fase es:

$$c^2 = \frac{g}{h} \operatorname{tgh} h(kh); \quad c = \frac{\sigma}{k} \quad (1.14)$$

$$\sigma^2 = gk \operatorname{tgh} h(kh) \quad (1.15)$$

derivando

$$2\sigma \frac{d\sigma}{dk} = g \left( \operatorname{tgh} h(kh) + kh \operatorname{sech}^2 h(kh) \right) \quad (1.16)$$

$$c = \frac{1}{c} \frac{g}{k} \operatorname{tgh} h(kh) \doteq \frac{g}{\sigma} \operatorname{tgh} h(kh) \quad (1.17)$$

$$\frac{d\sigma}{dk} = \frac{1}{2} \frac{g}{\sigma} \operatorname{tgh} h(kh) \left[ 1 + \frac{kh \operatorname{sech}^2 h(kh)}{\operatorname{tgh} h(kh)} \right]$$



$$\frac{d\sigma}{dk} = C \cdot \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right) \quad (1.18)$$

$$\frac{d\sigma}{dk} = C_n = C_g = \lim_{\substack{\Delta\sigma \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} C_{Mod} = C_n = C_g$$

Se puede concluir que la velocidad de la modulación de la amplitud se acerca a la velocidad de grupo a medida que las dos componentes se acercan más, tanto en longitud de onda como en período (esta interpretación ayuda a asignarle un significado físico a la velocidad de grupo). Se puede llegar a la velocidad de grupo por otro lado, estudiando un modelo con un tren de onda simple de agua profunda cuyas crestas son conservativas (retienen su identidad). Supondremos que la longitud de onda y el período del tren de ondas están variando lentamente, cualquier cresta de la onda que se escoja para seguirla mostrará un pequeño cambio en longitud dentro de una longitud de onda y un pequeño cambio de tiempo dentro de un período. Para ese tren  $L = L(x, t)$  y la longitud de la onda dependerá de donde y cuando se la observe. Ver figura N°9.

$$\frac{DL}{Dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial x} \frac{dx}{dt}, \quad \frac{dx}{dt} = c$$

$$\frac{DL}{Dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + c \frac{\partial L}{\partial x} \quad (1.19)$$

Se puede obtener una expresión para  $DL/Dt$  considerando la razón de estrechamiento en el perfil de onda. Ya que la velocidad de fase varía lentamente con la longitud de onda tenemos:

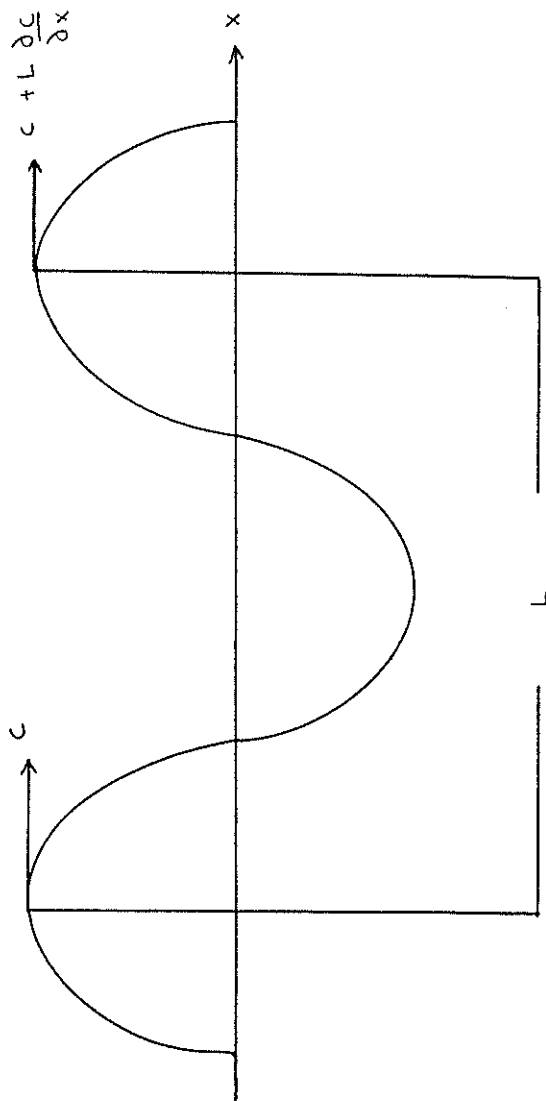


Fig. N° 9 Velocidad de la ola en diferentes posiciones

$$\left| \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \right| \ll \left| \frac{1}{L} \frac{\partial c}{\partial x} \right|$$

y se pueden despreciar términos de mayor orden para obtener una extrapolación lineal

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial c}{\partial x} L \quad (1.20)$$

A medida que el tren viaja en agua profunda, el medio es dispersivo y la velocidad de fase depende de la longitud; por lo tanto esta podrá ser escrita como función de la longitud de onda. Suponiendo que se ha hecho eso:  $\frac{\partial c}{\partial x} = L \frac{dc}{dL} \frac{\partial L}{\partial x}$  (1.21)

por sustitución:  $\frac{\partial L}{\partial t} = L \frac{dc}{dL} \frac{\partial L}{\partial x}$  (1.22)

igualando con la expresión anteriormente obtenida:

$$\frac{\partial L}{\partial t} + \underbrace{\left( c - L \frac{dc}{dL} \right)}_{C_g} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (1.23)$$

$C_g$  (velocidad de grupo)

$$\begin{aligned} \frac{dc}{dL} &= \frac{d(\sigma/k)}{d(2\pi/k)} = \frac{(k d\sigma - dk) / k^2}{-2\pi dk / k^2} = -\frac{k}{2\pi} \frac{d\sigma}{dk} + \frac{\sigma}{2\pi} \\ &= \frac{k}{2\pi} \left( \frac{\sigma}{k} - \frac{d\sigma}{dk} \right) = \frac{k}{2\pi} \left( c - \frac{d\sigma}{dk} \right) \\ &= \frac{c}{L} (1-n) \quad (1.24) \end{aligned}$$

$$C_g = c - L \frac{dc}{dL} = c - L \left[ \frac{c}{L} (1-n) \right] = cn = c_g \quad (1.25)$$

Entonces la definición de velocidad de grupo basada en la transmisión de energía  $c_g$  y aquella obtenida basados en el cambio de

velocidad de fase, para aguas profundas es la misma:

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{t}} + C_g \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (1.26)$$

$$C_g = \frac{\partial L}{\partial \bar{t}} / \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{dx}{d\bar{t}}$$

también se podría llegar a esto en función del período  $T$ , reemplazando  $L=cT$  en (1.26)

$$c \left( \frac{\partial T}{\partial \bar{t}} + C_g \frac{\partial T}{\partial x} \right) + T \left( \frac{\partial c}{\partial \bar{t}} + C_g \frac{\partial c}{\partial x} \right) = 0$$

$$\frac{\partial c}{\partial \bar{t}} = \frac{dc}{dT} \frac{\partial T}{\partial \bar{t}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{dc}{dT} \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$c \left( \frac{\partial T}{\partial \bar{t}} + C_g \frac{\partial T}{\partial x} \right) + T \frac{dc}{dT} \left( \frac{\partial T}{\partial \bar{t}} + C_g \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0$$

$$\left( c + T \frac{dc}{dT} \right) \left( \frac{\partial T}{\partial \bar{t}} + C_g \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0$$

ya que  $L$  varía lentamente  $\ln cT = \ln L = cte$

$$\frac{\partial T}{\partial \bar{t}} + C_g \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (1.27)$$

Entonces podemos decir que en un tren de ondas conservativo, en el cual la longitud de onda y el período varían lentamente, que corre en la superficie de un medio dispersivo, tanto  $L$  como  $T$  son propagados a la velocidad del grupo. Anteriormente la velocidad de grupo  $c_g$ , era la velocidad de transmisión de energía, ahora se ha demostrado que es el límite hacia el cual tiende la



BIBLIOTECA

velocidad de modulación de la amplitud producida por dos sinusoides de T y L no completamente iguales.

1.2.2. Suma de un número infinito de sinusoides, espectro de amplitud con la configuración de la superficie. El paquete Gaussiano.

Antes de entrar en detalles de este problema, es necesario recordar una serie de conceptos matemáticos y de notación de funciones.

$$\text{Sen } \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \dots$$

$$\text{Cos } \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \dots$$

$$e^{i\alpha} = 1 + i\alpha + \frac{i^2\alpha^2}{2!} + \frac{i^3\alpha^3}{3!} + \frac{i^4\alpha^4}{4!} + \dots$$

$$i = \sqrt{-1}, \quad i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1; \quad i^{4n+3} = -i$$

n = entero

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \text{ sen } \alpha = \text{cis } (\alpha) \quad (1.28)$$

$$e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \text{ sen } \alpha = \text{cis } (-\alpha) \quad (1.29)$$

si es que la amplitud es a :  $a e^{\pm i\alpha} = a(\cos \alpha \pm i \text{ sen } \alpha) = a \text{cis } (\pm\alpha)$

$$\text{Re } [a e^{\pm i\alpha}] = a \cos \alpha ; \quad \text{Im } [a e^{\pm i\alpha}] = \pm a \text{ sen } \alpha$$

de acuerdo con lo siguiente:

$$\cos \alpha = (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})/2 ; \quad \text{sen } \alpha = (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})/2i$$

"Un potencial de argumento imaginario es un movimiento armónico simple". Supongamos que en lugar de los dos sinusoides tenemos:

$$\begin{aligned} a(k)e^{i(kx - \sigma t)} &= a(k)\cos(kx - \sigma t) + i a(k)\sin(kx - \sigma t) \\ &= a(k)\operatorname{cis}(kx - \sigma t) \quad (1.30) \end{aligned}$$

Cualquier especificación de  $a$ ,  $k$  y  $\sigma$ , identifica un oscilador armónico simple particular. En la ecuación (1.30)  $a=a(k)$  y  $\sigma = \sigma(k)$  son funciones del número de onda en un medio dispersivo, aunque ambos parámetros podrían tomarse como función de  $k$ . Si  $k$  varía en todo el rango de los números reales, entonces en la expresión (1.30), tendremos un número infinito de osciladores armónicos. Ya que linealizamos el problema, la suma de cualquier número de estos osciladores armónicos simples será una solución por principio de superposición. Si sumamos todos ellos, el perfil de la superficie del movimiento compuesto será:

$$\eta(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(k) e^{i[kx - \sigma(k)t]} dk \quad (1.31)$$

De acuerdo con esto solo se desplazarían en la dirección positiva de  $x$ , (esto si hubiéramos puesto las restricciones:  $k > 0$  y  $\sigma > 0$ ), pero la parte real que es lo que nos interesaría más y no sufre variaciones si el signo aparece explícitamente.

El nombre que reciben las ondas superpuestas en (1.31) es el de paquete de ondas y  $a=a(k)$ , amplitud del espectro. El que la expresión que define el paquete de onda puede o no ser integrada depende de la función  $a(k)$  escogida.

La función que vamos a escoger para  $a(k)$  es tal que para un va-

Por dado de  $k=k_0$ ,  $a(k_0)$  va a ser grande y tenderá a cero para cualquier otro  $k \neq k_0$  que se aleja de  $k_0$ . El patrón compuesto reflejará fuertemente la componente dominante  $a(k) e^{i[k_0 x - \sigma(k_0) t]}$

ya que había poca fuerza en las otras componentes muy diferentes de la central.

Una de las funciones que tiene estas características: tendencia central fuerte y pequeñas ordenadas que van desapareciendo es la distribución Gaussiana (se puede usar cualquier otra función, aunque esta es muy buena para un estudio preliminar).

Un paquete de ondas Gaussiano es un paquete de ondas para el cual la amplitud del espectro tiene la siguiente forma

$$a(k) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi S}} e^{-(k-k_0)^2/2S^2} \quad (1.32)$$

donde  $a_0, S$  y  $k_0$ , son parámetros constantes que definen el paquete:  $a_0$  = máxima amplitud para  $k_0$

$S$  = desviación estandar de la función Gaussiana seleccionada para representar a  $a(k)$ :

$$\eta(x,t) = \int_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_0}{\sqrt{2\pi S}} e^{-(k-k_0)^2/2S^2} e^{i(kx - \sigma t)} dk \quad (1.33)$$

Si hacemos que  $\eta$  sea solo función de  $x$  y no de  $t$

$$\eta(x,0) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi S}} \int_{k=-\infty}^{\infty} e^{-(k-k_0)^2/2S^2} e^{ikx} dk \quad (1.34)$$

Esta integral es mucho más fácil de resolver que la anterior. Comencemos a analizar esta última expresión:

Para todo  $k$  cercano a  $k_0$ , hay un amortiguamiento exponencial fuerte que proviene del factor  $e^{-(k-k_0)^2/2s^2}$

cuando  $|k-k_0| = \sqrt{2s}$ , el factor de amortiguamiento tiene un valor de  $e^{-1} = .368$  para  $|k-k_0| > \sqrt{2s}$ , cae rápidamente.

Elevando al cuadrado el exponente en (1.34) y factorizando la constante:

$$\eta(x,0) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi s}} e^{-k_0^2/2s^2} \int_{k=-\infty}^{\infty} e^{-k^2/2s^2 + (k_0/s^2 + ix)k} dx \quad (1.35)$$

lo que nos demuestra que el problema básico consiste en evaluar una integral de la forma  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-au^2 + bu} du$

en donde el primer paso será completar el cuadrado. Si se hace esto y se cambia de variables  $e^{b^2/4a} \int_{v=-\infty}^{\infty} e^{-av^2} dv$

de cualquier tabla de integrales se obtiene que esto es igual a:

$$e^{b^2/4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

aquí podemos decir que:  $a = \frac{1}{2}s^2$ ,  $b = \frac{k_0}{s^2} + ix$

$$\eta(x,0) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi s}} e^{-k_0^2/2s^2} e^{(s^2/2)(k_0/s^2 + ix)^2} (\sqrt{2\pi s})$$

$$\eta(x,0) = a_0 e^{-k_0^2/2s^2} e^{[-k_0^2/2s^2 + ik_0 x - (s^2/2)x^2]}$$

$$\eta(x,0) = a_0 e^{-(s^2/2)x^2} e^{ik_0 x}$$

(1.36)



BIBLIOTECA



$e^{ik_0 x}$  es el armónico simple con  $L_0 = 2\pi/k_0$  mientras que la amplitud  $a_0$ , está modulada por la función  $\pm e^{-(s^2/2) x^2}$  en  $t=0$  la perturbación consiste en un pulso largo que contiene algunas oscilaciones. Ya que las curvas límites se extienden hasta  $\pm\infty$ , el ancho del pulso es infinito, pero debido a que la amplitud se reduce, podemos definir un ancho medio, como el valor de  $x$ , para el cual la amplitud ha caído hasta  $e^{-1}$  de su máxima amplitud.

$a_0$  es la máxima amplitud, entonces queremos el valor de  $x$  para el cual

$$e^{-1} a_0 = a_0 e^{-(s^2/2) x^2}$$

resolviendo esto:

$$\frac{s^2}{2} x^2 = 1 \implies x = \frac{L}{2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{s}$$

(Ver fig. N°10)

Para  $t > 0$ , debemos hacerle frente a la integral. Pero no se puede avanzar antes de tener una idea de la forma que tiene  $\sigma$  como función de  $k$ . Si  $\sigma = \sigma(k)$  es lo suficientemente regular, puede ser expandida en series de Taylor alrededor de  $k_0$  y entonces

$\sigma = \sigma(k)$ , se puede expresar como una serie de potencias infinitas

$$\sigma(k) = \sigma(k_0) + A(k - k_0) + B(k - k_0)^2/2 + \dots$$

en donde

$$A = \left. \frac{d\sigma}{dk} \right|_{k=k_0}, \quad B = \left. \frac{d^2\sigma}{dk^2} \right|_{k=k_0}, \dots$$

si solo tomamos los dos primeros términos de la serie, tendremos una aproximación lineal de  $\sigma$ , como función de  $k$  y la integral

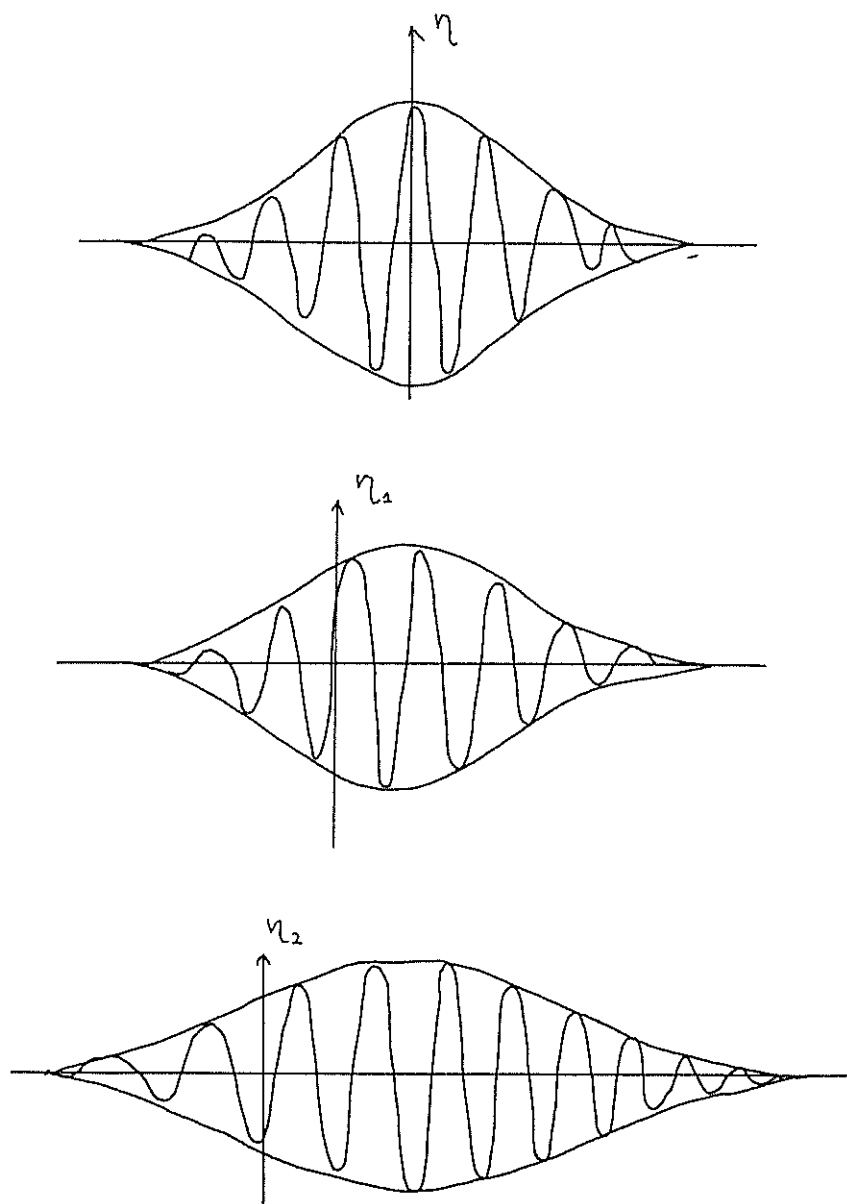
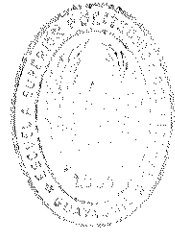


Fig. N<sup>o</sup> 10 Paquete Gaussiano de olas



se transforma en:

$$\eta_1(x,t) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi S}} \int_{k_0-\infty}^{\infty} e^{-(k-k_0)^2/2S^2} e^{i\{kx - [\sigma(k_0) + A(k-k_0)]t\}} dk \quad (1.37)$$

$\eta_1$  = aproximación lineal

Si se cambia la notación del exponencial:

$$\eta_1(x,t) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi S}} \exp\left\{-\left(\frac{k_0^2}{2S^2} + i[\sigma(k_0) - Ak_0]t\right)\right\} \cdot \int_{k_0-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{k^2}{2S^2} + \left[\frac{k_0}{S^2} + i(x - At)\right]k\right\} dk \quad (1.38)$$

aparentemente tenemos una integral del mismo tipo que la anterior en la cual  $a \approx 1/2S^2$  y  $b \approx \frac{k_0}{S^2} + i(x - At)$

esto implica que el valor de la integral es

$$\exp\left\{\frac{k_0}{2S^2} - (x - At)^2 \frac{S^2}{2} + ik_0(x - At)\right\} \sqrt{2\pi S}$$

por lo tanto la perturbación de la superficie es:

$$\eta_1(x,t) = a_0 \exp\left\{-\frac{S^2}{2}(x - At)^2\right\} \exp\left\{i[k_0 x - \sigma(k_0)t]\right\} \quad (1.39)$$

Si hacemos que  $t=0$ , obtenemos la expresión (1.36) y el factor

$$\exp\left\{i[k_0 x - \sigma(k_0)t]\right\}$$

es el armónico simple que se mueve con una velocidad de fase

$\sigma(k_0)/k_0$  y su amplitud  $a_0$  se encuentra modulada por el factor

$$\exp\left\{-\left(\frac{S^2}{2}\right)(x - At)^2\right\}$$

La envolvente de la modulación se mueve por sí misma en la dirección (+) de  $x$  con velocidad  $A$ , ya que el argumento no es  $x$ , sino  $(x-At)$ . Entonces las ondas individuales corren con la velocidad de fase de la componente central dominante, pero el grupo como un todo; la envolvente de la modulación, se mueve uniformemente con la velocidad

$$A = \left. \frac{d\sigma(k)}{dk} \right|_{k=k_0} \quad (1.40)$$

la cual es la velocidad de grupo  $c_g$

Para el ancho medio del grupo  $\rho_{1/2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{S} + At = \rho'_{1/2} + At$

en  $t=0$ , el máximo del grupo estará en  $x=0$  y  $\rho'_{1/2} = \rho_{1/2}$  : en cualquier tiempo posterior  $t=t_1$ , el máximo se habría movido una distancia  $x=At_1$ , mientras que  $\rho'_{1/2} = \rho_{1/2} + At_1$ . Entonces, relativo al máximo o al centro del grupo, no hay tendencia del grupo a derramarse, a medida que se mueve.

Si en lugar de haber tomado la aproximación lineal tomáramos los tres primeros términos de la serie de Taylor para  $\sigma(k)$ , entonces la integral en cuestión sería

$$\eta_2(x,t) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi S}} \int_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(k-k_0)^2}{2S^2}\right\} \cdot \exp\{i(kx - [\sigma(k_0) + A(k-k_0) + B(k-k_0)^2/2]t)\} dk$$

factorizando y agrupando

$$\eta_2(x,t) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}s} \exp\left\{-\frac{k_0^2}{2s^2} - i\sigma(k_0)t + iAk_0t - \frac{iBk_0^2t}{2}\right\} \cdot \int_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\left(\frac{1}{2s^2} + \frac{iBt}{2}\right)k^2 + \left[\frac{k_0}{s^2} + i(x-At) + iBk_0t\right]k\right\} dk$$

y la integral es de la misma forma que la anterior

$$a \approx \left(\frac{1}{s^2} + i\frac{Bt}{2}\right), \quad b \approx \left[\frac{k_0}{s^2} + i(x-At) + iBk_0t\right]$$

y la integral tiene el valor:

$$\exp\left(\frac{b^2}{4a}\right) \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \exp\left\{\frac{\left(\frac{k_0}{s^2} + i(x-At) + iBk_0t\right)^2}{4\left[\left(\frac{1}{2s^2} + \frac{iBt}{2}\right)i\right]}\right\} \sqrt{\frac{\pi}{\left(\frac{1}{2s^2} + \frac{iBt}{2}\right)i}}$$

sin trucos y con manipulación matemática:

$$\eta_2(x,t) = a_0 \sqrt{\frac{1}{1 + is^2Bt}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot \frac{s^2}{1 + s^4B^2t^2} (x-At)^2\right\} \cdot \exp\left\{i\left[k_0x - \sigma(k_0)t + \frac{1}{2} \frac{s^2Bt}{1 + s^4B^2t^2} (x-At)^2\right]\right\}$$

(1.41)

que tiene una forma semejante a la de  $\eta_1$ , comparando

Factor	en $\eta_1$	que corresponde al de $\eta_2$
1	$a_0$	$\sim a_0 \sqrt{\frac{1}{1 + is^2Bt}}$
2	$s^2/2$	$\sim \frac{1}{2} \cdot \frac{s^2}{1 + s^4B^2t^2}$
3	—	$\frac{1}{2} \cdot \frac{s^2Bt}{1 + s^4B^2t^2} (x-At)^2$

El papel jugado por la varianza  $s^2$ , del espectro de amplitudes Gaussiano original, ha sido tomado por el factor  $s^2/(1 + is^2Bt)$ ,

que introduce un nuevo término en la onda ( $3^{\text{er}}$  factor), dando un cambio de variable de fase. Introduce un factor en función del tiempo que nos indica que el esparcimiento del grupo de ondas no permanece constante a medida que se mueve. Esto se puede demostrar calculando el valor del ancho medio

$$\rho_{1/2}'' = \rho_{1/2} \sqrt{1 + s^4 B^2 t^2} + At \quad (1.42)$$

Entonces, cuando la frecuencia se toma con una aproximación de 2<sup>o</sup> orden, encontramos que las ondas en el paquete se mueven con una velocidad de fase:  $c = (\sigma_0)/k_0$ , mientras que el grupo se mueve con una velocidad de grupo  $c_g = d\sigma/dk \Big|_{k=k_0}$

esparciéndose a medida que se mueve en una dirección específica.

La principal importancia de la velocidad de grupo, arriba del factor de que en la mayoría de los problemas en los cuales ocurre dispersión la energía viaja con la velocidad de grupo.

Utilizar mayor número de términos en la serie de Taylor para  $\sigma(k)$  no nos lleva a nada nuevo, hacerlo sería una pérdida de tiempo.

### 1.2.3. Suma de un número infinito de sinusoides, configuración de la superficie- el problema de cauchy-poisson de la onda

En esta sección el trabajo consiste 1<sup>o</sup> en especificar una superficie en el mar con ciertas propiedades y después averiguar que espectro de amplitud de sinusoides deberíamos usar para crear por

adición la superficie especificada.

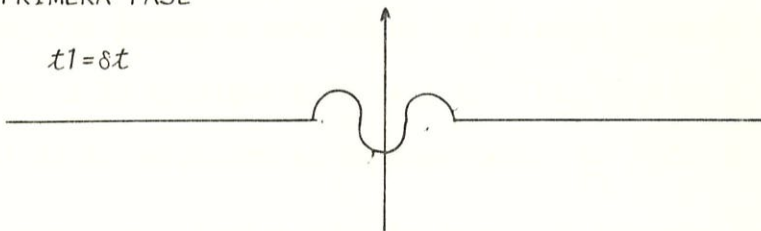
Uno de los problemas discute el sistema de ondas que va a ser propagado de una elevación concentrada inicialmente, de la superficie libre. Lo que tenemos que hacer es tratar de encontrar que pasará si es que en un instante de tiempo una columna de agua, infinitamente alta y larga; e infinitesimalmente ancha comienza a caer a lo largo de una línea en un océano que no está perturbado. El otro problema discute que el sistema de ondas se propaga de un impulso concentrado inicialmente, aplicado a la superficie libre (este es el que se tratará aquí).

El problema a tratarse es semejante a lo que ocurre cuando se lanza una piedra al agua. Inicialmente la perturbación se encuentra cerca de donde cayó la piedra, aquí la onda generada es alta y corta, a medida que la perturbación se aleja o viaja, decrece la altura y aumenta la longitud de onda, tal como se muestra en la figura N°11.

Este problema será de dos dimensiones y para tratarlo se podrán usar las funciones de Bessel. Pero para entender el problema, será tratado con uno análogo en una dimensión y usando funciones trigonométricas. En este caso asumiremos que se ha lanzado una barra infinitamente larga en el eje  $x_2$  y que la perturbación inicial y las subsecuentes son idénticas en cualquier plano perpendicular al eje  $x_2$ . Entonces el problema será determinar una fun-

PRIMERA FASE

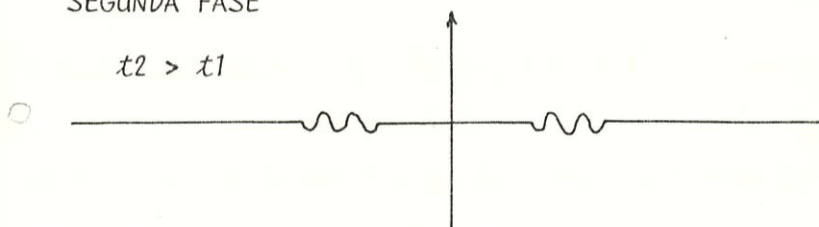
$$t_1 = \delta t$$



BIBLIOTECA

SEGUNDA FASE

$$t_2 > t_1$$



TERCERA FASE

$$t_2 \gg t_1$$

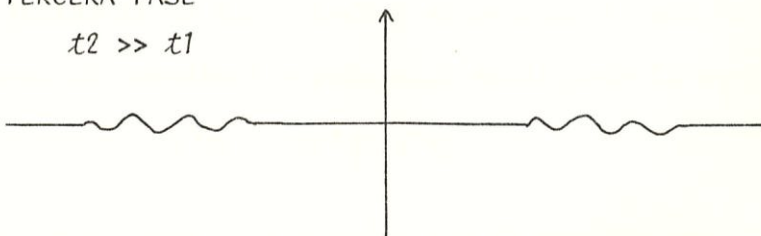


Fig. N° 11 ESQUEMA DE LOS SUBSECUENTES EVENTOS  
PRODUCIDOS AL CAER UNA PIEDRA EN EL  
AGUA



ción  $(x_1, t)$  que describa la elevación de la superficie del mar en todos los puntos y para todos los tiempos, cuando todo lo que conocemos es la configuración inicial  $(x_1, 0)$  y la distribución inicial de la velocidad en la superficie:  $\left. \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_{t=0} = 0$

Las asunciones hechas para la teoría de pequeña amplitud se mantienen:

Para cualquier componente el perfil requerido es  $\eta = a \cos(kx_1 - \sigma t)$

o alternativamente  $\eta = \text{Re} \{ a e^{(kx_1 - \sigma t)} \} \quad -\infty < k < \infty$

La ecuación de Bernoulli se debe mantener para la presión a través de todo el fluido,  $p = \text{cte}$

$$p/\rho = -gx_3 - \frac{1}{2}(u_1^2 + u_3^2) + \text{cte}$$

El fluido es no divergente e irrotacional, por lo tanto las funciones de corriente y potencial satisfacen la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \phi = \nabla^2 \psi = 0$$

Las componentes de las ondas son de pequeña amplitud.

Estas asunciones linealizan el problema y por lo tanto nosotros podemos sumar soluciones componentes para producir una solución por superposición.

Como el medio es dispersivo podemos expresar  $\sigma$ , como una función de  $k$  y como no es necesario que cada componente tenga una cresta en  $x=0$  y  $t=0$ , podemos insertar en el argumento de cada componen-

te, un cambio de fase  $\epsilon / 0 \leq \epsilon \leq 2\pi/k$  que podrá también escribirse como función de  $k$  y cada componente tendrá su amplitud correspondiente a  $(k)$ : entonces la forma para cada componente de onda será:

$$\begin{aligned} \eta_i(x_i, t) &= a(k_i) \cos[k_i x_i \pm \sigma(k_i)t + \epsilon(k_i)] \\ &= \operatorname{Re} \left\{ a(k) \exp \left\{ i[k_i x_i \pm \sigma(k_i)t + \epsilon(k_i)] \right\} \right\} \end{aligned} \quad (1.43)$$

$K_x$  puede ser un conjunto finito o infinito de números de ondas. Si es que los números de ondas forman un conjunto infinito, entonces el subscrito  $i$  será omitido y cada componente se escribirá:

$$\begin{aligned} \eta(x_i, t) &= a(k) \cos[kx_i \pm \sigma(k)t + \epsilon(k)] \\ &= \operatorname{Re} \left\{ a(k) \exp \left\{ i[kx_i \pm \sigma(k)t + \epsilon(k)] \right\} \right\} \end{aligned} \quad (1.44)$$

$k$  será una especie de rótulo para la componente. Apenas  $k$  sea conocido,  $a(k)$ ,  $\sigma(k)$  y  $\epsilon(k)$  podrán ser determinados, aunque el papel de  $k$  lo podría haber asumido  $\sigma$

La relación funcional entre  $k$  y  $\sigma$  es la siguiente:

$$C = \frac{\sigma}{k} \quad , \quad C^2 = \frac{g}{k} \operatorname{tgh}(kh)$$

$$\sigma_i = \sigma(k_i) = (g k_i \operatorname{tgh} k_i h)^{1/2} \quad \text{ó} \quad (1.45)$$

$$\sigma = \sigma(k) = (g k \operatorname{tgh} kh)^{1/2} \quad (1.46)$$

Una solución posible se obtendría de sumar componentes semejantes a la sobre todos los números de onda de  $-\infty$  a  $+\infty$

$$\begin{aligned} \eta_1(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} a_1(k) \cos[kx_i - \sigma(k)t + \epsilon_1(x)] dk \\ &= \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} a_1(k) \exp \left\{ i[kx_i - \sigma(k)t + \epsilon_1(k)] \right\} dk \end{aligned}$$

Esta solución tiene componentes que viajan en la dirección positiva de  $x$ ; si nosotros encontramos aquella que viaja en la negativa, tenemos:

$$\begin{aligned} \eta_2(x_1, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} a_2(k) \cos [kx_1 + \sigma(k)t + e_2(k)] dk \\ &= \text{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} a_2(k) \exp [i \{ kx_1 + \sigma(k)t + e_2(k) \}] dk \end{aligned}$$

como las dos son soluciones, si las sumamos, la suma será también solución:

$$\begin{aligned} \eta(x, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ a_1(k) \cos [kx_1 - \sigma(k)t + t_1(k)] + a_2(k) \cos [kx_1 + \sigma(k)t + t_2(k)] \right\} dk \\ &= \text{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ a_1(k) \exp [ikx_1 - i\sigma(k)t + it_1(k)] + a_2(k) \exp [ikx_1 + i\sigma(k)t + it_2(k)] \right\} dk \end{aligned} \quad (1.47)$$

Esto representa la superficie del mar, con cuatro funciones a determinar:  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $E_1$ ,  $E_2$ ; por lo que una amplia variedad de superficies  $\eta$  pueden ser construidas. Pero las funciones a determinar tienen que producir una función  $\eta(x, 0)$  cuando  $t=0$  y también una derivada específica  $\frac{\partial \eta}{\partial x} / t=0$ . Para alcanzar esto introduciremos una serie de asunciones:

- 1) Suponer que la perturbación inicial específica  $\eta(x, 0)$  es una perturbación centrada. Esto quiere decir que todas las componentes que sumando dan  $\eta$ , tienen una cresta en  $x_1=0$  y  $t=0$ , en otras palabras  $E_1(k) = E_2(k) = 0 \quad \forall k$
- 2) El agua aunque se deforme presentando valles y crestas; está en reposo en este estado deformado en  $t=0$ , en otras palabras

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

3) Asumiremos que podemos usar el mismo espectro de amplitud para las componentes que viajan en la misma dirección (usaremos un factor  $1/2$  que será útil en el futuro):  $a_1(k) = a_2(k) = (2\pi)^{-1} B(k)$  en donde  $B(k)$  es el espectro de amplitud.

Si hacemos la sustitución en la solución general (1.45) factorizamos y aplicamos las identidades de suma de ángulos, obtenemos:

$$\eta(x_1, t) = 2\pi^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} 2 B(k) \cos kx_1 \cos \sigma(k)t dk \quad (1.48)$$

para  $\eta(x, 0) = \eta_0(x_1)$ , tenemos

$$\eta_0(x_1) = 2\pi^{-1} \int_{-\pi}^{+\pi} 2 B(k) \cos kx_1 dk \quad (1.49)$$

Lo único desconocido en esta expresión es  $B(k)$ , y el trabajo consiste en discernir o escoger una función  $B(k)$ , que haga real la ecuación: si es que podemos hacer esto en esta ecuación (1.49) podremos resolver la (1.47) también, obteniendo la superficie en espacio y tiempo  $\eta(x_1, t)$ . Lo que necesitamos es una inversión de (1.49)

El teorema de la Integral de Fourier establece que si es que:

- 1)  $f(x)$  es definida en todo el eje real
- 2)  $f(x)$  es suave a secciones excepto para un número finito de discontinuadas saltadas.
- 3)  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|/dx$  es convergente
- 4) en una discontinuidad asumiendo que  $f(x)$  es la media arit-

métrica de los límites tanto por derecha como por izquierda, entonces

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dT \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos T(t-x) dt$$

Entonces el teorema de la Integral de Fourier puede escribirse:

$$f(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) e^{iux} du \quad (1.50)$$

$$g(u) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iux} dx \quad (1.51)$$

si se conoce  $g(u)$  se puede conocer  $f(x)$  y viceversa. Entonces la ecuación (1.49) puede escribirse en la forma explícita de (1.50)

$$(2\pi)^{1/2} \eta_0(x_1) = \text{Re} \left\{ (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} 2B(k) e^{ikx} dk \right\}$$

entonces identificaremos  $(2\pi)^{1/2} \eta_0(x_1)$  con  $f(x)$  y  $2B(k)$  con  $g(u)$

$$\text{aplicando lo expuesto: } 2B(k) = \text{Re} \left\{ (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} (2\pi)^{1/2} \eta_0(x_1) e^{-ikx} dx \right\}$$

$$2B(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_0(x_1) \cos kx_1 dx_1$$

Habiendo encontrado la función  $B(k)$  nuestro problema está solucionado. Lo que ahora haremos será seguir una perturbación y ver que pasa en la superficie del mar, después de largos tiempos y grandes distancias, no porque así se quiera, sino porque así es requerido por el método que vamos a usar: Método de Kelvin para fase estacionaria (método asintótico). Antes de aplicar este método simplificaremos el problema asumiendo que las componentes de onda viajan en la dirección (+) del eje  $x$ :

$$(x_1, t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} B(k) \cos[kx_1 - \sigma(k)t] dk \quad (1.52)$$

en donde  $B(k) = 0$  para  $k < 0$

Por el momento acerca del argumento del coseno sabemos que este es  $f(x)$  de tal forma que

$$s(k) = kx_1 - \sigma(k)t$$

$$\eta(x_1, t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} B(k) \cos(s(k)) dk$$

momentáneamente  $x_1$  y  $t$  serán parámetros constantes, mantenidos bien lejos del origen  $x_1 \gg 0$  y  $t \gg 0$ . Diferenciando  $S(k)$  dos veces con respecto a  $k$ :

$$\frac{ds(k)}{dk} = x_1 - \frac{d\sigma(k)}{dk} t \quad \frac{d^2s(k)}{dk^2} = - \frac{d^2\sigma(k)}{dk^2} t$$

Si igualamos a cero la primera derivada obtendremos un valor extremo para  $k = k_0$ , y si la 2ª derivada es mayor que 0, entonces será un mínimo.

Haciendo esto vemos que la función  $\cos(S(k))$  oscila rápidamente para todo  $k$  excepto cerca de  $k = k_0$ .

Si es que suponemos que  $B(k)$  varía muy lentamente en comparación con la variación del coseno, entonces  $B(k) \cos(S(k)) dk$ , recibirá la mayoría de sus valores de contribuciones cerca de  $k = k_0$ .

Si expandimos  $S(k)$  en series de Taylor alrededor de  $k = k_0$

$$S(k) = S(k_0) + \left. \frac{dS}{dk} \right|_{k=k_0} (k - k_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 S}{dk^2} \right|_{k=k_0} (k - k_0)^2$$

La naturaleza de  $(k)$  es suficiente para asegurar la rápida convergencia de la expansión de Taylor para  $S(k)$ , por lo tanto solo pocos términos de la serie son necesarios para una buena aproximación.

Evaluando los términos de la serie para  $k = k_0$

$$S(k_0) = k_0 x_1 - \sigma(k_0) t$$

$$S(k) = k_0 x_1 - \sigma(k_0) t - \frac{1}{2} t \left. \frac{d^2 \sigma}{dk^2} \right|_{k=k_0} (k - k_0)$$

$$\left. \frac{dS}{dk} \right|_{k=k_0} = x_1 - \left. \frac{d\sigma}{dk} \right|_{k=k_0} t = 0$$

$$\left. \frac{d^2 S}{dk^2} \right|_{k=k_0} = - \left. \frac{d^2 \sigma}{dk^2} \right|_{k=k_0} t \tag{1.53}$$

La asunción de que  $B(k)$ , varía muy lentamente con relación al  $\cos(S(k))$  nos permite decir que  $B(k) \approx B(k_0)$  cerca de  $k = k_0$ , cuando  $|k - k_0| \ll 1$ , entonces:

$$\psi(x_1, t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} B(k_0) \cos(k_0 x_1 - \sigma(k_0) t - \frac{1}{2} t \left. \frac{d^2 \sigma}{dk^2} \right|_{k=k_0} (k - k_0)) dk$$

cambiando la nomenclatura  $\sigma(k_0) = \sigma_0$ , y evaluando la integral, llegamos después de procedimientos matemáticos y de saber que  $d\sigma/dk = c_g$ , obtenemos:

$$\psi(x_1, t) = B(k_0) \left[ 2\pi t \left| \frac{dc_g}{dk} \right| \right]^{-1/2} \cos(k_0 x_1 - \sigma_0 t \pm \pi/4) \tag{1.54}$$

el valor de  $k_0$  lo obtenemos de la derivada de  $dS/dk$ , de donde:

$$\frac{dS}{dk} \Rightarrow x_1 - c_g(k) t = 0$$

cuya solución es

$$+ \frac{\pi}{4} \quad \text{si} \quad \frac{dc_g}{dk} < 0 \quad \text{y} \quad - \frac{\pi}{4} \quad \text{si} \quad \frac{dc_g}{dk} > 0 \tag{1.55}$$



BIBLIOTECA

De las ecuaciones (1.54) y (1.55) podemos deducir que las longitudes de onda se incrementan hacia el frente del tren (propiedad que corresponde a la observación). Esto se puede explicar de la siguiente manera: para un tiempo y distancia determinados  $t = T_1$  y  $x_1 = \xi_1$ , el factor coseno en (1.54) tiene una cierta longitud de onda  $L(\xi_1) = 2\pi/k_1$ , en donde  $k_1$  se determina por medio de (1.55).

Al mismo tiempo pero a una distancia menor  $x_1 = \xi_2 < \xi_1$ , la longitud de onda es  $L(\xi_2) = 2\pi/k_2$ ,  $k_2$  determinado por (1.55)

$$c_g(k_1) = (\xi_1/T) > (\xi_2/T)$$

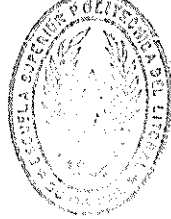
De aquí que para ondas en similares profundidades relativas, tenemos para la velocidad de fase que  $c(k_1) > c(k_2)$ . Ya que para ondas de gravedad, la mayor velocidad de fase se asocia con la mayor longitud de onda  $L(\xi_1) > L(\xi_2)$ .

Las mayores longitudes de onda en cualquier tiempo dado serán asociadas con las mayores distancias.

También de estas ecuaciones podemos obtener información acerca de los cambios de la amplitud. La ecuación (1.54) nos muestra que la amplitud de la perturbación es obtenida directamente de la amplitud del espectro y del factor  $[2\pi \epsilon \left| \frac{dc_g}{dk} \right|]^{1/2}$

Si el espectro tiene un máximo en  $k = k_m$ , en el tiempo  $t = T_1$ , por la ecuación 1.55 vemos que la amplitud del pico ocurrirá en la vecindad de





$$x_1 = c_g(k_m) \tau$$

BIBLIOTECA

Si el pico del máximo de  $B(k)$ , es agudo, entonces habrá un rápido decrecimiento de la amplitud en el tren para valores de  $x_1$  muy grandes o muy pequeños. La amplitud también depende de  $\left. \frac{dc_g(k)}{dk} \right|_{k=k_0}$  pero la derivada decrece uniformemente a medida que se incrementa y no alterará mucho la localización espacial del pico. En un tiempo posterior  $t = \tau_2 > \tau_1$ , la amplitud del pico todavía está asociada con  $k_m$  y aparecerá a una distancia  $x_1 = c_g(k_m) \tau_2$ , por lo tanto si  $\Delta x_m$  es la diferencia en posición del pico correspondiente a la diferencia de tiempo  $\tau_2 - \tau_1 = \Delta \tau$ , entonces  $\frac{\Delta x_m}{\Delta \tau} = c_g(k_m) \tau_2$  y será claro que la amplitud del pico se mueve con la velocidad de grupo  $c_g(k_m)$  correspondiente al número de onda  $k_m$  que da un máximo en la amplitud del espectro. A medida que la amplitud del pico se mueve, su tamaño decrece por el factor  $t^{1/2}$ , de acuerdo con la ley de potencias.

Si reescribimos la ecuación (1.55)  $\frac{x_1}{t} = c_g(k)$

habremos establecido el problema con  $k$  como mi rótulo y será evidente que:

- una característica particular de la variación de la amplitud
- una longitud de onda particular, y
- un período particular

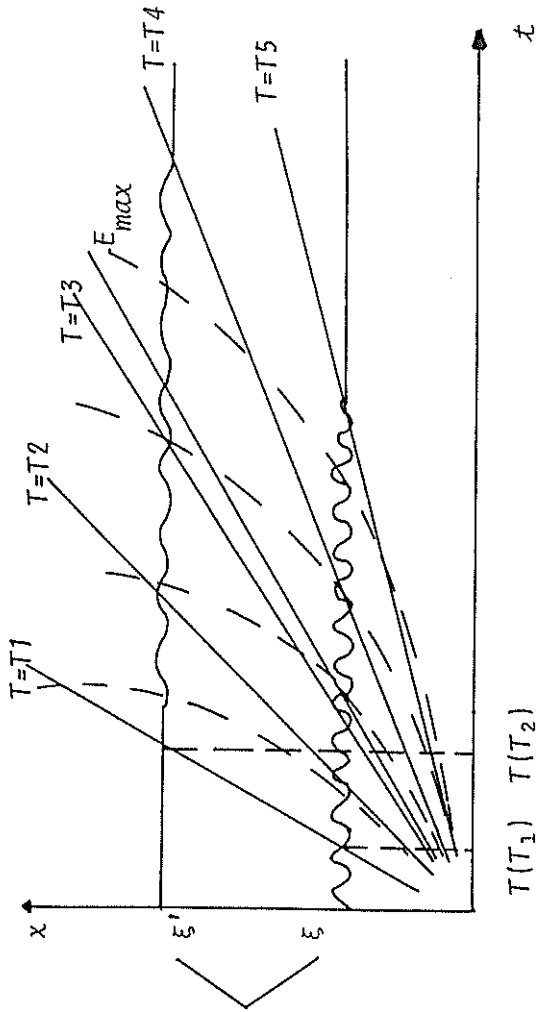
son todos propagados a la velocidad de grupo.

Algunas características del tren de ondas de perturbación limitado pueden ser representados en un diagrama que puede ser llamado

el  $t$ - $x$  diagrama (Ver figura N°12). El origen representa el tiempo y posición de la perturbación lineal.

A cualquier distancia tal como  $x_1 = \xi$  o  $x_1 = \xi'$  y la serie de tiempo de la elevación de la superficie puede ser ploteada. Primero no existe perturbación. A medida que la energía alcanza la posición que le corresponde, la superficie comienza a moverse, y cuando ella pasa, el movimiento se extingue gradualmente. Las ondulaciones representan lo que uno registraría si es que tomáramos una sonda de onda simple montada en la posición. Los dos registros se asumen que son tomados sincrónicamente. Ya que tenemos  $x_1/t = c_g(k) \equiv d\sigma(k)/dk$  para cualquier  $L$  fija,  $k$  es una constante, como también la frecuencia  $\sigma(k)$ , el período  $T$ , y la velocidad de grupo  $c_g(k)$ . Consecuentemente para cualquier longitud de onda particular la ecuación  $x_1 = c_g(k)t$  ploteada en un diagrama  $t$ - $x$  es una línea recta que pasa por el origen  $(0,0)$  y que tiene una pendiente  $c_g(k)$ .

Permitamos que  $T=T_1, T_2, T_3, \dots, \dots, \dots$  (una serie de períodos constantes), sea usada para establecer las correspondientes series de velocidades de fases constantes. La familia resultante de líneas rectas llamadas rayos, determina por sus intersecciones con las líneas de posición  $x_1 = \xi$  y  $x_1 = \xi'$ , los correspondientes tiempos  $t=T$  y  $t=T'$  a los cuales las ondas de períodos específicos



DEBERIAN  
GRAFICARSE  
EN TERCERA  
DIMENSION

Fig. Nº 12 DIAGRAMA  $x-t$  PARA LA PROPAGACION DE LA OLA

$T_1, T_2..$  arribarán a las posiciones. En el gráfico se muestran  $\tau(T_1)$  y  $\tau'(T_1)$  como ejemplos.

La ecuación  $E^+ = \rho g a^2 / 2$  muestra, que además de los factores constantes la energía en una onda progresiva sinusoidal es igual al cuadrado de la amplitud y  $\rho = c_g E$  que esta es transmitida a la velocidad de grupo. Asumiendo que esto se mantiene para cualquier componente en el espectro, para cualquier  $k$  sin interferencia de las otras componentes entonces las líneas de energía de fase coinciden con los rayos. Ondas localizadas de energía de fase particular mostrarán el mismo período. Si es que hay un máximo en el espectro de energía (o espectro de amplitudes), en un número de onda  $k$ , entonces hay un rayo correspondiente a este  $k$ , el cual mostrará la propagación del máximo de energía  $E_{max}$ .

Por medio de la ecuación (1.54) podemos demostrar que la energía representada por el espacio entre dos rayos en diagrama  $t-x$  permanece constante. En esta ecuación vemos que la amplitud de la perturbación es proporcional a  $t^{-1/2}$ , si la energía por unidad de área es proporcional al cuadrado de la amplitud, entonces  $E \sim t^{-1}$

En la figura N°13 vemos, en un tiempo  $t=T_1$ , la energía asociada con los números de onda de  $k_1$  a  $k_2$  será esparcida sobre una distancia  $d_1$ . En un tiempo posterior  $t=T_2$ , con la misma banda

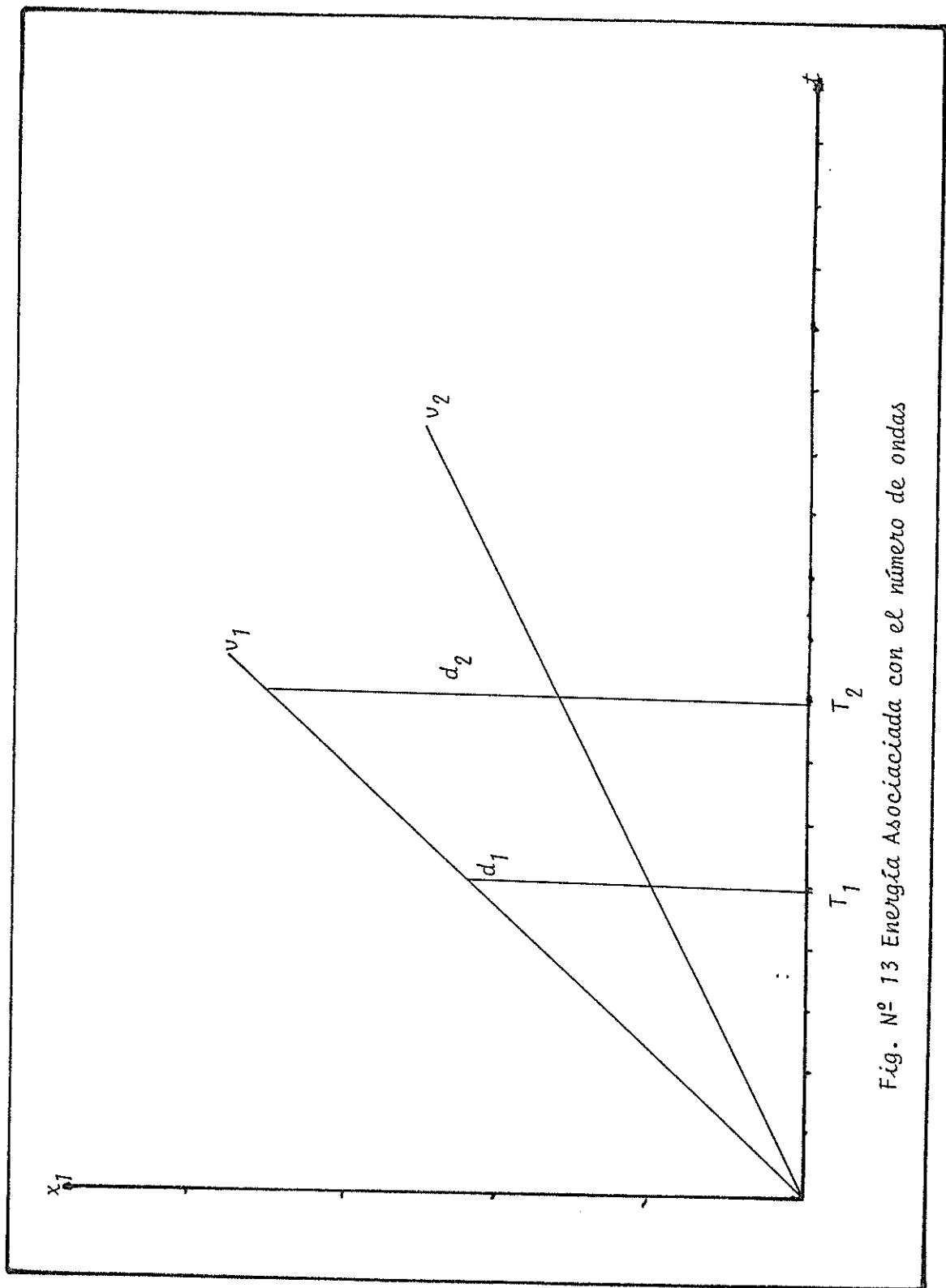


Fig. N° 13 Energía Asociada con el número de ondas

de números de onda, la energía de onda asociada es esparcida sobre una distancia  $d^2$ . Por geometría elemental  $\pi/\tau_2 = d_1/\tau_2$  o sea que  $d \sim t^{-1}$ . Ya que la energía por unidad de área es proporcional a  $t^{-1}$ , mientras que el área sobre la que es esparcida es proporcionada a  $t^2$  entonces el resultado neto es que la energía entre rayos no cambia. Ya que los rayos divergen la energía es esparcida y por lo tanto la amplitud decrecerá con el tiempo y la distancia viajados. El principio usado para la construcción del diagrama  $t-x$  puede utilizarse en cualquier problema de propagación de onda en el cual el medio es dispersivo. Debe tomarse en cuenta que los rayos solo pasan por el origen, si la perturbación inicial está centrada. Para probar que nuestra teoría de pequeña amplitud es válida, el conocimiento de la velocidad de grupo como función del período es en teoría suficiente para determinar el comportamiento de un tren de onda, observado en una posición, en todas las estaciones y tiempos.

Fuera de la región inmediatamente alrededor del origen, la superficie del mar está inalterada. Este es un factor que rara vez se menciona, que las alteraciones no truncadas pueden ser siempre descritas por una línea de espectro pura. El espectro puede tener picos agudos, pero nunca sería una línea recta, porque en realidad, la perturbación inicial está truncada.

Otra cosa más en el problema de Cauchy-Poisson, es aquel referente a aguas rasas y profundas. En aguas profundas la velocidad de grupo es 1/2 de la velocidad de fase. En aguas rasas, la velocidad de grupo se aproxima a la de fase.

En aguas profundas  $c=f(L)$ , pero en aguas rasas  $c$  es independiente de  $L$  y es solo  $c=F(h)=\sqrt{gh}$ . Ya que para cualquier profundidad finita habrá una  $L$  para la cual todas las ondas largas que habrá en aguas rasas, debe haber una velocidad de grupo máxima:

$$c_{g\max} = \sqrt{gh} \quad (1.56)$$

en donde  $c_{g\max}$  es la velocidad límite de propagación de la energía ya que esta no puede viajar a mayor velocidad que  $c_{g\max}$  en un diagrama  $t-x$  (Ver figura N°14).

Observaremos que la región arriba y a la izquierda representa la región espacio-tiempo en la cual la perturbación nunca penetra. Cerca del frente que avanza, las trayectorias en el diagrama  $t-x$  corresponden al viaje de ondas individuales cercanamente coincidentes con el rayo de  $c_{g\max}$ , entonces estas tienen que ser ondas de aguas rasas con fases y  $c_g$ , cercanamente iguales. Si es que también hay un retroceso del frente para la perturbación, debemos tener una  $c_{g\min}$  (esto ocurre cuando incluimos tensión superficial).



BIBLIOTECA

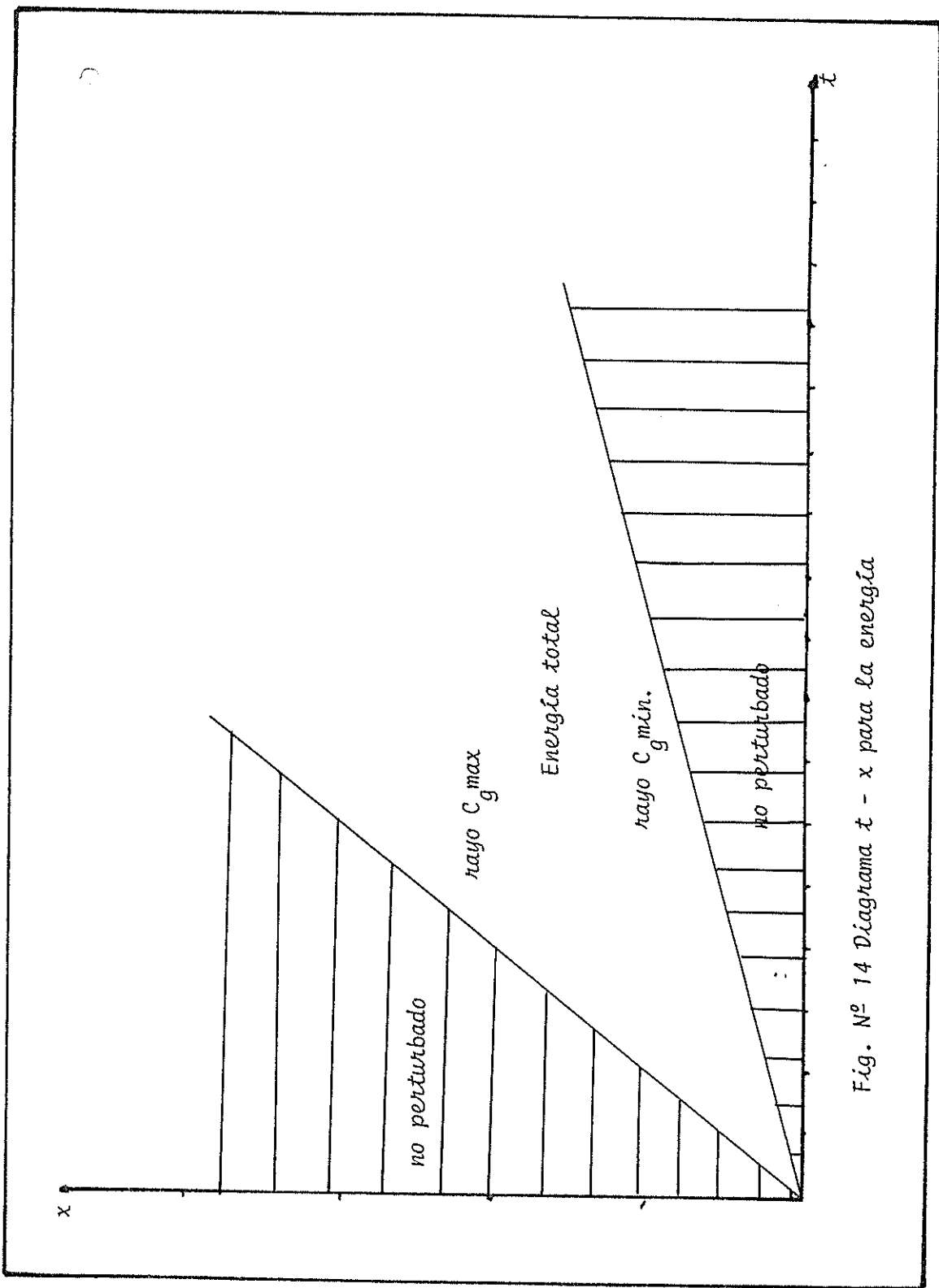


Fig. N° 14 Diagrama  $x - x$  para la energía



Todo esto cuando las perturbaciones son centradas, si es que la nuestra no está centrada, aparecerá un cambio de fase  $\epsilon$ , como teníamos en la formulación inicial del problema, de tal manera que:

$$x_i = C_g(k)t + x_{i_0}(k)$$

en donde  $x_{i_0} = d\epsilon(k)/dk$

y entonces los rayos no pasarán por el origen (0,0). (Ver figura N°13) Una consecuencia de esto es que el tren conductor se convierte en la envolvente de una familia de rayos. En la región del frente, ecuación (1.54) asegurada por el método de Kelvin de fase estacionaria, no es una aproximación satisfactoria del problema, otras aproximaciones son mejores.

#### 1.2.4. Una suma de infinitos sinusoides, configuración de la superficie con el espectro de amplitudes, tren de ondas finito de Pierson en función de tres variables

En esta sección el problema será encontrar la función que describe a la superficie con valores en la frontera, en tres variables.

Tendremos que la deformación de la superficie viene dada por

$\eta(x_1, x_2, t)$ ; también el valor de la deformación a lo largo del eje  $x_2$  en cada instante de tiempo:  $\eta(0, x_2, t) = \eta_0(x_2, t)$ , y conoceremos algo acerca de la dirección de propagación de las componentes de la onda; será dado:

$$1) \eta(0, x_2, t) = \eta_0(x_2, t) \tag{1.57}$$

2) Todas las componentes espectrales importantes tienen una componente de la velocidad de fase en la dirección (+) de  $x_1$ .

Encontraremos:  $\eta = \eta(x_1, x_2, t)$

Como siempre queremos sintetizar la perturbación de una suma infinita de componentes de onda de pequeña amplitud, armónicas simples del tipo:

$$\eta_c = a \cos(kx_1 - \sigma t) \quad (1.58)$$

$$\eta_s = b \sin(kx_1 - \sigma t) \quad (1.59)$$

donde  $k > 0$  y  $\sigma > 0$ , todas viajando en la dirección (+) del eje  $x_1$ . Si aplicamos la rotación de los ejes en cierto ángulo  $\alpha$  con respecto a la parte (+) de  $x$ , entonces

$$\eta_c = a \cos [k(x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha) - \sigma t] \quad (1.60)$$

$$\eta_s = b \sin [k(x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha) - \sigma t]$$

El medio en que trabajamos es dispersivo y por lo tanto  $c$  se puede expresar como función de  $\sigma$  o de  $k$ .

$$k = \sigma^2/g \quad \Rightarrow \quad c = g/\sigma$$

reemplazando en las ecuaciones anteriores:

$$\eta_c = a \cos[\sigma^2/g (x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha) - \sigma t]$$

$$\eta_s = b \sin[\sigma^2/g (x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha) - \sigma t]$$

En nuestro caso el espectro de amplitud será función de  $\sigma$  y  $\alpha$ , entonces  $a = a(\sigma, \alpha)$

$$b = b(\sigma, \alpha)$$

Como cada una de las ecuaciones es solución, la suma de las dos (por principio de superposición) será también solución

$$\begin{aligned} \eta(x_1, x_2, t) = & \int_{\alpha=-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\sigma=0}^{\infty} a(\sigma, \alpha) \cos[\sigma^2/g(x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha) - \sigma t] d\sigma d\alpha \\ & + \int_{\alpha=-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\sigma=0}^{\infty} b(\sigma, \alpha) \sin[\sigma^2/g(x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha) - \sigma t] d\sigma d\alpha \end{aligned} \quad (1.61.)$$

No necesitamos considerar cambio de fase, ya que se incluye en la solución tanto el seno como el coseno.

Con respecto a los límites de integración,  $\alpha$  podría variar de  $-\pi$  a,  $\pi$ , pero es suficiente que varíe de  $-\pi/2$  a  $+\pi/2$ ; y con respecto a  $\sigma$ , esta no puede tener valores negativos y por lo tanto va de 0 a  $\infty$ ,

Es necesario hacer un análisis con respecto a  $\sigma$  y  $k$  y a sus valores. Físicamente  $\sigma$  y  $k$  son (+), ya que son valores de los números de crestas por unidad de tiempo o unidad de intervalo que vamos a encontrar. Ahora que ondas progresivas con perfiles rígidos pueden tener velocidades de fase (+) o (-) y si  $c = \sigma/k$ , entonces existe la posibilidad de que  $\sigma$  o  $k$  sean (-).

Hemos identificado sinusoides con argumentos  $(kx - \sigma t)$ ,  $c > 0$  y  $(kx + \sigma t)$  con  $c < 0$ . Si es que esto es válido entonces  $k > 0$  y  $\sigma > 0$ . Imponiendo esta condición y haciendo explícitos los signos,

tenemos:

$$\begin{aligned}
 a \cos(kx - \sigma t) &= a \cos(-kx + \sigma t) = \operatorname{Re} a e^{i(kx - \sigma t)} \\
 a \sin(kx - \sigma t) &= -a \sin(-kx + \sigma t) = \operatorname{Im} a e^{i(kx - \sigma t)}
 \end{aligned}
 \tag{1.62}$$

son ondas asociadas con  $c > 0$ ; y que

$$\begin{aligned}
 a \cos(kx + \sigma t) &= a \cos(-kx - \sigma t) = \operatorname{Re} a e^{i(kx + \sigma t)} \\
 a \sin(kx + \sigma t) &= -a \sin(-kx - \sigma t) = \operatorname{Im} a e^{i(kx + \sigma t)}
 \end{aligned}
 \tag{1.63}$$

son ondas asociadas con  $c < 0$ .

Si es que consideramos a  $\sigma$  esencialmente (+), pero  $-\infty < k < +\infty$ , entonces la dirección del viaje de las componentes depende del signo explícito antes de  $\sigma$  y si es que  $k$  es (+) o (-) o sea  $\{-\sigma$   
 $- y k > 0\}$  o  $\{+\sigma y k < 0\}$  con  $c > 0$ , mientras  $\{-\sigma y k < 0\}$   
o  $\{+\sigma y k > 0\}$ , significan que  $c < 0$

Entonces una expresión como

$$\eta(x, t) = \int_{k=-\infty}^{\infty} a(k) e^{i(kx - \sigma t)} dk
 \tag{1.64}$$

incluye componentes viajando en ambas direcciones aunque de nuestro anterior análisis podríamos pensar que de  $kx - \sigma t$ , todas las componentes viajan hacia la derecha. Que esto suceda requerirá que tanto  $k > 0$  y  $\sigma > 0$  o  $k < 0$  y  $\sigma < 0$ , en cuyo caso los límites de integración serían tanto 0 a  $+\infty$ , como  $-\infty$  a 0. Es desea-

ble mantener los límites de integración simétricos, entonces tanto  $\sigma > 0$  y  $a(k)=0$  para  $k < 0$  o  $\sigma < 0$  y  $a(k)=0$  para  $k > 0$ , serían restricciones para que la componente viaje en la dirección (+).

Para el trabajo analítico  $\sigma$  y  $k$  pueden tomar valores a lo largo de todo el eje de los números reales, pero físicamente son esencialmente (+). Los signos son interpretados en términos de la dirección de propagación.

La solución dada por (1.61) es la suma de infinito número de armónicos simples de ondas progresivas cuyas amplitudes están dadas por el espectro de amplitudes de dos dimensiones  $a(\sigma, \alpha)$ , para las ondas pares y  $b(\sigma, \alpha)$  para las impares (par o impar se refiere a funciones pares o impares).

Si nosotros en (1.61) hacemos  $x_1=0$ , obtenemos  $\eta_0(x_2, t)$  condición ya dada. Para poder obtener los valores de  $a$  y  $b$ , es necesario multiplicar esta expresión

$$\eta_0(x_2, t) = \int_{\alpha=-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\sigma=0}^{\infty} a(\sigma, \alpha) \cos(\sigma^{1/2} x_2 \sin \alpha - \sigma t) d\sigma d\alpha + \int_{\alpha=-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\sigma=0}^{\infty} b(\sigma, \alpha) \sin(\sigma^{1/2} x_2 \sin \alpha - \sigma t) d\sigma d\alpha \quad (1.65)$$

por una serie de factores, aplicar lo que se conoce acerca de las integrales de funciones pares e impares, aplicando la lema de Riemann-Lebesgue y análisis de Fourier, llegando a:



BLIOTECA

$$a(\sigma, \alpha) = f(\eta_0(x_2, t))$$

$$b(\sigma, \alpha) = f(\eta_0(x_2, t))$$

El mismo procedimiento es aplicable cuando lo que se conoce es  $\eta(x_1, x_2)$ . La solución obtenida es formal, pero se permite como gran libertad escoger  $\eta_0$  lo suficientemente elaborada para representar una tormenta del mar real producida por el viento al soplar, pero las características de la forma de la onda nos muestran una solución por superposición de pequeña amplitud: las ondas se mueven con la velocidad de fase: hay una modulación de la amplitud que se mueve con la velocidad de grupo, y las ondas individuales se mueven a través del tren.

### 1.3. Las olas como un proceso estocástico

Si registramos las oscilaciones del nivel del mar, durante un tiempo determinado, observaremos algo como lo que muestra la figura N°15.

Esta oscilación se presenta como aleatoria, aunque se puede observar algo de periodicidad (dependería esta de factores como intensidad y duración del viento, extensión del área de acción del viento). Si la oscilación es aleatoria existen características que se le pueden atribuir. Observemos la función aleatoria de la figura N°16.

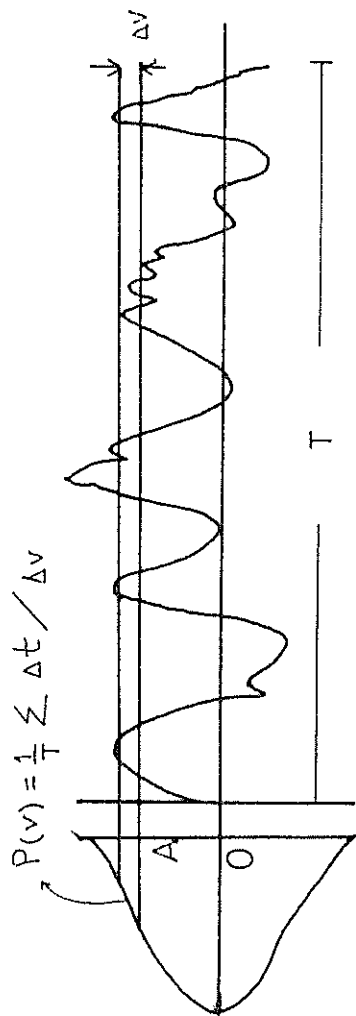


Fig. Nº 15 FUNCION ALEATORIA

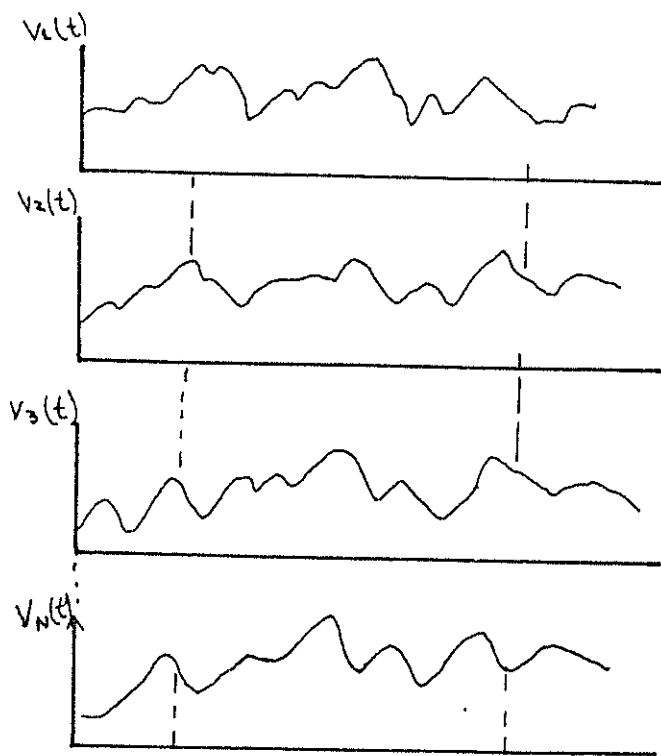


Fig. N° 16 Fenómenos aleatorios





BIBLIOTECA

Si la función es  $v(T)$ , podemos establecer la frecuencia estadística con la que  $v$  está entre  $v$  y  $\Delta v$

$$\text{freq}[v < v(t) < v + \Delta v] = \frac{\sum \Delta t}{T} \tag{1.66}$$

y si  $T$  crece indefinidamente, la  $f$  tiende a la probabilidad

$$P[v < v(t) < v + \Delta v] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sum \Delta t}{T}$$

y si  $\Delta v \rightarrow 0$

$$P[v < v(t) < v + \Delta v] = p(v) \Delta v \tag{1.67}$$

en donde  $p(v)$  es la función densidad de probabilidad

$$p(v) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \left[ \frac{P[v < v(t) < v + \Delta v]}{\Delta v} \right]$$

$$p(v) = \lim_{\substack{\Delta v \rightarrow 0 \\ T \rightarrow \infty}} \frac{1}{T} \frac{\sum \Delta t}{\Delta v} \tag{1.68}$$

Si  $p(v)$  es cualquiera de las distribuciones definidas en estadística, entonces la función será considerada como aleatoria; generalmente una distribución normal encaja y entonces la función se considera gaussiana.

### 1.3.1. Estacionaridad y ergodicidad

Supongamos que durante  $N$  días obtenemos  $N$  registros, mostrando un fenómeno aleatorio, que se observa a la hora cero de cada día.

Si los períodos son los mismos  $T < 24$ , entonces podemos tomar las ordenandas  $v_k(t)$  en cada uno de los registros y calcular la media. Ver figura N°16.

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N V_k(t) \quad (1.69)$$

Así mismo la media de los productos es:

$$\Delta(t, t+T) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N V_k(t) V_k(t+T) \quad (1.70)$$

Si cuando  $N \rightarrow \infty$ ,  $\mu$  y  $A$  son independientes de  $t$ , entonces la función aleatoria se puede considerar estacionaria. Ahora que una familia de funciones densidad de probabilidades podría describirse por momentos  $\mu_v^n$  y momentos conjuntos  $A_v$ , de todos los órdenes y si estos son invariables con el tiempo  $t$ , entonces el fenómeno es fuertemente estacionario.

Ahora que si las mediciones de  $N$  registros hubieran sido tomadas simultánea e independientemente por aparatos de las mismas características, de la curva de orden  $K$ , podemos decir que

$$\mu_v(k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T V_k(t) dt \quad (1.71)$$

$$\Delta_v(\tau, k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T V_k(t) V_k(t+\tau) dt$$

y si para cada  $K$ , o sea para cada curva  $\mu$  y  $A$  son los mismos, el sistema se llama francamente ergódico; y si los momentos conjuntos  $\mu_v^n$  y  $A_v(\tau)$  fueran también invariables con  $K$ , entonces el

sistema es fuertemente ergódico. Se puede concluir entonces que la ergodicidad es sinónimo de estabilidad probabilística.

Entonces al estudiar las ondas generadas por el viento estamos obligados a asumir condiciones de ergodicidad y estacionaridad, y más allá de esto, es menester que el movimiento pueda ser representado por ecuaciones compatibles con los principios de la hidrodinámica.

## CAPITULO 2

### METODOLOGIA

#### 2.1. Naturaleza de los datos

##### 2.1.1. Ubicación Geográfica del Sensor de Presión

La serie de tiempo analizada, corresponde a una sección del registro obtenido por medio de un olígrafo, que estuvo situado en el área indicada en la figura N°17, frente a las costas de Manabí. El registro corresponde a aquel obtenido a partir del 19 del mes de Enero de 1980, registro que pertenece al INOCAR.

##### 2.1.2. Instrumento de Medida

Existe una gran variedad de instrumentos de medida, conocidos generalmente como olígrafos; en cuanto a los principios en que se basa su funcionamiento se pueden clasificar en:

- de presión
- inerciales
- de reflexión ultrasónica
- eléctricos

Ya que el utilizado para obtener el registro en el cual se basa esta tesis, es de presión procederé a hacer una descripción de los mismos.

Los olígrafos de presión son instrumentos que trabajan inmersos y

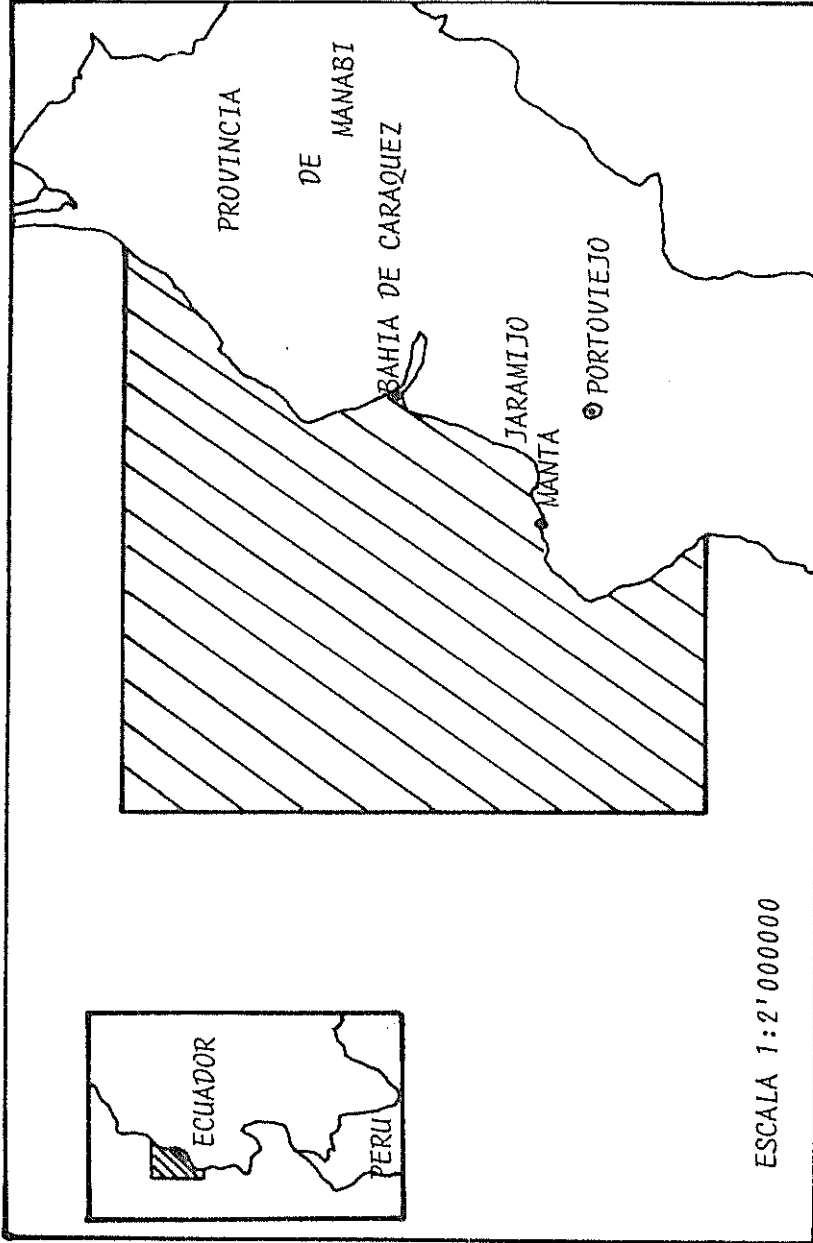


Fig N° 17 AREA DE ESTUDIO

ESCALA 1:2'000000

que provistos de un sensor de presión, captan la variación de la presión del peso de una columna de agua, resultante del movimiento ondulatorio de la superficie. Generalmente son de fácil operación, más si se colocan a grandes profundidades, no detectan las oscilaciones de frecuencia muy alta, aunque en la realidad algunos olígrafos están diseñados para filtrar buena parte de las oscilaciones.

Las medidas registradas sufren una atenuación con las profundidades,  $h$  del lugar y  $z$  del sensor de presión (variables con la marea). De las expresiones:

$$P = \rho g z + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$$
$$\phi = \frac{R_g}{w} \frac{\cosh[k(z-h)]}{\cosh(kh)} \sin(\omega t - kx) \quad (2.1.)$$

El olígrafo utilizado para muestreo, es un instrumento de fondo, sensor de presión, diseñado para medir y registrar ondas superficiales con períodos de un segundo o más.

El WG/100S es un olígrafo que contiene un sensor modelo WG/100S, un registrador analógico, modelo WG/100, una batería interna, todo encerrado en una caja simple de presión.

El instrumento está diseñado para proveer de 60 horas de registro continuo. El tiempo de registro puede ser programado internamente, de tal manera que las 60 horas de registro continuo se

puedan extender sobre un período de un año. Este instrumento es adecuado para ser usado en presas, puertos, estuarios, lagos o en el océano abierto. Un sensor automático de presión está incluido en el instrumento para permitir usar el rango dinámico total del instrumento sin considerar la profundidad de instalación. El rango calibrado del equipo es de  $\pm 10$  pies de onda, con una profundidad de instalación de 150 pies.



BIBLIOTECA

La reducción de datos tomados en el registro debe hacerse tomando en cuenta que el registro se observa continuo aunque es fácil distinguir las secuencias de registro separadas. La velocidad del papel es de 20" por hora y cada división menor en el eje del tiempo representa 30 segundos de registro. Se calculan las pulgadas de agua por división de la constante de calibración (constante de calibración/10=pulg.H<sub>2</sub>O/división mayor). Para otra agua que no sea dulce, se multiplica la constante de calibración por el radio de la densidad del agua dulce a la densidad del fluido medido. Cuando se utiliza en agua salada, la ecuación es la siguiente:

$$\frac{\text{constante de calibración}}{10} \times \frac{\text{densidad de agua dulce}}{\text{densidad de agua salada}} = \frac{\text{pulg. agua salada}}{\text{división mayor}}$$

La constante de calibración es 993 cm. de H<sub>2</sub>O por 10 divisiones mayores.

Después de haber hecho esto se multiplican las alturas de las on-

das en las divisiones mayores por las pulgadas o centímetros de agua por división mayor, para obtener la presión registrada de las ondas.

### 2.1.3. Recolección de datos

El instrumento de medida fue colocado en el fondo, calibrado para profundidad del lugar donde estuvo. El sensor de presión registraba durante 15 minutos continuos cada seis horas.

### 2.1.4. Proceso de Digitalización

Los datos del registro fueron digitalizados en un computador Hewlet - Packard 9830 que constaba de una mesa digitalizadora, fuente digitalizadora, perforadora de cinta, lectora de cinta magnética e impresora. Dicho computador pertenece la división de Ingeniería Mecánica del Instituto de Pesquisas Tecnológicas de la Universidad de Sao Paulo, Brasil.

Para la digitalización se utilizó un programa ya implementado en dicho computador que tenía como variables de entrada la señal registrada y como variable de salida la señal digitalizada en décimas de milímetro.

Para la utilización de estas series se procedió a multiplicar dichos valores obtenidos por el factor escala propio del ins-



trumento. Como línea base de digitalización se utilizó la línea equivalente a 3 en el registro, tal como se muestra en la figura N°18.

El factor escala se obtuvo de la siguiente manera: El factor de calibración del instrumento, 993 cm., nos indica que las 10 divisiones mayores en el papel corresponden a 9.93 m. y por lo tanto cada división menor a 0.993 m. En milímetros cada división menor tiene una longitud de 16.5 mm., por lo tanto si:

$$16.5 \text{ mm.} \text{ ————— } 0.993 \text{ m}$$

$$1 \text{ mm.} \text{ ————— } x \quad y$$

por regla de tres simple  $1 \text{ mm.} = 0.06018 \text{ m.}$ , factor por el cual hay que multiplicar los datos ya digitalizados para obtener valores de altura referidos al nivel medio de la baja marea de Sicigia (MLWS).

Debido a que el digitalizador trabaja de izquierda a derecha y los datos se registran de derecha a izquierda, cuando se procede a la utilización de los datos se hace necesario una inversión del orden de los mismos.

A continuación se presenta la tabla N°II, que nos indica: el número del registro, el día y hora a los que corresponde, el nombre del archivo en que se encuentra guardado dicho registro y el número de puntos del mismo. En las figuras N°25 y 26 se muestran

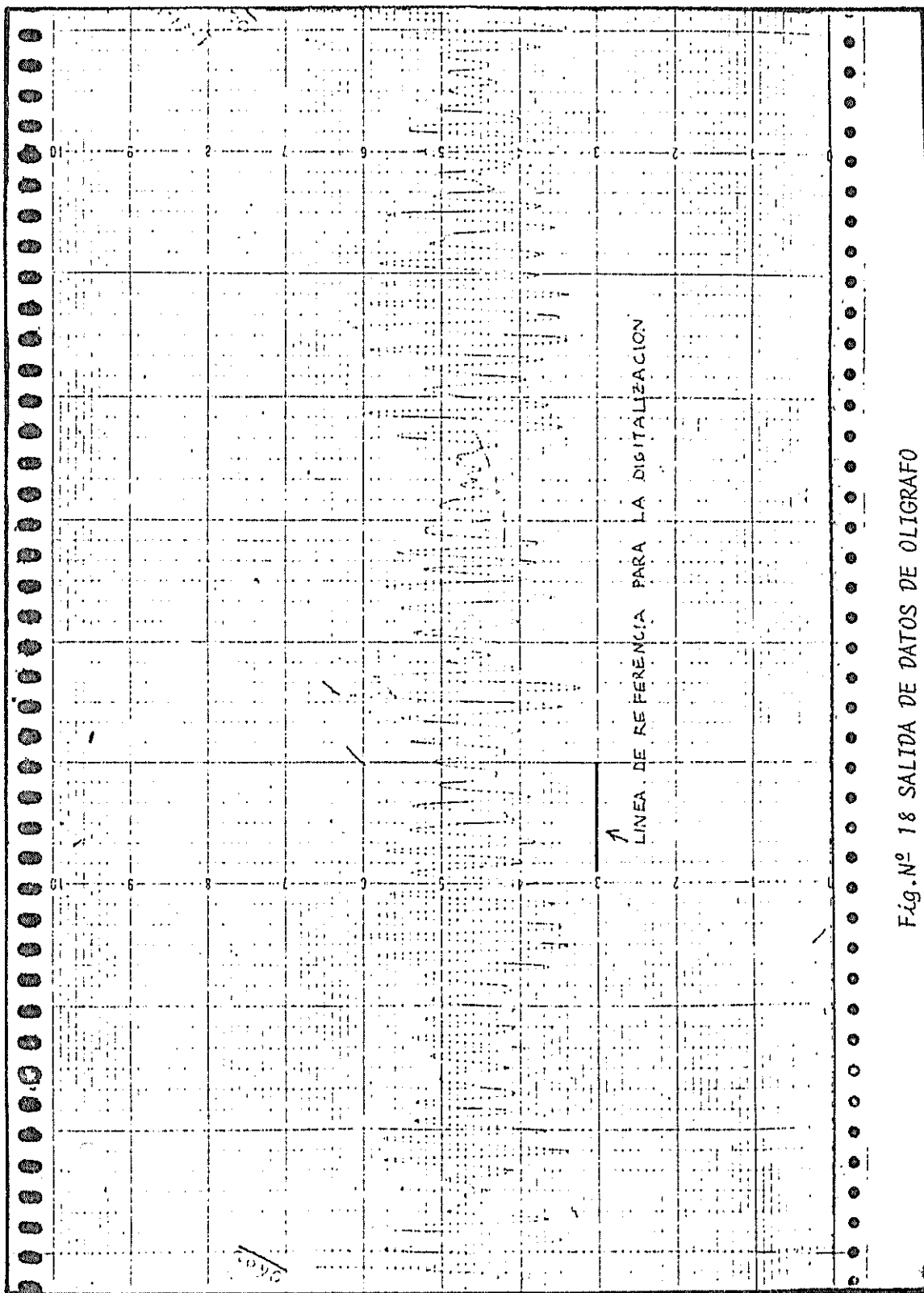
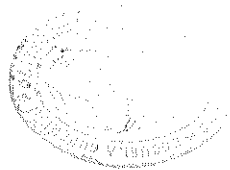


Fig. N° 18 SALIDA DE DATOS DE OLIGRAFO

TABLA N°II  
SERIES DIGITALIZADAS

Nº del REGISTRO	DIA	HORA	NOMBRE DEL ARCHIVO	NUMERO DE DATOS
0001	19/01/80	12h00-18h00	DATOS	1041
0002	19/01/80	18h00-00h00	DATO 2	1038
0004	20/01/80	06h00-12h00	DATO 3	1018
0005	20/01/80	12h00-18h00	DATO 4	1039
0006	20/01/80	18h00-00h00	DATO 5	1034
0007	21/01/80	00h00-06h00	DATO 6	1026
0008	21/01/80	06h00-12h00	DATO 7	1034
0009	21/01/80	12h00-18h00	DATO 8	1021
0010	21/01/80	18h00-00h00	DATO 9	1030
0011	22/01/80	00h00-06h00	DATO 10	1023
0012	22/01/80	06h00-12h00	DATO 11	1023
0013	22/01/80	12h00-18h00	DATO 12	1027
0014	22/01/80	18h00-00h00	DATO 13	1025
0015	23/01/80	00h00-06h00	DATO 14	1022
0016	23/01/80	06h00-12h00	DATO 15	1023
0017	23/01/80	12h00-18h00	DATO 16	1017
0018	23/01/80	18h00-00h00	DATO 17	1021
0019	24/01/80	00h00-06h00	DATO 18	1025
0020	24/01/80	06h00-12h00	DATO 19	1020
0021	24/01/80	12h00-18h00	DATO 20	1029

Nº del REGISTRO	DIA	HORA	NOMBRE DEL ARCHIVO	NUMERO DE DATOS
0022	24/01/80	18h00-00h00	DATO 21	1022
0023	25/01/80	00h00-06h00	DATO 22	1028
0024	25/01/80	06h00-12h00	DATO 23	1020
0025	25/01/80	12h00-18h00	DATO 24	1031
0026	25/01/80	18h00-00h00	DATO 25	1039
0027	26/01/80	00h00-06h00	DATO 26	993
0028	26/01/80	06h00-12h00	DATO 27	1026
0029	26/01/80	12h00-18h00	DATO 28	1016
0030	26/01/80	18h00-00h00	DATO 29	1015
0031	27/01/80	00h00-06h00	DATO 30	1019



20/01/80 18h00 - 00h00

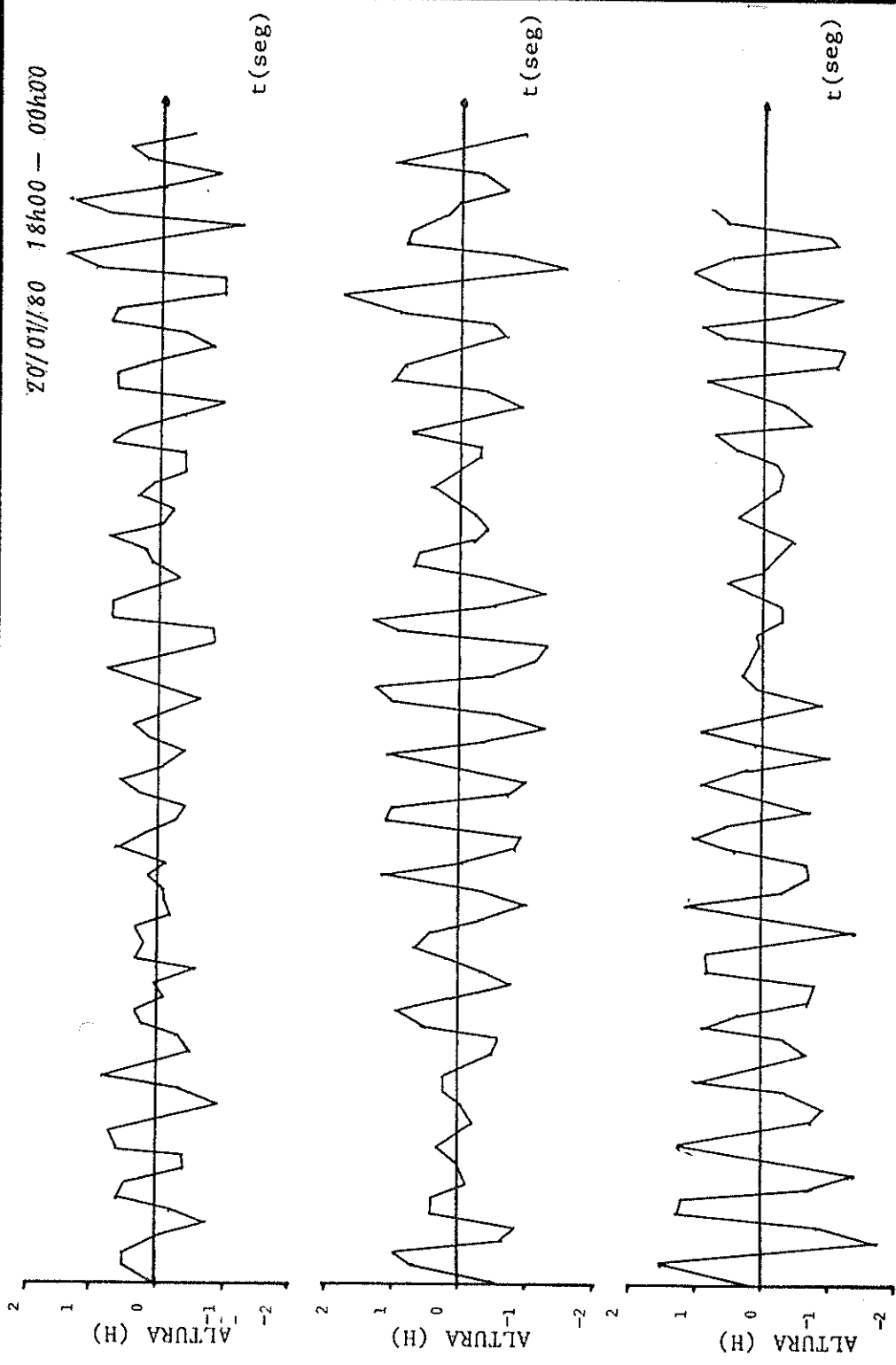


Fig. N° 25 DATOS DE LA SERIE DATO 5 REFERIDOS A UNA LINEA MEDIA CERO  
(1 mm. = 1.75 seg)

los de los registros analizados.

## 2.2. Parámetros Estadísticos

### 2.2.1. Teoría de Probabilidad

La probabilidad es una rama de la matemática deductiva cuyo desarrollo axiomático comienza con la formulación del espacio muestral, que no es otra cosa que el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento. Estos puntos pueden ser agrupados de algunas maneras; dichas agrupaciones se llaman eventos y bajo apropiadas condiciones, las funciones de probabilidad se les pueden asignar a cada uno de ellos.

Estas probabilidades siempre se encuentran entre cero y uno; la de que un evento sea imposible es cero y la de que uno sea cierto es uno.

Los espacios muestrales pueden ser finitos o infinitos.

Considere un espacio muestral de puntos que representan las posibles salidas de un experimento particular. Una variable aleatoria  $x(k)$  es una función conjunto definida por puntos del espacio muestral, o sea que una variable aleatoria es un número real entre  $-\infty$  y  $+\infty$ , que se encuentra asociada en cada posible punto  $k$  muestrado que pueda ocurrir. De tal forma, la salida

aleatoria de un experimento, identificada por  $K$  puede ser representada por un número real  $x(k)$ , llamado variable aleatoria. Así mismo a cada evento que puede asumir se le asignare una probabilidad.

Para cualquier valor fijo de  $x$ , el evento aleatorio  $x(k) \leq x$  está definido como el conjunto de posibles salidas de  $K$  tales que  $X(k) \leq x$ . Entonces uno podría definir la función distribución de probabilidades  $P(x)$  como la probabilidad que se origina a un conjunto de puntos  $x(k)$  que satisfacen la inecuación anterior; de tal forma que ese conjunto de puntos es un subconjunto de los puntos que satisfacen la relación  $X(k) \leq \infty$ . Esto se escribiría así:

$$P(x) = \text{Prob}[x(k) \leq x] \quad (2.2)$$

$$P(a) \leq P(b) \quad \text{si } a \leq b$$

$$P(-\infty) = 0 \quad P(\infty) = 1$$

si es que la variable asume un rango continuo de valores, la función densidad de probabilidad puede ser definida por la relación diferencial siguiente:

$$P(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{\text{Prob}[x < x(k) \leq x + \Delta x]}{\Delta x} \right] \quad (2.3)$$

de aquí que

$$p(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1 \quad (2.4)$$



Una de las funciones densidad de probabilidad más importante es la Normal o Gaussiana.

### 2.2.2. Distribución Normal (Gaussiana)

Una variable aleatoria  $x(k)$  se dice que tiene una distribución normal si es que su función densidad de probabilidad viene dada por

$$p(x) = (b/\sqrt{2\pi})^{-1} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2b^2}\right] \quad (2.5)$$

donde  $a$  es una constante real cualquiera y  $b$  es una constante positiva. Puede verificarse que  $a$  y  $b$  constituyen el valor medio y la desviación estandar de la variable aleatoria  $x(k)$  ya que:

$$E[x(k)] = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx = a = \mu_x \quad (2.6)$$

$$E[(x(k)-a)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 p(x) dx = b^2 = \sigma_x^2 \quad (2.7)$$

Por lo tanto la función densidad de probabilidad normal, puede expresarse así:

$$p(x) = (\sigma_x \sqrt{2\pi})^{-1} \exp\left[-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right] \quad (2.8)$$

y la función de distribución de probabilidad normal es por definición:

$$P(x) = (\sigma_x \sqrt{2\pi})^{-1} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{(\xi-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right] d\xi \quad (2.9)$$



La importancia de la distribución normal en problemas físicos puede ser atribuida en parte al Teorema del Límite Central, el cual asegura que esta distribución se obtendrá completamente de la suma de un número largo de variables independientes que actúan conjuntamente. Siendo más específicos, si tenemos  $N$ , variables aleatorias independientes  $X_1(k), X_2(k), \dots, X_N(k)$  cuyas distribuciones se desconocen y pueden ser diferentes, cada una de ellas con su Media y varianza asociadas, tendremos que la suma de las variables aleatorias es

$$X(k) = \sum_{i=1}^N a_i X_i(k) \quad (2.10)$$

donde las  $a_i$  son constantes arbitrarias fijas y la varianza y la media de esta suma vendrán dadas por

$$\mu_X = E[X(k)] = E\left[\sum_{i=1}^N a_i X_i(k)\right] = \sum_{i=1}^N a_i E[X_i(k)] = \sum_{i=1}^N a_i \mu_i \quad (2.11)$$

$$\sigma_X^2 = E[X(k) - \mu_X]^2 = E\left[\sum_{i=1}^N a_i (X_i(k) - \mu_i)\right]^2 = \sum_{i=1}^N a_i^2 \sigma_i^2 \quad (2.12)$$

El tramo del límite central establece que bajo condiciones comunes la suma de las variables  $X(k)$  será normalmente distribuida a medida que  $N \rightarrow \infty$ .

Su aplicación en nuestro caso, sería el de series de tiempo estacionarias que las cuales muestran un comportamiento de tipo gaussiano.

#### 2.2.4. Varianza y Media

Cuando no es posible determinar la función densidad de probabilidades o la distribución de probabilidades, se describen las propiedades de las mismas en función de diferentes números. Las más simples de ellos son la media y la varianza.

La media no es otra cosa que el promedio de los valores que la variable aleatoria  $X$  toma. Usualmente se denota por  $\mu$  y se llama valor esperado de la variable aleatoria  $X$ , de tal forma que:

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \quad (2.13)$$

que se puede unir que es el entre de gravedad de la función densidad de probabilidades de  $X$ , de aquí que sirve para localizar la distribución. La media de una variable aleatoria discreta puede ser estimado de la siguiente manera:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (2.14)$$

La varianza es una medida de la dispersión de la distribución alrededor de la media y viene dada por la siguiente expresión

$$\sigma^2 = E[x^2] - \mu^2 \quad (2.15)$$

Un buen estimador de la varianza es el siguiente:

$$S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X}_2) \quad (2.16)$$

La raíz cuadrada de la varianza es la desviación estándar.

## 2.2.1. Intervalos de Confianza

Definamos una cantidad chi-cuadrado  $= \chi^2$ , como una medida de la dispersión en un estimado  $X_i(1)$ :

$$\chi^2 = \sum_x (X_i - \bar{X}_i)^2 / \bar{X}_i \quad \text{para } \bar{X}_i \neq 0 \quad (2.17)$$

$$\chi^2 = \sum_i X_i^2$$

Asumiendo que  $X_i$  está distribuida de acuerdo con una curva gaussiana,  $\chi^2$  estará distribuida con la llamada distribución  $\chi^2$ , que se denotará por  $f(\chi^2)$ . Esta función contiene un número de grados de libertad  $\nu$  como parámetro y tiene la propiedad de que:

$$\int_0^{\infty} f(\chi^2) d\chi^2 = 1 \quad (2.18)$$

En la tabla N<sup>o</sup>IX se presentan intervalos de confianza para diferentes grados de libertad.

(1) Este puede ser el estimado de cualquier función, que para el caso de análisis es el espectro de potencia.

TABLA N°IX

INTERVALOS DE CONFIANZA PARA EL ESPECTRO DE POTENCIA ASUMIENDO UNA DISTRIBUCION  $\chi^2$  (después de Munkrtal, 1959) con 95% de probabilidad.

GRADOS DE LIBERTAD	INTERVALO DE CONFIANZA	GRADOS DE LIBERTAD	INTERVALO DE CONFIANZA
1	0.2 - 1000	15	0.55 - 2.4
2	0.21 - 40	20	0.59 - 2.1
3	0.32 - 14	50	0.69 - 1.55
4	0.36 - 8.3	100	0.78 - 1.35
5	0.39 - 6.0	150	0.81 - 1.27
6	0.42 - 4.8	200	0.83 - 1.23
8	0.46 - 3.8	300	0.86 - 1.18
10	0.49 - 3.1		

Entonces la probabilidad  $P_n$  de que  $X^2$  este localizada entre  $a$  y  $b$  es como sigue:

$$P_r(a < x^2 < b) = \int_a^b f(x^2) dx^2 \quad (2.19)$$

De acuerdo a los límites buscados, o sea de acuerdo con los valores de  $a$  y  $b$  se puede determinar con un porcentaje de probabilidad el intervalo de confianza para el estimado de una función.

En la tabla N° IX se han listado los intervalos de confianza en 95% de probabilidad, de Munketal (1959).

Para el caso del espectro de potencia, los grados de libertad son función de la relación  $\underline{N}$ , en donde  $N$  es el número de datos de la serie cuyo espectro se estima y  $M$  es el número máximo de desplazamientos usados en el cálculo de la función autocovarianza. Este intervalo se obtiene multiplicando el espectro por los valores encontrados en la tabla N° IX

### 2.2.5. Momentos Espectrales

Los momentos espectrales son los valores esperados de una variable aleatoria (en nuestro caso la variable aleatoria es la altura de olas); para calcularlos se haría necesario conocer la función densidad de probabilidades. Gracias al análisis de Fourier es factible hacer estos cálculos en función de las series de



Fourier o del Espectro.

BIBLIOTECA

La importancia de estos momentos espectrales radica en su utilidad en la determinación de los parámetros estadísticos de las olas, tales como la altura media, altura significativa, período medio, etc.

Así, si es que  $\eta(t)$  representa la altura de un tren de olas, en relación al nivel medio, en un instante  $t$ , el valor medio  $[\overline{\eta(t)}]^2$  es la varianza de la oscilación. Si  $\eta'(t)$  y  $\eta''(t)$  son las primera y segunda derivada de  $\eta(t)$  sus valores medios expresados por  $\overline{\eta'(t)}$ ,  $\overline{\eta''(t)}$ , son parámetros esenciales en la determinación de la función probabilística deseada.

Estos valores esperados representan los momentos de distribución y se pueden calcular con términos estadísticos ya desarrollados en la aplicación de distribuciones de probabilidad, de tal forma que para el caso del espectro de amplitudes  $F(w)$ , estos momentos son de la siguiente forma:

$$M_n = \int_0^{\infty} w^n F(w) dw$$

en donde  $n$  indica el orden del momento,  $w$  es la frecuencia angular y es mayor o igual a cero.

Los momentos de mayor importancia son el de orden cero, segundo orden y cuarto orden;

orden y cuarto orden;

$$M_0 = \int_0^{\infty} F(\omega) d\omega$$

$$M_2 = \int_0^{\infty} \omega^2 F(\omega) d\omega$$

$$M_4 = \int_0^{\infty} \omega^4 F(\omega) d\omega$$

Los cuales en el análisis estadístico convencional son iguales a:

$$M_0 = [\overline{\eta(t)}]^2$$

$$M_2 = [\overline{\eta'(t)}]^2$$

$$M_4 = [\overline{\eta''(t)}]^2$$

El momento de orden cero es igual a la varianza de la serie igual a la energía total de la misma; representa el área bajo la curva del espectro de amplitudes.

El momento de segundo orden es representativo del valor medio cuadrado de la velocidad con que se desplaza la elevación de la superficie, y el momento de cuarto orden es representativo del valor medio cuadrado de la aceleración de la misma.

### 2.3. Análisis espectral

#### 2.3.1. El análisis de Fourier de series de tiempo

Una serie de tiempo es una función de tiempo o señal  $x(t)$  sujeta

a cambios aleatorios, siendo su característica más importante que no se puede predecir su comportamiento con exactitud, a diferencia de las señales determinísticas cuyos valores pueden calcularse para cualquier tiempo  $t$ . Es por esta razón que las series de tiempo se describen solamente por medio de las leyes estadísticas.

Las series pueden ser continuas y discretas. Obviamente una serie continua es aquella cuyas mediciones son continuas (registradas por instrumentos).

Aquellas series cuyos valores están dados para intervalos específicos de tiempo son las series discretas.

Una serie continua puede ser transformada en una discreta para intervalos de tiempo  $A$ , por lo tanto una serie continua puede ser analizada en su forma analógica o digital.

Las series continuas son de "banda limitada" ya que no contienen frecuencia más altas que las que les permite el instrumento que las muestra.

Los métodos de Fourier fueron desarrollados para series determinadas, más son susceptibles de modificaciones que los hacen útiles para series de tiempo.



### 2.3.1.1. Procesos Estocásticos y series de tiempo

Si tomamos varias reuniones de una serie de tiempo éstas no presentarán parecido alguno y solamente a través de sus propiedades promedio es posible encontrar alguna similitud entre ellas, de aquí la necesidad de usar leyes de probabilidad para poder describir una serie de tiempo.

Hay que tomar en cuenta que en la serie de tiempo medida, registrada, cada uno de sus valores es uno de los posibles valores que la serie pudo haber tomado en el instante de medición, de tal forma que todos los posibles valores de la serie de tiempo; en un tiempo  $t$  dado, pueden ser descritos por una variable aleatoria  $X(t)$  y su distribución de probabilidad asociada. En resumen, el valor esperado  $X(t)$ , que la serie tiene en  $t$ , es considerado como uno, de entre el número infinito de valores que la variable aleatoria  $X(t)$  pudo haber tomado en el tiempo  $t$ .

Entonces el comportamiento de toda la serie de tiempo en todos los tiempos puede describirse por un conjunto de variables aleatorias  $[X(t)]$ , donde la variable independiente  $t$  está en el rango de  $-\infty \leq t \leq +\infty$ , y así las propiedades estadísticas de la serie son descritas asociando distribuciones de probabilidad

al conjunto de tiempos  $t_1, t_2, t_n$ . Al conjunto de variables aleatorias y sus distribuciones de probabilidad asociadas se las conoce como un proceso estocástico.

Por lo tanto una serie de tiempo debe considerarse como una realización de un proceso estocástico, o sea como un conjunto al azar doblemente infinito, de funciones, conjunto denominado "ensamble", que es doblemente infinito ya que hay un número infinito de valores que  $X(t)$  puede tomar en tiempo  $t$  y hay un número infinito de tiempos  $t$ .

Se dijo anteriormente que el proceso estocástico puede describirse por las funciones de probabilidad asociadas pero en la práctica esto resulta inadecuado. Entonces para facilitar el análisis de las series de tiempo lo que se hace es considerar al proceso estocástico como un proceso estocástico estacionario, ya que de esta forma podrá describirse adecuadamente por algunos parámetros de  $S$  distribuciones de probabilidad tales como la media, la varianza, la función autocovarianza y el espectro de potencia.

El suponer estacionaridad implica que las propiedades estadísticas de la serie permanecen invariables con el tiempo, es decir que no presenta tendencias que está en equilibrio estadís-

tico, por lo tanto el proceso estocástico podrá ser descrito por un modelo que contiene parámetros que pueden ser estructurados de los datos.

### 2.3.1.2. Descripción de una serie de tiempo en el dominio del tiempo

Consideremos una serie de condiciones  $X_t$  ( $t=1,2,..N$ ) del algún parámetro físico si cada medición fue obtenida de un experimento y los  $N$  experimentos fueron físicamente independientes, podemos decir entonces que los valores de  $X_t$  son independientes entre sí ( $X_2$  no depende del valor que haya tenido  $X_1$  y no influiría en el  $X_3,..$ ). Si existe esta independencia y la distribución de probabilidades asociada  $f_X(x)$  en cuarta medición es Gaussiana, entonces esta puede describirse por ser  $\mu$ , más conocida como valor esperado  $E[X]$  de la variable aleatoria  $X$ , dada por

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \quad (2.20)$$

y por su varianza

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f_X(x) dx \quad (2.21)$$

la media mide la localización o centro de gravedad de la distribución de probabilidad y la varianza su variabilidad o dispersión alrededor de la media.

En una serie de tiempo  $X_t$ , los valores vecinos en la serie no están influenciados el uno por el otro, pero si se presenta una correlación entre ellos. Entonces en el caso de una serie estacionaria con distribuciones de probabilidad Normales asociadas, además de la media  $\mu$  y la varianza  $\sigma^2$ , es necesario determinar la función de autocovarianza, que viene dada por:

$$\begin{aligned} \gamma_{XX}(t_1, t_2) &= E[(X(t_1) - \mu)(X(t_2) - \mu)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \mu)(x_2 - \mu) f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde  $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$  es la distribución conjunta de probabilidades. La función de autocovarianza es una medida de la interdependencia entre los valores de la serie.

Considerando que la serie es estacionaria y que por lo tanto su función de probabilidades sería la misma o en cualquier tramo de la serie la función autocovarianza solo dependerá de la diferencia de tiempo  $u = t_2 - t_1$  y no del tiempo. (De aquí en adelante me referiré  $u$  como desplazamiento).

$$\gamma_{XX}(u) = E[(X(t+u) - \mu)(X(t) - \mu)] \quad (2.23)$$

la función de autocovarianza muestra como varía la dependencia entre dos valores adyacentes del proceso estocástico con el desplazamiento  $u$ .

Cuando  $u=0$ , la función de autocovarianza muestra la dependencia de cada valor en la serie con sí mismo y el resultado es la varianza  $\sigma_{\bar{X}}^2$  de la serie que corresponde el valor máximo de

$$\gamma_{XX}(u)$$

Los tres parámetros anteriormente descritos media, varianza y función de autocovarianza describen completamente el proceso estocástico.

Pero las ecuaciones presentadas son las definiciones teóricas de estos parámetros; en la práctica se cuenta frecuentemente con una sola muestra del proceso y es necesario estimar estos parámetros a partir de esa última realización.

La media puede ser estimada por el "estimador"

$$\bar{X} = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt \quad (2.24)$$

si la serie es continua, o por

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (2.25)$$

en forma discreta. Donde  $X$  es una variable aleatoria, en su propia distribución de probabilidades, pudiéndose probar que

$$E[\bar{X}] = \mu$$

Así tenemos que un estimador es una variable aleatoria cuyo valor esperado es el parámetro requerido; y una realización de la variable aleatoria dada por (2.24) y (2.25) se conoce como estima. En el caso actual, la estima de la media será

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_t \quad (2.26)$$

respectivamente; pudiéndose demostrar que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt = \mu$$

Un estimador de la varianza  $\sigma^2$  es

$$s^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - \bar{x})^2 dt$$

o en forma discreta

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (2.27)$$

( $\frac{1}{n-1}$  y no  $\frac{1}{n}$  porque se ha comprobado que este es el mejor estimador), y se puede demostrar que el valor esperado de la variable aleatoria  $s^2$  es

$$E[s^2] = \sigma^2$$

De la misma manera tenemos el estimador en la función autocovarianza

$$C_{xx}(u) = \begin{cases} 0 & , |u| > t \\ \frac{1}{T} \int_0^{T-|u|} (x(t) - \bar{x})(x(t+u) - \bar{x}) dt & \end{cases} \quad (2.28)$$

el límite  $T-|u|$  se debe a que  $X(t)=0$  para  $t < 0$  y  $t > T$

El valor esperado en  $C_{xx}(u)$  es

$$E[C_{xx}(u)] = \begin{cases} \gamma_{xx}(u)(1-|u|), & |u| \leq T \\ 0 & |u| > T \end{cases} \quad (2.29)$$

Otro estimador de la función autocovarianza viene dada por

$$C'_{xx}(u) = \begin{cases} \frac{1}{T-|u|} \int_0^{T-|u|} (x(t) - \bar{x})(x(t+|u|) - \bar{x}) dt, & 0 \leq |u| \leq T \\ 0 & |u| > T \end{cases}$$

Estos estimadores se utilizan principalmente en estadística más por su atracción intuitiva que porque son los mejores en todo el sentido de la palabra. Idealmente lo que debe hacerse para escoger un estimador en la autocovarianza es describir la función probabilidad de la serie observada. Estos estimadores deben ser comparados con algún entero como el del error mínimo cuadrado medio (no es tema de esta tesis).

La versión discreta de la función autocovarianza viene dada por

$$C_{xx}(k) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} (x_k - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x})$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.30)$$

Como ya se dijo la función de autocovarianza muestra la variación del grado de dependencia entre los valores contiguos de una serie en el desplazamiento  $u$  ( para el caso discreto). Sin embargo un gráfico de  $C_{xx}(u)$  vs  $u$  es difícil de interpretar y más conveniente en el análisis es utilizar la función de autocorrelación, que no es otra cosa que la función autocovarianza normalizada; se define como

$$\gamma(u) = \frac{C(u)}{C(0)} \quad (2.31)$$

La función de autocorrelación es útil porque permite visualizar la manera en la cual la dependencia de la serie se amortigua con el desplazamiento  $u$  entre los puntos de la serie.

### 2.3.1.3. El espectro de Densidad de Potencia

En la sección anterior se estableció que la función de autocovarianza describe un proceso estocástico pero es mucho más útil una descripción del proceso en el dominio de las frecuencias y más fácil de interpretar.

El espectro de densidad de potencia de una señal periódica se define como

$$T(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} T |x_m|^2$$



donde  $X_m$  es la amplitud compleja del  $n$ -ésimo armónico y no es otra cosa que la transformada de Fourier de la serie muestreada, de tal forma que:

$$T |X_m|^2 = C_{xx}(f) = T \left| \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \right|^2$$

o en forma discreta

$$C_{xx}(f) = N \Delta \left| \frac{1}{N} \sum_{t=-n}^{n-1} x(t) e^{-i2\pi ft} \right|^2$$

$$-\frac{1}{2\Delta} \leq f \leq \frac{1}{2\Delta}$$



(2.32)

donde  $\Delta$  es el espaciamiento en tiempo y  $\frac{1}{2\Delta}$  es la frecuencia Nyquist.

$C_{xx}(f)$  es conocido como el espectro muestra y el gráfico de  $C_{xx}(f)$  vs  $t$  se conoce como periodograma.

En el caso de funciones determinísticas, el límite converge, esto es, a medida que  $T$  crece  $C_{xx}(f)$  es más parecida a  $\Gamma(f)$ .

Cuando la condición de existencia de la transformada de Fourier

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt \leq m \quad m = \text{constante finita}$$

no se cumple, como sucede en el caso de señales aleatorias, el límite no converge a  $\Gamma(f)$  cuando  $T$  crece. Esto hace necesaria una función más apropiada del espectro de densidad de potencia.

Estableceremos primero la relación que existe entre el espectro muestra y la función de autocovarianza.

Puede demostrarse que (Jenkins, 1968)

$$C_{xx}(f) = \int_{-T}^T c_{xx}(u) e^{-2\pi i f u} du, \quad -\infty \leq f \leq \infty \quad (2.33)$$

y que

$$c_{xx}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{xx}(f) e^{-2\pi i f u} df, \quad -T \leq u \leq T \quad (2.34)$$

donde  $c_{xx}(u)$  es la función de autocovarianza, de tal forma que

$$c_{xx}(0) = S^2 = \int_{-\infty}^{\infty} C_{xx}(f) df$$

lo cual demuestra que el espectro muestra es una distribución continua de la varianza o potencia promedio de  $X(t)$  sobre la frecuencia.

En el caso de series discretas, las integrales se transforman en sumatorias y:

$$C_{xx}(f) = \Delta \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} c_{xx}(k) e^{-2\pi i f k \Delta} \quad \frac{1}{2\Delta} \leq f \leq \frac{1}{2\Delta} \quad (2.35)$$

y su transformada inversa:

$$c_{xx}(u) = \int_{-1/2\Delta}^{1/2\Delta} C_{xx}(f) e^{2\pi i f u} df \quad -N\Delta \leq u \leq N\Delta \quad (2.36)$$

Cuando se trata de funciones aleatorias es necesario tomar a  $C_{xx}(t)$  como una realización de la variable aleatoria  $C_{xx}(f)$ ; entonces el estimador del espectro será:

$$C_{xx}(f) = \int_{-T}^T C_{xx}(u) e^{-2\pi i f u} du$$

El valor esperado del estimador es:

$$E[C_{xx}(f)] = \int_{-T}^T E[C_{xx}(u) e^{2\pi i f u}] du$$

usando la ecuación (2.29)

$$E[C_{xx}(f)] = \int_{-T}^T \gamma_{xx}(u) (1 - |u|/T) e^{-2\pi i f u} du \quad (2.37)$$

en el límite

$$\lim E[C_{xx}(f)] = \Gamma_{xx}(f) = \int_{-T}^T \gamma_{xx}(u) e^{-2\pi i f u} du$$

La función  $\Gamma_{xx}(f)$  es el espectro de Densidad de Potencia para funciones aleatorias y se relaciona con la función de autocovarianza en la  $TF$ , ya que el espectro de densidad de potencia no es otra cosa que la transformada de Fourier de la función de autocovarianza, manteniéndose la relación inversa, es decir que:

$$\gamma_{xx}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{xx}(f) e^{-2\pi i f u} df \quad (2.38)$$

Si  $u = 0$

$$\gamma_{xx}(0) = \sigma_{xx}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{xx}(f) df \quad (2.39)$$

Según esto  $\Gamma_{xx}$  muestra la distribución de la varianza o potencia promedio del proceso  $X(t)$ .

Para tiempos discretos, las ecuaciones correspondientes son las siguientes:

$$E[C_{xx}(f)] = \Delta \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \gamma_{xx}(k) (1 - |k|/N) e^{-2\pi i f k \Delta} \quad -1/2\Delta \leq f \leq +1/2\Delta \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{xx}(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} E[C_{xx}(f)] \\ &= \Delta \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \gamma_{xx}(k) e^{-2\pi i f k \Delta} \quad -1/2\Delta \leq f \leq 1/2\Delta \quad (2.41) \end{aligned}$$

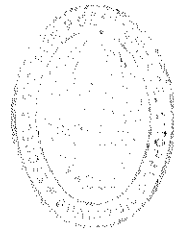
$$\gamma_{xx}(k) = \int_{-1/2\Delta}^{1/2\Delta} \Gamma_{xx}(f) e^{2\pi i f k \Delta} df$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

(2.42)

Observando la ecuación (2.37) se notará que el valor esperado del estimador del espectro es la transformada de producto de  $\gamma_{xx}(u)$  por la "ventana de retrasos"

$$w(u) = \begin{cases} 1 - |u|/T, & |u| \leq T \\ 0, & |u| > T \end{cases} \quad (2.43)$$



esto es

$$E[C_{xx}(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} w(u) \gamma_{xx}(u) e^{-2\pi i f u} du \quad (2.44)$$

usando las propiedades de correlación y su transformada

$$E[C_{xx}(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} W(f) \Gamma_{xx}(f-g) dg \quad (2.45)$$

(la transformada de una correlación es igual a la correlación de las transformadas), en donde  $W(f)$  es la transformada de  $w(u)$

$$W(f) = T \left( \frac{\text{sen } \pi T f}{\pi T f} \right)^2$$

La ecuación (2.45) demuestra que el estimador del espectro muestra tener un valor esperado y corresponde al espectro teórico  $\Gamma_{xx}(f)$  correlacionado con la ventana espectral  $W(f)$  mostrada en la figura N°18.

Cuando  $T$  es muy grande,  $W(f)$  se comporta como una función delta y

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E[C_{xx}(f)] = \Gamma_{xx}(f)$$

A pesar de esto, para registros de longitud finita, el espectro teórico está distorsionado. La distorsión puede medirse por:

$$D(f) = E[C_{xx}(f)] - \Gamma_{xx}(f) \quad (2.46)$$

Para que  $D(t)$  sea mínima habría que hacer  $T$  muy grande, pero por otro lado el estimador del espectro muestra no es estadísticamente consistente; es decir, que su dispersión alrededor del valor teórico no disminuye cuando  $T$  crece; y al hablar de dispersión nos estamos refiriendo a la varianza. Entonces el problema está en establecer un arreglo entre ambos. Este arreglo se encuentra en función del cambio de las ventanas de retraso y espectral usadas; el arreglo en sí dependerá del grado de suavizamiento que se requerirá para el espectro.

A continuación serán tratados algunos métodos de suavizamiento. Bartlett, M.S. (1953) propuso un método para disminuir la varianza del estimador, que consiste en dividir la serie inicial en  $K$  subseries, de longitud  $T/K$ , luego evaluar el espectro muestra para cada subserie y el promedio de estas se conoce como estimado espectral suavizado.

De esta forma la varianza del estimado espectral puede reducirse a cualquier tamaño, se requerirá de  $\sigma^4$  a  $k\sigma^4/T$

El estimador promedio de los  $k$  espectros muestra es:

$$\bar{C}_{xx}(t) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k C_{xx}(u) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left[ \frac{1}{M} \int_{(i-1)M}^{iM-u} x(t)x(t+u) du \right] \quad (2.47)$$

en donde este es una versión suavizada de  $C_{xx}(t)$ .

Para demostrar lo anteriormente dicho, consideremos el valor esperado de  $\bar{C}_{xx}(f)$

Para cada subserie de longitud  $T$ , el periodograma es

$$C_{xx}(f) = \int_{-M}^M c_{xx}(u) e^{-2\pi i f u} du$$

y el estimador suavizado será

$$\begin{aligned} \bar{C}_{xx}(f) &= \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \int_{-M}^M c_{xx}(u) e^{-2\pi i f u} du \\ &= \int_{-M}^M \left[ \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K c_{xx}(u) \right] e^{-2\pi i f u} du \end{aligned}$$

ahora, sea

$$c_{xx}(u) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K c_{xx}(u) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \left[ \frac{1}{M} \int_{(i-1)M}^{iM-u} X(t) X(t+u) du \right]$$

entonces

$$C_{xx}(f) = \int_{-M}^M c_{xx}(u) e^{-2\pi i f u} du$$

el valor esperado de  $c_{xx}(u)$  es

$$E[\bar{c}_{xx}(u)] = \gamma_{xx}(u) (1 - |u|/M)$$

y por lo tanto

$$E[C_{xx}(f)] = \int_{-M}^M (1 - |u|/M) \gamma_{xx}(u) e^{-2\pi i f u} du$$

o aplicando la propiedad de la convolución

$$E[C_{xx}(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{xx}(f-g) M \left( \frac{\text{sen } \pi g M}{\pi g M} \right)^2 dg \quad (2.48)$$

La ecuación (2.48) demuestra que la subdivisión de la serie de longitud  $T$ , en  $K$  subseries de longitud  $M = \frac{T}{K}$  y el cálculo del estimador suavizado, equivale a suavizar el espectro muestra con la ventana espectral.

$$W(f) = M \left( \frac{\text{sen } \pi f M}{\pi f M} \right)^2 \quad (2.49)$$

En el dominio del tiempo equivale a multiplicar la función de autocovarianza por la ventana de retrasos

$$w(u) = \begin{cases} 1 - |u|/M & , |u| \leq M \\ 0 & , |u| > M \end{cases}$$

La ventana espectral es similar a la mostrada en la figura N°19, solo que  $M < T$ .

Esto sugiere que al aumentar el ancho de la ventana espectral de  $2/T$  a  $2/M$ , la  $\sigma$  del estimador disminuye, obteniéndose una versión más suave del espectro.

El procedimiento de Bartlett sugiere, en general que para obtener menor varianza en el espectro es conveniente usar estimadores suavizados de la forma



$$\begin{aligned}\bar{C}_{xx}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} w(u) C_{xx}(u) e^{-2\pi i f u} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{C}_{xx}(u) e^{-2\pi i f u} du\end{aligned}$$

aplicando la propiedad de la convolución

$$\bar{C}_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} W(g) C_{xx}(f-g) dg \quad (2.50)$$

donde

$$\begin{aligned}W(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} w(u) e^{-2\pi i f u} du \\ w(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} W(f) e^{2\pi i f u} df\end{aligned}$$

En las tablas N<sup>o</sup> II y III, siguientes se muestran las ventanas de mayor uso y sus propiedades y las figuras 19 y 20 muestran sus respectivos gráficos. El valor esperado del estimador será:

$$E[\bar{C}_{xx}(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} W(g) C_{xx}(f-g) dg \quad (2.51)$$

y para T grande, entonces:

$$E[C_{xx}(f)] = \bar{\Gamma}_{xx}(f-g)$$

Así que:

$$E[\bar{C}_{xx}(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} W(g) \bar{\Gamma}_{xx}(f-g) dg = \bar{\Gamma}_{xx}(f) \quad (2.52)$$

la función  $\bar{\Gamma}_{xx}(f)$  es el espectro suavizado.

En la figura N<sup>o</sup> 19 observamos que la ventana espectral correspondiente a la ventana de retrasos rectangular, tienen lóbulos

TABLA N° II

PROPIEDADES DE LAS VENTANAS ESPECTRALES

Descripción	Ventana Espectral	Grados de Libertad
rectangular	$2 M \frac{\text{sen } 2\pi f M}{2\pi f M}$	$\frac{I}{M}$
Bartlett	$M \frac{\text{sen}^2 \pi f M}{\pi f M}$	$3 \frac{I}{M}$
Tukey	$M \frac{\text{sen } 2\pi f M}{2\pi f M} \times \frac{1}{1 - (2fM)}$	$2.67 \frac{I}{M}$
Parzen	$\frac{3 M}{4} \frac{\text{sen}(\pi f M / 2)}{\pi f M / 2}$	$3.71 \frac{I}{M}$



BIBLIOTECA

TABLA Nº III

VENTANAS ESPECTRALES Y DE RETRASO

Descripción	Ventana de Retraso	Ventana Espectral
rectangular	$w_a(u) = \begin{cases} 1, &  u  \leq M \\ 0, &  u  > M \end{cases}$	$W_R(f) = 2M \left( \frac{\text{sen } 2\pi f M}{2\pi f M} \right)$
Bartlett	$w_B(u) = \begin{cases} 1 - \frac{ u }{M}, &  u  \leq M \\ 0, &  u  > M \end{cases}$	$W_B(f) = M \left( \frac{\text{sen } \pi f M}{\pi f M} \right)^2$
Tukey	$w_T(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{\pi u}{M} \right), &  u  \leq \frac{M}{2} \\ 0, &  u  > M \end{cases}$	$W_T(f) = M \left( \frac{\text{sen } 2\pi f M}{2\pi f M} \right) \left( \frac{1}{1 - (2fM)^2} \right)$
Parzen	$w_P(u) = \begin{cases} 1 - 6 \left( \frac{u}{M} \right)^2 + 6 \left( \frac{ u }{M} \right)^3, &  u  \leq \frac{M}{2} \\ \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{ u }{M} \right)^3, & \frac{M}{2} <  u  \leq M \\ 0, &  u  > M \end{cases}$	$W_P(f) = \frac{3}{4} M \left( \frac{\text{sen } (\pi f M / 2)}{\pi f M / 2} \right)$

$$-\infty \leq f \leq \infty$$

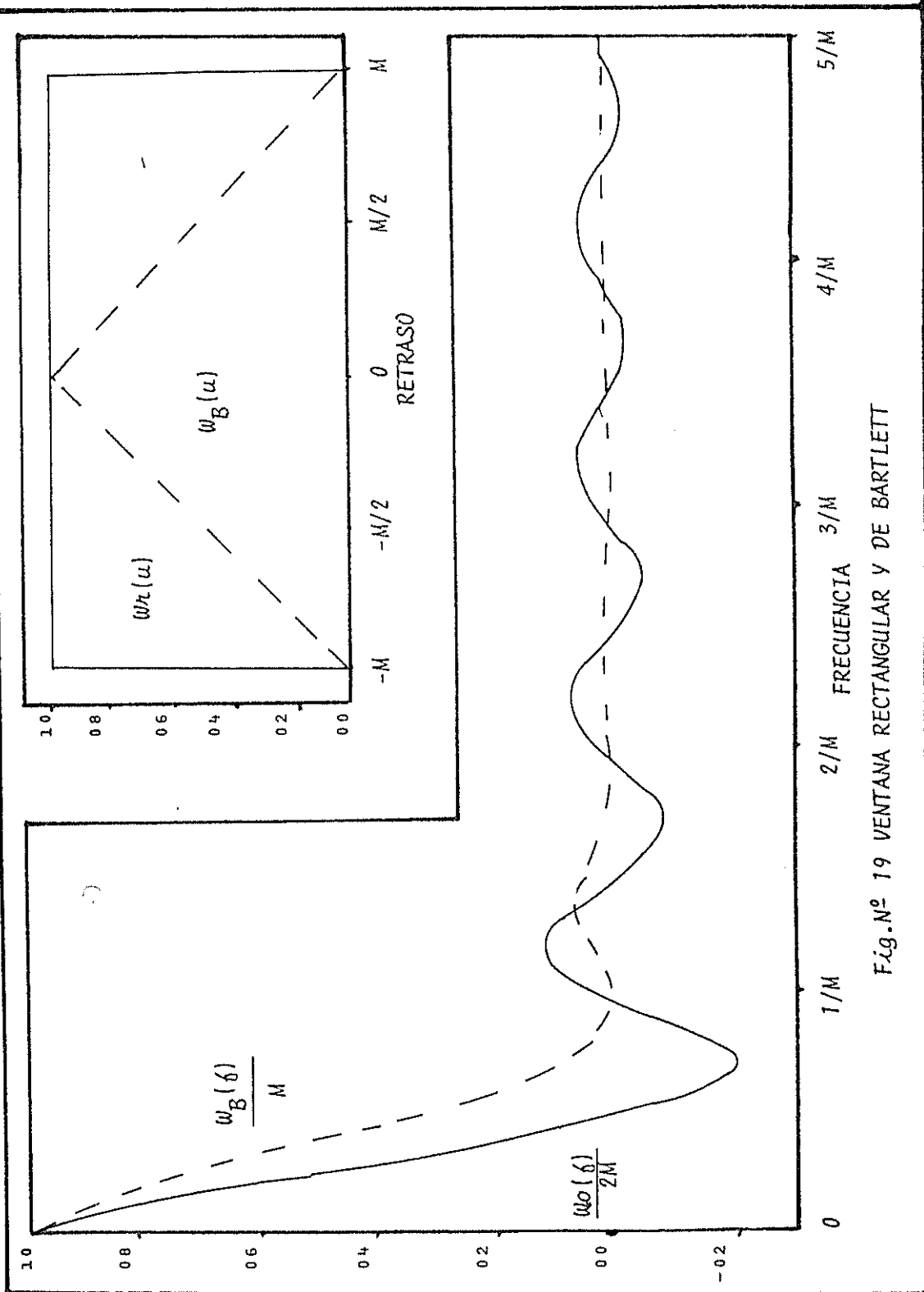


Fig. N° 19 VENTANA RECTANGULAR Y DE BARTLETT



BIBLIOTECA

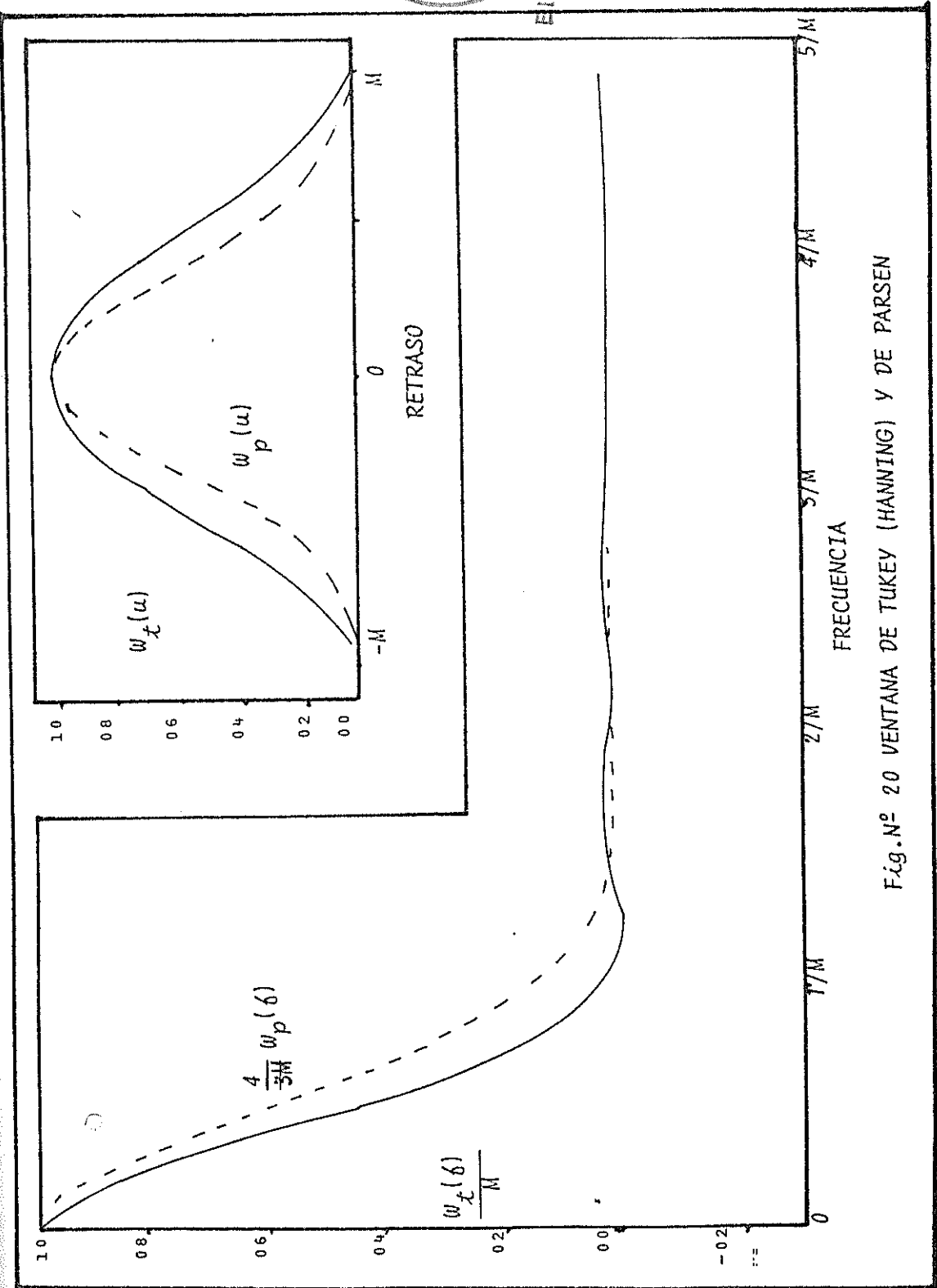


Fig. N.º 20 VENTANA DE TUKEY (HANNING) Y DE PARSÉN

laterales muy pronunciadas. Si  $M$  se hiciera muy grande,  $w_n(y)$  se comportaría como una función delta y la distorsión

$$D(f) = \overline{f_{xx}}(f) - \overline{f_{xx}}(f)$$

sería mínima.

Sin embargo la presencia de los lóbulos laterales da lugar a otro tipo de distorsión en el espectro. Debido a la relación de convolución (2.52), si  $w_n(y)$  tiene lóbulos laterales más pronunciados al valor de  $\overline{f_{xx}}(g)$ , no solo contribuirán frecuencias cercana en  $g$ , sino que se vería afectado por contribuciones relativamente fuertes ( *dependiendo* de la altura del lóbulo lateral) correspondientes a frecuencias dejadas de  $g$ . Este fenómeno es conocido como fuga de frecuencias, entonces se induce que lo mejor es utilizar ventanas laterales con lóbulos laterales prácticamente nulos para evitarla.

Las ventanas  $w_B$ ,  $w_T$  y  $w_p$  mostradas en las figuras N° 19 y 20 tienen un mejor comportamiento respecto a sus lóbulos laterales, sin embargo  $w_B$  tiene lóbulos laterales mayores que  $w_T$  y  $w_p$ , y si el espectro tuviere un pie angosto, esto puede causar problemas de fuga de frecuencias. Bajo este criterio mejor comportamiento presenta  $w_p$ .

Por otro lado  $w_p$  es más ancha que las demás así que causará

más distorsión. Para evitar tal distorsión hay que hacer  $M$  más grande y esto redundará en la inestabilidad (alta varian-za) del espectro.

La distorsión para la ventana de Bartlett es del orden de  $1/M$  y para las de Tukey y Parzen, de  $1/M^2$ , y hay que tener en cuenta que a medida que  $M$  aumenta  $D(f)$  se reduce, aunque la varianza aumente.

No existe entonces una ventana que sea mejor que la otra, a pesar de esto la selección de la ventana a usarse no es tan ancha como la de escoger un ancho de banda, o sea un adecuado punto de truncación  $M$ .

Para obtener un buen estimado de un pico del espectro el ancho de una ventana espectral debe ser del mismo orden del pico.

El ancho de banda de una ventana espectral se considera como del filtro de banda de la ventana espectral. Se dice que para una ventana no rectangular, el ancho de banda es el mismo que para aquella ventana rectangular que tiene la misma varian-za.

Entonces:

Varianza x ancho de banda = constante

y si el ancho de banda es pequeño se emplea las siguientes rela-ciones:

- a) Varianza grande
- b) Pocos grados de libertad (mejor intervalo de confianza)
- c) Pequeña distorsión  $D(+)$
- d) Punto de truncación  $M$  pequeño

Si el ancho de banda se escoge variando el punto de truncación  $M$ , en él dependerán la alta fidelidad (poca distorsión) y la alta estabilidad (para varianza) del espectro.

La mejor manera de escoger  $M$  es darle un valor inicial e irlo haciendo cada vez más grande, lo cual equivale a ir reduciendo el ancho de banda de la ventana espectral y con él la distorsión, obteniendo más detalle y fidelidad. El problema es cuando dejar de reducir el ancho de banda con el fin de mantener estabilidad del espectro.

En algunos casos en el espectro empiezan a aparecer picos falsos cuando  $M$  llega a un cierto valor y no se conoce a groso modo la forma del espectro se puede llegar a interpretaciones erróneas. "Entonces debe procederse con cautela al interpretar un espectro, y no debe perderse de vista el sentido físico que debe tener, sin el cual el análisis carece de valor"

### 3.2. Aplicación del Análisis Espectral al Oleaje

El análisis estadístico convencional de los datos que se obtienen al medir en un punto la variación de la altura del oleaje,



con el tiempo representa un arma útil para obtener de ella cierta información. El análisis espectral es aplicado para incrementar el entendimiento de una serie de datos. Las propiedades de los datos que son evidentes después de una lectura cuidadosa de la serie original de tiempo, también se manifiestan en su representación espectral, y aquellas, formas y comportamientos que no se harían presentes en las mismas aparecen con el espectro.

La transformada de Fourier juega un papel importante en el análisis de datos de la serie de tiempo, ya que nos permite llevar la serie original del dominio del tiempo al de las frecuencias, donde la determinación de la altura y períodos significativos adquieren sentido.

La cantidad de datos que pueden ser colectados en un lapso de 15 minutos y la cantidad de registros de este tipo que son necesarios para llegar a una estimación confiable de los parámetros de las olas, hacen indispensables el uso de técnicas digitales, que hagan posible el procesamiento de datos de manera precisa y rápida y que permitan mayor flexibilidad en la selección de los parámetros.

A través del cálculo del estimado espectral nosotros podremos obtener:

- El período significativo, definido como aquel correspondiente a la máxima unidad de energía por unidad de frecuencia; con una simple transformación de variables, obtenemos el período significativo. La frecuencia correspondiente a dicho período se conoce como moda.
- El período medio  $T_0$  y el período de las crestas, que son funciones de los momentos espectrales de orden cero, 2 y 4 órdenes y que en el caso del espectro de amplitudes vienen definidos por:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{m_0 / m_2}$$

$$T_c = 2\pi \sqrt{m_2 / m_4}$$

- La altura media  $H_m$  y la altura significativa  $H^{1/3}$  como funciones lineales de la raíz cuadrada del momento de orden cero, es decir que son funciones de la concentración de energía del espectro, de tal forma que

$$H_m = k_1 \sqrt{m_0}$$

$$H^{1/3} = k_2 \sqrt{m_0}$$

En donde los valores de  $k_1$  y  $k_2$  pueden ser estimados para cada localidad con un simple análisis de regresión.



## CAPITULO 3

### PROCESAMIENTO

#### 1. Documentación del Programa de Computadora

Para aplicar el análisis espectral al análisis de un registro analógico de olas, se implementó un programa de Fortran que lleva a cabo el procesamiento, obteniéndose como resultado el espectro de potencia de la serie registrada, y los momentos espectrales. Este programa fue creado para un computador IBM 4341 y su capacidad de almacenamiento de datos depende de los requerimientos del usuario. El programa se llama CEP.

El procesamiento en sí se lleva a cabo de la siguiente manera:

Los datos de entrada después de ser leídos son multiplicados por el factor escala que depende del sensor que fue utilizado, luego estos son referidos a una línea media.

Después de tener los datos referidos a una línea media, se les aplica la función autocovarianza. Se modifica la misma utilizando una ventana de retrasos. A la autocovarianza modificada se le aplica, la transformada rápida de Fourier, obteniéndose el espectro de potencia de la serie de entrada.

Este método se conoce como método indirecto.

### 1.1. Descripción del Programa

El programa consta de 6 bloques.

- Un programa principal que tiene como funciones leer y almacenar los datos de entrada, llamar a las subrutinas, cuando son necesarias, calcular los resultados e imprimirlos.
- Una subrutina que efectúa el algoritmo de Cooley-Tukey para el cálculo de la transformada rápida de Fourier (SUBROUTINE FFT)
- Una subfunción que efectúa el procedimiento de reversión de bits utilizadas en la subrutina anterior (FUNCTION BITR)
- Una subrutina que calcula la función autocovarianza en tiempo (SUBROUTINE AVQV)
- Una subrutina que calcula el valor medio y la varianza y la desviación estándar de la serie de entrada (SUBROUTINE ESTADI)
- Una subrutina que calcula la ventana de retrasos (SUBROUTINE PESO)

### 1.2. Entrada de Datos

La primera línea del archivo de datos debe contener en la primera línea en el siguiente orden las variables de entrada:

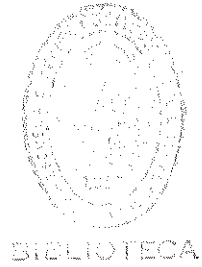
Nombre	Formato
NPF	I10
KTIPV	I10
MWT	I10

En la segunda línea:

Nombre	Formato
M	I2
NE	I2

En la tercera línea:

Nombre	Formato
N1	I4



En la cuarta línea:

Nombre	Formato
A\$	A72

A partir de la quinta línea en adelante:

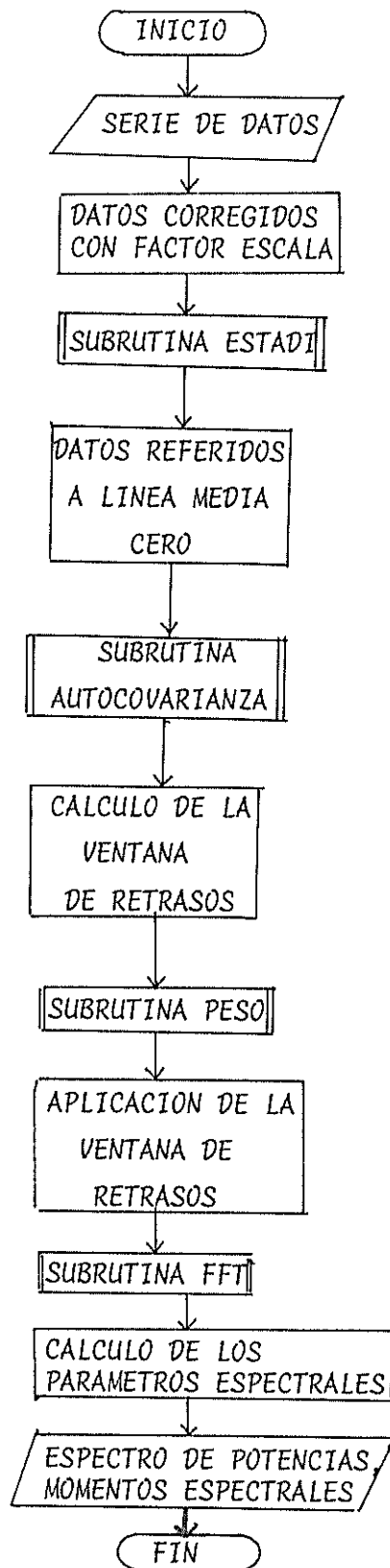
Nombre	Formato
X <sup>1</sup> (I)	18F4.1

1.3. Descripción de las Variables

Nombre	Descripción
NPF	Número de puntos de frecuencia
KTIPV	Tipo de Ventana de Retrasos
	0 Rectangular
	1 Bartlett
	2 Tukey
	3 Hamming
	4 Parzen

MWT	Potencia de 2 a la que es igual el semi-ancho de la ventana de retrasos. $LCUT = 2^{MCUT}$
M	Potencia de 2 próxima al número de datos de la serie a analizar (mayor o menor, dependiendo de si se aumentan ceros, o se trunca la serie)
NE	Variable que condiciona el intervalo de muestreo, a NE veces el original
N1	Número original de datos de la serie.
A\$	Variable que identifica la serie de datos a analizar
X1(1)	Arreglo en el que se almacenan los datos originales de la serie.
DELTAT	Intervalo de tiempo entre los datos a analizar.
FNY	Frecuencia Nyquist.
x(1)	Arreglo donde se guardan los datos de la serie con el factor escala aplicado.
DS	Desviación estándar de la serie de datos.

VAR	Varianza de la serie de datos.
XM	Valor medio de la serie de datos.
LR	Punto de truncación de la función autocovarianza (debe ser una potencia de 2)
LCUT	Semiancho de la ventana de retrasos.
XAUX	Arreglo donde se almacena inicialmente la función autocovarianza y luego el espectro de potencia.
ESPF	Espaciamiento de frecuencia
So	Momento espectral de orden cero.
S2	Momento espectral de segundo orden.
S4	Momento espectral de cuarto orden.
Ts	Período del $i$ -ésimo estimado espectral.
F	Frecuencia del $i$ -ésimo estimado espectral.
ALESP	Se almacena el logaritmo del espectro.
To	Período medio.
Tc	Período de las crestas.





PROGRAMA DE LA TESTS PREVIA A LA OBTENCION DEL TITULO DE  
DE LICENCIADA EN OCEANOGRAFIA FISICA DE  
MARIA DEL PILAR GONZALEZ RODRIGUEZ

EL PROGRAMA SE LLAMA CEP Y APlica el METODO DIRECTO DE ANALISIS  
ESPECTRAL A UNA SERIE DE TIEMPO BADA, OBTIENIENDOSE EL ESPECTRO  
DE POTENCIA Y LOS MOMENTOS ESPECTRALES.

```
-----CEPO  
DIMENSION X(2200),Y(2200),X1(2200),X2(2200),XAX(4100),ALLSP(1000)CEPO  
DIMENSION P(1024)CEPO  
CHARACTER*72 A$CEPO  
READ(1,15)NPF,K1IPV,MOUTCEPO  
FORMAT(3I10)CEPO  
WRITE(2,1000)NPF,K1IPV,MOUTCEPO  
FORMAT(///IX,'NUMERO DE PUNTOS DE FRECUENCIA',15//IX,'TIPO DE VENCPO  
*TANAA',12,10X,'MOUT',14,2X),CEPO  
READ(1,1)M,NECEPO  
FORMAT(2I2)CEPO  
READ(1,8)N1CEPO  
FORMAT(14)CEPO  
N=2**MCEPO  
DELTA1=900./FLUAT(N)*FLUAT(NE)CEPO  
FNY=1./(2.*DELTA1)CEPO  
WRITE(2,3456)FNY,DELTA1CEPO  
FORMAT(1X,'FNY=',17.4,2X,'DELTA1=',F7.4//)CEPO  
READ(1,10000)A$CEPO  
FORMAT(A72)CEPO  
WRITE(2,10002)A$CEPO  
FORMAT(A72,///)CEPO  
READ(1,2)(X1(I),I=1,N1)CEPO  
FORMAT(18F+.1)CEPO  
K=NCEPO  
DO 4 I=1,NCEPO  
I=X1(K)CEPO  
X2(I)=1CEPO  
K=K-1CEPO  
CONTINUECEPO  
J1=1CEPO  
N4=N/NECEPO  
DO 9800 IJ=1,N4CEPO  
X1(IJ)=X2(IJ)*80.28/1000.CEPO  
J1=J1+NECEPO  
N=N4CEPO  
J1=1CEPO  
I1=2CEPO  
IF(I1.51.N)GOTO 7345CEPO  
J1=J1+1CEPO  
I1=I1*2CEPO  
GOTO 2346CEPO  
N=I1/2CEPO  
M=J1-1CEPO  
WRITE(2,2347)N,MCEPO  
FORMAT(1X,'N=',14,2X,'M=',12//)
```



```

DC 3333 I=1,N
X(1)=X(1)-XM
LR=2**MCUT
NN=2*LR
CALL ACUV(X,N,XAUX,NN,LR)
WRITE(2,700)
FORMAT(20X,'FUNCION AUTOCOVARIANZA'//X,'EAS',10X,'AUTOCOV. MODIF'//
+X,'(L*DT-SFG)')//)
CALCULO DE LA VENTANA DE RETRASOS KTIPV
LCUT=2**MCUT
DC 103 I=1,LCUT
P(1)=1.
CONTINUE
CALL PESU(P,LCUT,KTIPV)
APLICACION DE LA VENTANA DE RETRASOS
LL=2*LCUT
DC 105 I=2,LCUT
XAUX(1)=XAUX(1)*P(1)
XAUX(LL-1+2)=XAUX(1)
CONTINUE
XAUX(LCUT+1)=0.0
DC 762 I=1,LR
WRITE(2,761)I,XAUX(1)
FORMAT(9X,14,4X,L10.4)
M=MCUT+1
DC 3 I=1,LL
Y(1)=0.0
CALL FFT(XAUX,Y,LL,M,1)
DC 3131 I=1,LL
XAUX(1)=XAUX(1)*2./FLGAT(LL)
IMPRESION DEL ESPECTRO DE POTENCIA SUAVIZADO(LL VALORES)
WRITE(2,2012)
WRITE(2,2013)
ESPF=FN/FLGAT(LR)
SUM=0.
S0=0.
S1=0.
S2=0.
S3=0.
S4=0.
DC 107 I=1,LR
F=(1-I)*ESPF
S0=S0+XAUX(I)
S1=S1+XAUX(I)*F
S2=S2+XAUX(I)*F**2
S3=S3+XAUX(I)*F**3
S4=S4+XAUX(I)*F**4
LA=SQRT(ABS(XAUX(I)))
SUM=SUM+EA
IF(F.EQ.0.)GOTO 9999
IS=1./F
GOTO 8090
IS=0.0
IF(XAUX(I).GT.0)GOTO 9715
ALESP(1)=0.
GOTO 9998
ALESP(I)=ALCO(XAUX(I))
WRITE(2,2014)F,ALESP(I),IS,XAUX(I),LA
IF(ABS(F-1.)Y).LE.0.0001)GOTO 9999

```

```
WRITE(2,2022750,51,57,53,59,61,67,63)
FORMAT(1X,'M0=',E11.4,2X,'M1=',E10.4,2X,'M2=',E10.4/1X,'M3=',E10.4/1X,'M4=',E10.4/1X,
12X,'M4=',E10.4/1X,'DELTA1=',E10.4/1X,'DELTA2=',E10.4/1X,'DELTA3=',E10.4/1X)
RAICES CARACTERAS DEL ESPECTRO DE POT. =',E10.4/7)
T0=SQRT(50/52)
T0=SQRT(52/54)
L=SQRT((1-(10/10)^(1/2)))
HM=2.5*SQRT(50)
HB=3.83*SQRT(50)
WRITE(2,2122)T0, T0E, HM, HB
FORMAT(1X,'T0=',E10.2,2X,'T0E=',E10.2/1X,'HM=',E10.2/1X,'HB=',E10.2/1X,
12X,'HB=',E10.2/7)
FORMAT(1H1,20X,1SH'FRECUENCIAS SOBREVIVIDAS')
FORMAT(3X,10H'FRECUENCIAS',3X,10H'ESP. CERO',3X,'E1',30H'DA'ESP. POI.
1,5X,'RAIZ ES.',/3X,1H' CPS', 3X,12H' (COEFICIENTE)',3X,'(ESG)',3X,
1X2-CPS',8X/7)
FORMAT(3X,F7.3,3X,'G. 2',3X,'F. 2',3X,'E10.3',3X,13H'G)
WRITE(2,2352)
FORMAT(1X,'FRECUEC.',3X,'PERCENT.',10,'PERCENT.',/2X,'(CPS)',3X,'(ESG)
1,7X,'0/0',8X/7)
DO 2348 KL=L,LR+1
I=(KL-1)*ESP1
PUR=XAUJ(KL)*100./50
IF(F.EQ.0.)GOTO 2349
IS=1./F
GOTO 2348
IS=0.0
WRITE(2,2351)I,IS,PUR
FORMAT(1X,3F7.3,3X)
STOP
END
```

---

```
SUBROUTINE FFT(XREAL,XIMAG,N,NU,NJ)
SUBROUTINA QUE CALCULA LA TRANSFORMADA RAPIDA DE FOURIER
NJ=1 CALCULA LA TRANSFORMADA DIRECTA
NJ=-1 CALCULA LA TRANSFORMADA INVERSA
DIMENSION XREAL(N),XIMAG(N)
M=N/2
NCL=NCL-1
I=0
DO 100 L=1,N0
DO 101 I=1,N2
P=1BITR(N/2**NCL,NJ)
ARG=6.2831394P/ELCAT(N)
C=(COS(ARG))
S=SIN(ARG)*I/ELCAT(NJ)
K1=K+1
K1N2=K1+N2
XREAL(K1N2)=XREAL(K1N2)*C+XIMAG(K1N2)*S
XIMAG(K1N2)=XIMAG(K1N2)*C-XREAL(K1N2)*S
XREAL(K1N2)=XREAL(K1)-TRCAL
XIMAG(K1N2)=XIMAG(K1)-I*MAG
XREAL(K1)=XREAL(K1)+TRCAL
XIMAG(K1)=XIMAG(K1)+I*MAG
K=K+1
K=K+N2
IF(K.LT.N)GOTO 100
K=0
NCL=NCL-1
```

DO 8000 K=1,N	CEPC18
I=IBITR(K-1,NO)+1	CEPC18
IF(I.LE.K)GOTO 3000	CEPC18
XREAL=XREAL(K)	CEPC18
XIMAG=XIMAG(K)	CEPC18
XREAL(K)=XREAL(I)	CEPC18
XIMAG(K)=XIMAG(I)	CEPC18
XREAL(I)=XREAL	CEPC18
XIMAG(I)=XIMAG	CEPC19
CONTINUE	CEPC19
IF(KJ.EQ.1)RETURN	CEPC19
AN=FLCAL(N)	CEPC19
DO 201 J=1,N	CEPC19
XREAL(J)=XREAL(J)/AN	CEPC19
XIMAG(J)=XIMAG(J)/AN	CEPC19
CONTINUE	CEPC19
RETURN	CEPC19
END	CEPC19
-----	
FUNCTION IBITR(J,N)	CEPC20
J1=J	CEPC20
IBITR=0	CEPC20
DO 200 I=1,NO	CEPC20
J2=J1/2	CEPC20
IBITR=IBITR*2+(J1-2*J2)	CEPC20
J1=J2	CEPC20
RETURN	CEPC20
END	CEPC20
-----	
SUBROUTINE ACCV(X,N,XAUX,NK,LK)	CEPC21
DIMENSION X(N),XAUX(NK)	CEPC21
WRITE(2,5151)(X(I),I=1,N)	CEPC21
FORMAT(1X,10F7.2)	CEPC21
K1=N	CEPC21
DO 1 K=1,LK+1	CEPC21
XAUX(K)=J.J	CEPC21
DO 2 I=1,K1-K+1	CEPC21
XAUX(K)=XAUX(K)+X(I)*X(I+K-1)	CEPC21
CONTINUE	CEPC22
XAUX(K)=XAUX(K)/FLCAL(N-K)	CEPC22
CONTINUE	CEPC22
N=NK+1	CEPC22
RETURN	CEPC22
END	CEPC22
-----	
SUBROUTINE ESTAB(XS,N,DS,FM,VAR)	CEPC22
DIMENSION X(N)	CEPC22
S1=0.	CEPC22
WRITE(2,2323)(X(I),I=1,N)	CEPC23
FORMAT(1X,10F7.2)	CEPC23
S2=0.	CEPC23
DO 9090 I=1,N	CEPC23
S1=S1+X(I)	CEPC23
FM=S1/FLCAL(N)	CEPC23
DO 9092 I=1,N	CEPC23
S2=S2+(X(I)-FM)**2	CEPC23
VAR=S2/FLCAL(N-1)	CEPC23
DS=SURT(VAR)	CEPC23
WRITE(2,9100)DS,FM,VAR	CEPC24

### 3.2. Resultados del Procesamiento

El método utilizado para calcular el espectro de potencia, como ya se dijo anteriormente, es el método indirecto que involucra primero el cálculo de la función autocovarianza, la cual después de ser suavizada, se utiliza para calcular el espectro de potencia a través de la transformada rápida de Fourier, que se calcula con el algoritmo de Cooley-Tukey. La eficiencia de este algoritmo queda probada, ya que el número de operaciones que requiere es de  $2N \log_2 N$  operaciones en lugar de  $N^2$  operaciones requeridas con los otros algoritmos, en donde  $N$  es el número de datos de la serie, ahorrando tiempo de máquina.

Las series de datos fueron igualadas a una potencia de 2 próxima menor, al número original de datos; esto se justifica ya que la mayoría de las series tienen un número de datos casi igual a  $2^{10}$ . La otra opción que sería la de añadir ceros se hubiera justificado en el caso de que el número de datos de la serie estuviera más cerca de la potencia de 2 próxima mayor, condición aplicada al correr la serie total con los 30 registros.

Que el número de datos sea igual a una potencia de 2, es necesario para el uso del algoritmo de la transformada rápida de Fourier.

A continuación se procedió a correr el programa con las diferen-

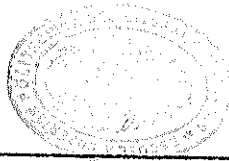
tes ventanas de retrasos aplicadas a la función autocovarianza, de los resultados obtenidos y basándonos en lo expuesto en el capítulo anterior se escogió la ventana de Tukey como la más apropiada para el caso.

El siguiente parámetro en ser escogido fue el intervalo de tiempo a ser utilizado. Es decir si se trabaja con la serie original o si se variaba el intervalo de muestreo. Los intervalos de muestreo utilizados fueron: 0.86 seg., 1.75 seg. Con cada uno de estos intervalos, se aplicó el método de cerramiento de ventana, o sea que se varió el punto de truncación, desde su valor máximo al mínimo, tratando de conciliar estabilidad y fidelidad. Los puntos de truncación utilizados fueron 32, 64, 128; los resultados obtenidos se muestran en las figuras N°21 y 22 donde se ha graficado el logaritmo del espectro de potencia en función de la frecuencia cíclica (1).

Analizando el intervalo de muestreo, y la resolución y estabilidad de los espectros, se determinó que el mejor estimado del espectro real, era aquel correspondiente a la serie con 512 puntos, un contenido de muestreo de 1.75 seg., y con un punto de

---

(1) Estas corridas corresponden a la serie DATOS.



BIBLIOTECA

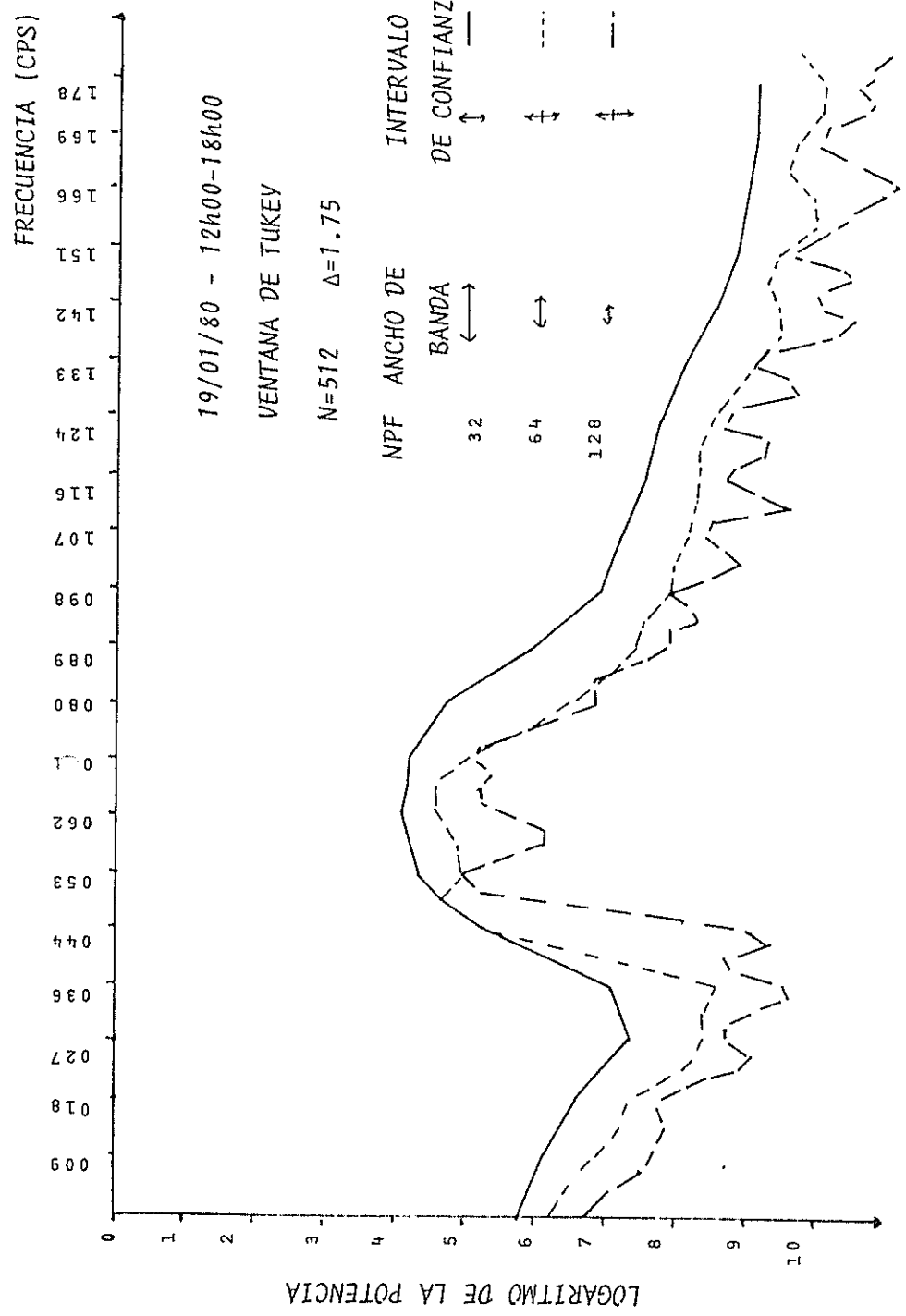


Fig. N° 21 ESPECTRO DE POTENCIA (LOGARITMO) DE LA SERIE DATOS



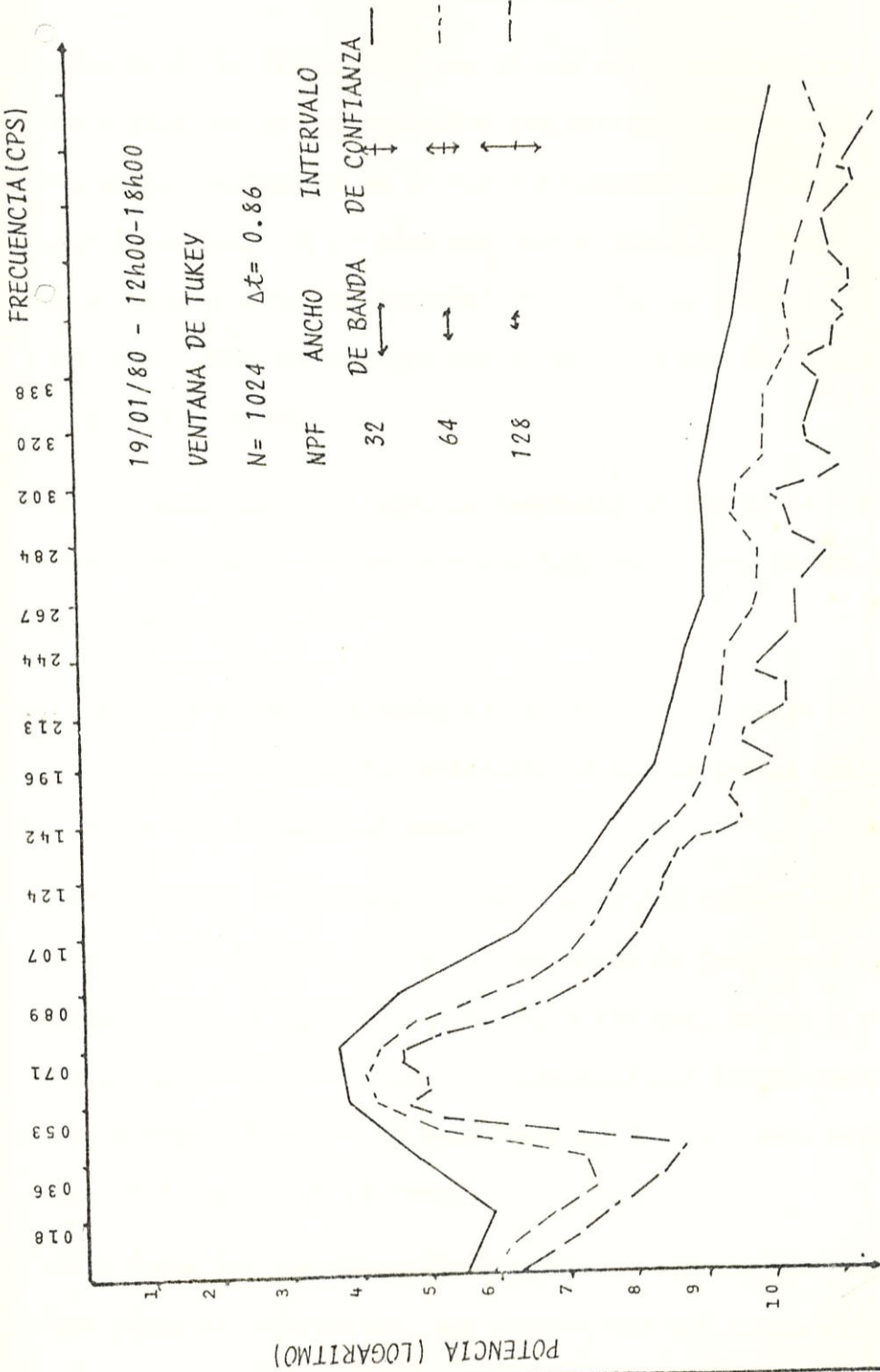


Fig. N° 22 ESPECTRO DE POTENCIA (LOGARITMO) DE LA SERIE DATOS



truncación de 128, porque era el que mejor resolución presentaba a pesar de la inestabilidad que presenta en las altas frecuencias; basándonos en lo que dijo Stuart et al (1971): Para que la amplitud de un pico sea predominante debe tener por lo menos tres puntos que destaquen del ruido de fondo y esta debe ser dos o tres veces mayor que la amplitud del ruido que lo rodea, era el apropiado.

El estimado espectral para un intervalo de tiempo de 0.8 seg. presentaba un comportamiento similar, más la resolución no era la misma.

Va con los parámetros escogidos se procedió a correr el programa con todas las series, obteniéndose los espectros que se muestran en las figuras del anexo

Estas figuras muestran los espectros de las treinta series y ninguno de ellos ha sido graficado hasta la frecuencia Nyquist, sino hasta una menor que la misma, 0.151 cps, debido a que a partir de dicha frecuencia los espectros son prácticamente iguales a cero. La salida de computador de los estimados espectrales se encuentra en el anexo

Casi todos los espectros son bimodales, es decir que presentan dos picos significativos, que dependiendo del intervalo de con-

fianza son o no importancia.

Las mayores concentraciones de energía se presentan en bandas bien definidas, digo bandas, porque en realidad los valores de los estimados del espectro de potencia no son valores puntuales. Pero las mayores concentraciones de energía se encuentran entre las frecuencias de 0.044 cps y 0.107 cps, que en el dominio del tiempo corresponde a valores entre los 22.5 seg. y 9.9 seg.

Los picos que se presentan se encuentran alrededor de la frecuencia de 0.053 cps y la de 0.071 cps.

Esto parece ser un indicativo de la presencia de dos trenes de olas cuyas amplitudes se encuentran moduladas, tal como se observa en el registro original de datos.

Con respecto a los momentos espectrales calculados a partir del espectro de potencia podremos decir que el Momento de orden cero es igual a la varianza de la serie. Si observamos la tabla N<sup>o</sup> IV podemos ver que la diferencia entre la varianza calculada estadísticamente y el momento espectral de orden cero es mínima, lo que nos indica que el espectro es representativo de la energía total de la serie. En lo concerniente a la relación entre el momento espectral de orden y la serie analizada en este

TABLA N° IV

	<i>Varianza</i>	<i>Mo</i>
1	0.07505	0.07559
2	0.1904	0.1904
3	0.2644	0.2645
4	0.1838	0.1839
5	0.4768	0.4768
6	0.3464	0.3464
7	0.5154	0.5153
8	0.2637	0.2638
9	0.4917	0.4918
10	0.1190	0.1190
11	0.2784	0.2784
12	0.1447	0.1448
13	0.4113	0.4111
14	0.1521	0.1521
15	0.2548	0.2548
16	0.1140	0.1143
17	0.1195	0.1197
18	0.7823	0.7822
19	0.2090	0.2091
20	0.2193	0.2193
21	0.2602	0.2602

	<i>Varianza</i>	<i>Mo</i>
22	0.2282	0.2283
23	0.3727	0.3731
24	0.5802	0.5803
25	0.2534	0.2534
26	0.7128	0.7159
27	0.1900	0.1900
28	0.2227	0.2231
29	0.2131	0.2137
30	0.2952	0.2952



BIBLIOTECA

caso, tenemos que la energía de las olas es  $\propto$  al  $M_0$  y por ende la altura de las olas será función del mismo. Más adelante hablaré de como se estableció esta relación.

Con referencia a la relación entre los momentos espectrales y los períodos promedios parece ser que están subestimados, ya que la relación entre ellos y los obtenidos del análisis estadístico convencional que debería ser de 1, es de 1.13 en promedio, para corregir esto se realizó una cuna de regresión, con el método de mínimos cuadrados que dio el siguiente resultado

$$T = 1.64 + 1.011 \sqrt{M_0 / M_2}$$

En la tabla N<sup>o</sup>V se muestran el período medio obtenido del análisis espectral y el período medio obtenido de la serie.

Con respecto al período significativo, es aquel correspondiente a la máxima concentración de energía espectral, y como se está trabajando en el dominio de las frecuencias, una simple inversión de la misma nos dará el valor buscado. En la tabla N<sup>o</sup>VI se muestran los períodos significativos para las 30 series, con el pico o modo principal.

Para obtener la altura media y significativa por medio del espectro de potencia, se estableció una relación funcional entre el momento de orden cero,  $M_0$  y dichas alturas; relación

TABLA N<sup>o</sup> V

Períodos medios obtenidos por el análisis espectral y de la serie de datos.

<i>2</i> Serie	Período Medio (Análisis espectral)	Período Medio (Serie)
1	15.84	15.21
2	15.85	15.6
3	15.53	16.01
4	15.82	15.08
5	15.97	15.63
6	15.54	14.49
7	15.7	14.82
8	14.03	13.74
9	15.56	14.59
10	13.64	14.32
11	14.66	13.98
12	14.42	13.48
13	13.96	15.95
14	14.41	14.04
15	14.73	15.11
16	15.25	14.67
17	15.72	16.01
18	14.80	14.79
19	16.02	16.78

Nº Serie	Período Medio (Análisis espectral)	Período Medio (Serie)
20	17.49	17.61
21	15.78	16.47
22	16.99	17.47
23	16.71	17.79
24	17.71	17.86
25	16.95	17.14
26	17.04	16.37
27	16.47	16.91
28	15.83	15.37
29	14.83	15.67
30	15.22	14.91

TABLA N° VI

Periodos significativos de las series analizadas obtenidas del análisis espectral

N° SERIE	MAXIMA CONCENTRACION DE ENERGIA	MODA (FRECUENCIA CPS)	PERIODO SIGNIFICATIVO (SEG)
1	$0.7087 \times 10^{-2}$	0.053	18.75
2	$0.2790 \times 10^{-1}$	0.056	18.00
3	$0.5602 \times 10^{-1}$	0.058	17.31
4	$0.3393 \times 10^{-1}$	0.062	16.07
5	$0.8824 \times 10^{-1}$	0.060	16.67
6	$0.7307 \times 10^{-1}$	0.064	15.52
7	$0.7906 \times 10^{-1}$	0.064	15.52
8	0.3492	0.067	15.00
9	$0.8743 \times 10^{-1}$	0.069	14.52
0	$0.1047 \times 10^{-1}$	0.078	12.86
1	$0.3696 \times 10^{-1}$	0.069	14.52
2	$0.1925 \times 10^{-1}$	0.069	14.52
3	$0.9664 \times 10^{-1}$	0.058	17.31
4	$0.2126 \times 10^{-1}$	0.058	17.31
5	$0.4005 \times 10^{-1}$	0.060	16.67
6	$0.1274 \times 10^{-1}$	0.058	17.31
7	$0.1266 \times 10^{-1}$	0.060	16.67



IE	MAXIMA CONCENTRACION DE ENERGIA	MODA (FRECUENCIA CPS)	PERIODO SIGNIFICATIVO (SEG)
	$0.7381 \times 10^{-2}$	0.062	16.07
	$0.2662 \times 10^{-1}$	0.047	21.43
	$0.4377 \times 10^{-1}$	0.047	21.43
	$0.4517 \times 10^{-1}$	0.049	20.46
	$0.4938 \times 10^{-1}$	0.049	20.46
	$0.9385 \times 10^{-1}$	0.051	19.56
	$0.1348 \times 10^0$	0.051	20.46
	$0.6427 \times 10^{-1}$	0.051	19.57
	$0.1958 \times 10^0$	0.056	18.00
	$0.3431 \times 10^{-1}$	0.056	18.00
	$0.4673 \times 10^{-1}$	0.060	16.67
	$0.3828 \times 10^{-1}$	0.060	16.67
	$0.6428 \times 10^{-1}$	0.062	16.07

que se muestra en las figuras N<sup>o</sup>23 y N<sup>o</sup>24 ; estableciéndose la relación en función de la raíz cuadrada del momento.

La relación es una recta, con pendiente positiva, según la cual podremos decir que a mayor concentración de energía, mayor altura de ola.

Como vemos esto de acuerdo con la realidad ya que la energía de las olas es proporcional al cuadrado de la altura de las mismas.

En las tablas N<sup>o</sup>VII y N<sup>o</sup>VIII se muestran los momentos espectrales, las alturas medias y significativas calculadas en función de los momentos y calculados estadísticamente; así como la relación funcional obtenida.

También se analizarán las 30 series como si fuera una sola para lo cual se hicieron los ajustes necesarios en las dimensiones de los arreglos del programa CEP.

Se hicieron los cálculos para el mismo intervalo de muestreo y con un punto de truncación equivalente, obteniéndose 1024 puntos del espectro.

La serie total fue completada con ceros para llegar a la potencia de 2 próxima mayor, que para nuestro caso fue 15, es decir que el número de datos de la serie fue de 32768 datos, aunque se trabajó tomando cada dos datos, es decir que la serie a la

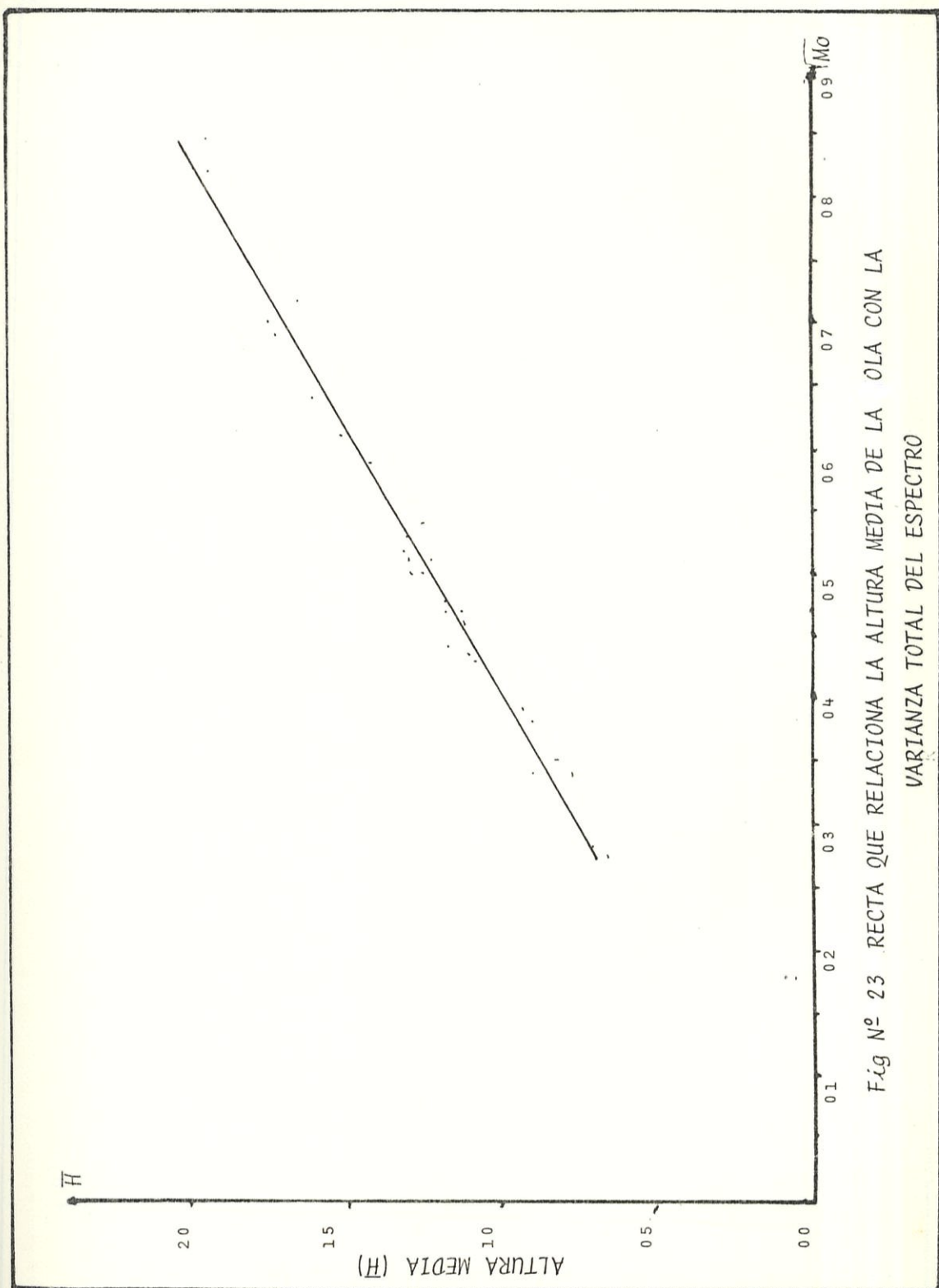


Fig N° 23 RECTA QUE RELACIONA LA ALTURA MEDIA DE LA OLA CON LA VARIANZA TOTAL DEL ESPECTRO

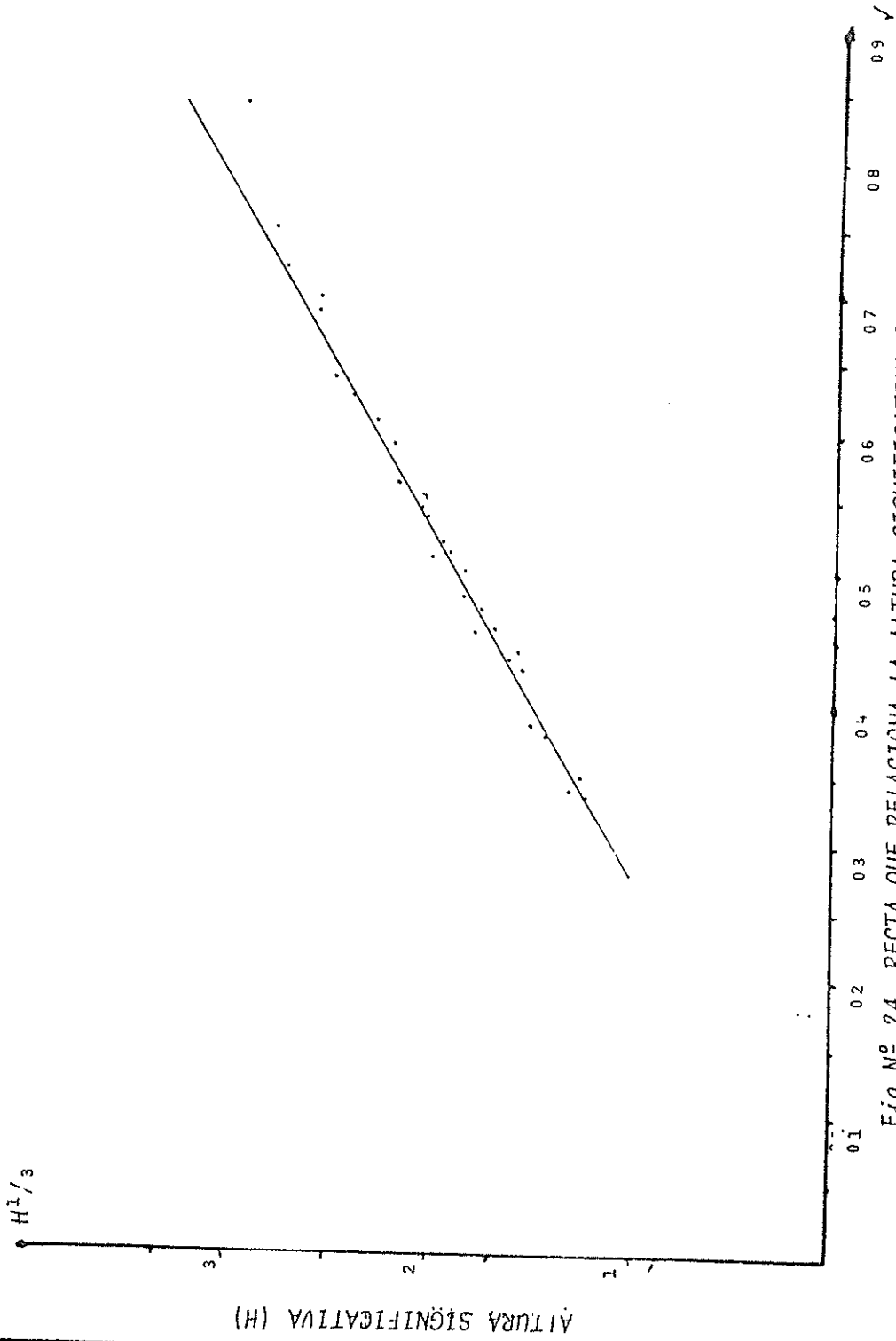


Fig. N.º 24 RECTA QUE RELACIONA LA ALTURA SIGNIFICATIVA DE LA OLA  
CON LA VARIANZA TOTAL DEL ESPECTRO

TABLA NOVII

Relación funcional entre la varianza total del Espectro y la altura me-

dia:  $HM = 0.0604 + 2.3397 * \sqrt{Mo}$

Momento Espectral de orden zero	HM=f(Mo) (Espectro)	HM (serie)
0.0756	0.70	0.67
0.1904	1.08	1.10
0.2645	1.26	1.32
0.1839	1.06	1.09
0.4768	1.68	1.73
0.3464	1.44	1.42
0.5153	1.74	1.65
0.2638	1.26	1.22
0.4918	1.70	1.75
0.1190	0.87	0.90
0.2784	1.29	1.31
0.1448	0.95	0.91
0.4111	1.56	1.62
0.1521	0.97	0.93
0.2548	1.24	1.27
0.1143	0.85	0.78
0.1197	0.87	0.83

Momento Espectral de orden cero	HM=f(Mo) (Espectro)	HM (serie)
0.0782	0.71	0.67
0.2091	1.13	1.13
0.2193	1.16	1.18
0.2603	1.25	1.30
0.2283	1.18	1.18
0.3731	1.49	1.52
0.5803	1.84	1.84
0.2534	1.24	1.28
0.7159	2.04	1.95
0.1900	1.17	1.17
0.2231	1.17	1.13
0.2137	1.14	1.14
0.2952	1.33	1.27



BIBLIOTECA

TABLA N<sup>o</sup> VIII

Relación funcional entre la varianza total del espectro y la altura significativa:  $H_{1/3} = 0.0043 + 3.74 \times \sqrt{M_0}$

Momento Espectral de orden Cero	$H_{1/3} = f(M_0)$ (Espectro)	$H_{1/3}$ (serie)
0.0756	1.03	0.99
0.1904	1.64	1.64
0.2645	1.93	1.90
0.1839	1.61	1.55
0.4768	2.59	2.58
0.3464	2.19	2.21
0.5153	2.69	2.76
0.2638	1.93	2.01
0.4918	2.63	2.59
0.1190	1.29	1.32
0.2784	1.98	2.01
0.1448	1.43	1.44
0.4111	2.40	2.49
0.1521	1.46	1.51
0.2548	1.89	1.91
0.1143	1.27	1.25
0.1197	1.30	1.28
0.0782	1.05	1.05

<i>Momento Espectral de orden Cero</i>	$H^{1/3} = f(M_0)$ (Espectro)	$H^{1/3}$ (serie)
0.2091	1.71	1.74
0.2193	1.76	1.75
0.2603	1.91	1.91
0.2283	1.79	1.84
0.3731	2.29	2.80
0.5803	2.85	2.98
0.2534	1.83	1.89
0.7159	3.17	2.97
0.1900	1.63	1.56
0.2231	1.77	1.75
0.2137	1.73	1.69
0.2952	2.04	2.07





BIBLIOTECA

cual se le aplicó el análisis espectral tenía 16384 puntos.

Debido a los ceros aumentados, apareció contaminación en las bajas frecuencias. Sin embargo, el espectro presenta tres periodicidades bien definidas en las siguientes bandas de frecuencia 0.059 cps (17.05 seg), 0.065 cps (15.3 seg) y 0.071 cps (14.17seg) con varianzas cuyos valores son  $0.4217 \times 10^{-2} \text{ m}^2\text{-cps}$ ,  $0.4821 \times 10^{-2} \text{ m}^2\text{-cps}$  y  $0.4153 \times 10^{-2} \text{ m}^2\text{-cps}$ , respectivamente; es decir que la concentración de energía en dichas bandas era casi igual. Esto vendría a reforzar lo anteriormente expuesto y acerca de la presencia de diferentes trenes de onda. Estas periodicidades se presentan en la mayoría de los espectros.

Con respecto al análisis estadístico convencional los resultados se han presentado en las tablas anteriormente mencionadas. En los anexos B y C tenemos los porcentajes de períodos y porcentajes de olas encontradas que nos dan una idea acerca de cuales son los períodos y alturas medias y la altura significativa. En algunos casos, el comportamiento observado en el histograma de % de Períodos es similar al del espectro de potencia correspondiente, más estos histogramas no nos dicen nada acerca de las alturas de las olas y en muchos casos bandas de frecuencia que presentan picos en el espectro de potencia, no muestran nada en el histograma en % de Períodos.

○ En lo que se refiere a los porcentajes de olas, la altura de estas varía en un amplio rango, en algunos casos se presentan bien definidas las alturas predominantes en otros no existe una altura predominante.

El 33% de las olas más altas nos llevan a la determinación de la altura significativa de la ola, alturas ya presentada en tablas anteriormente mencionadas.

Los valores medios y las varianzas, estadísticamente solo nos dan una idea del comportamiento de la serie analizada, más no información completa acerca de la misma.

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Después de haber realizado un análisis de las series de datos de la región de estudio en la Provincia de Manabí y de los resultados del procesamiento puedo concluir que:

- 1.- Las series de datos de olas exhiben a simple vista una cierta periodicidad que no es factible de determinar a priori además se presenta una modulación de las amplitudes, indicadora de la presencia de varios trenes de onda.
- .- Con el análisis estadístico convencional, solo podemos obtener los valores de los períodos medios, alturas medias y alturas significativas, a través de un procedimiento que es largo y tedioso (sacar promedios, varianzas, determinar el número de olas, sus alturas, porcentaje de los períodos, porcentaje de alturas, etc.).
- .- Con el análisis espectral, con la obtención de un solo parámetro como es el caso del espectro de potencia, se ha podido llegar a la determinación de características de la serie que se podrán detectar a simple vista y otras que solo se mezclan con la aplicación del mismo, de una manera más sencilla y más rápida que facilita la obtención de los parámetros deseados: Período Medio, Período Significativo, Altura Media, Altura Significativa, Varianza total de la serie.
- .- De acuerdo con los resultados obtenidos del análisis espectral, se

- ha podido detectar la presencia de trenes de onda con períodos bien definidos que se mezclan en los espectros de potencia calculado por medio de sus modas (frecuencia de máxima varianza o concentración de energía). Del análisis de la serie total las mayores concentraciones de energía fueron:  $0.42 \times 10^{-2} \text{ m}^2\text{-cps}$  en la frecuencia 0.059cps (17.05 seg);  $0.48 \times 10^{-2} \text{ m}^2\text{-cps}$  en la frecuencia 0.065 cps (15.3seg); y  $0.42 \times 10^{-2} \text{ m}^2\text{-cps}$  en la frecuencia 0.071 cps (14.17 seg).
- 4.- Con los momentos espectrales calculados, se han podido obtener relaciones funcionales del Período Medio, Altura Media y Altura significativa, que facilitan el cálculo de los mismos. El período medio de toda la serie fue de 15.61 seg.; el período significativo no medio 17.31 seg.; la altura media promedio es 1.24 m y la altura significativa promedio: 1.89 m.
- 5.- La importancia de la aplicación del análisis espectral en series de datos no solo radica en la sencillez y rapidez de los cálculos sino en la correlación de formas, comportamientos y propiedades de las series analizadas que no se pueden detectar con un análisis estadístico convencional. Aunque no hay que olvidar que el reconocimiento dentro del espectro de tales comportamientos y de su significado físico dependen principalmente de la experiencia.

Después de haber revisado la metodología utilizada en esta tesis, a más de la que actualmente se está aplicando al análisis de series de tiempo, se recomienda que:

- 1.- Las técnicas de análisis espectral utilizadas se implementen en las Instituciones que manejan series de tiempo ya que se ha demostrado la eficiencia y utilidad de las mismas.
- 2.- Se use el método directo de análisis espectral que involucra el cálculo del espectro de potencia de la serie original de datos y se componen sus resultados con los del método indirecto (vía autocovarianza) utilizado en esta tesis.
- 3.- Se implemente un algoritmo para la transformada de Fourier que no implique la truncación de datos o aumento de los mismos con ceros, que involucra una modificación de la serie original de datos y que los resultados se comparen con los obtenidos con el algoritmo que trunca o añade ceros a la serie original.



BIBLIOTECA

ANEXOS

ANEXO A

*Gráficos de algunas series de datos*



BIBLIOTECA

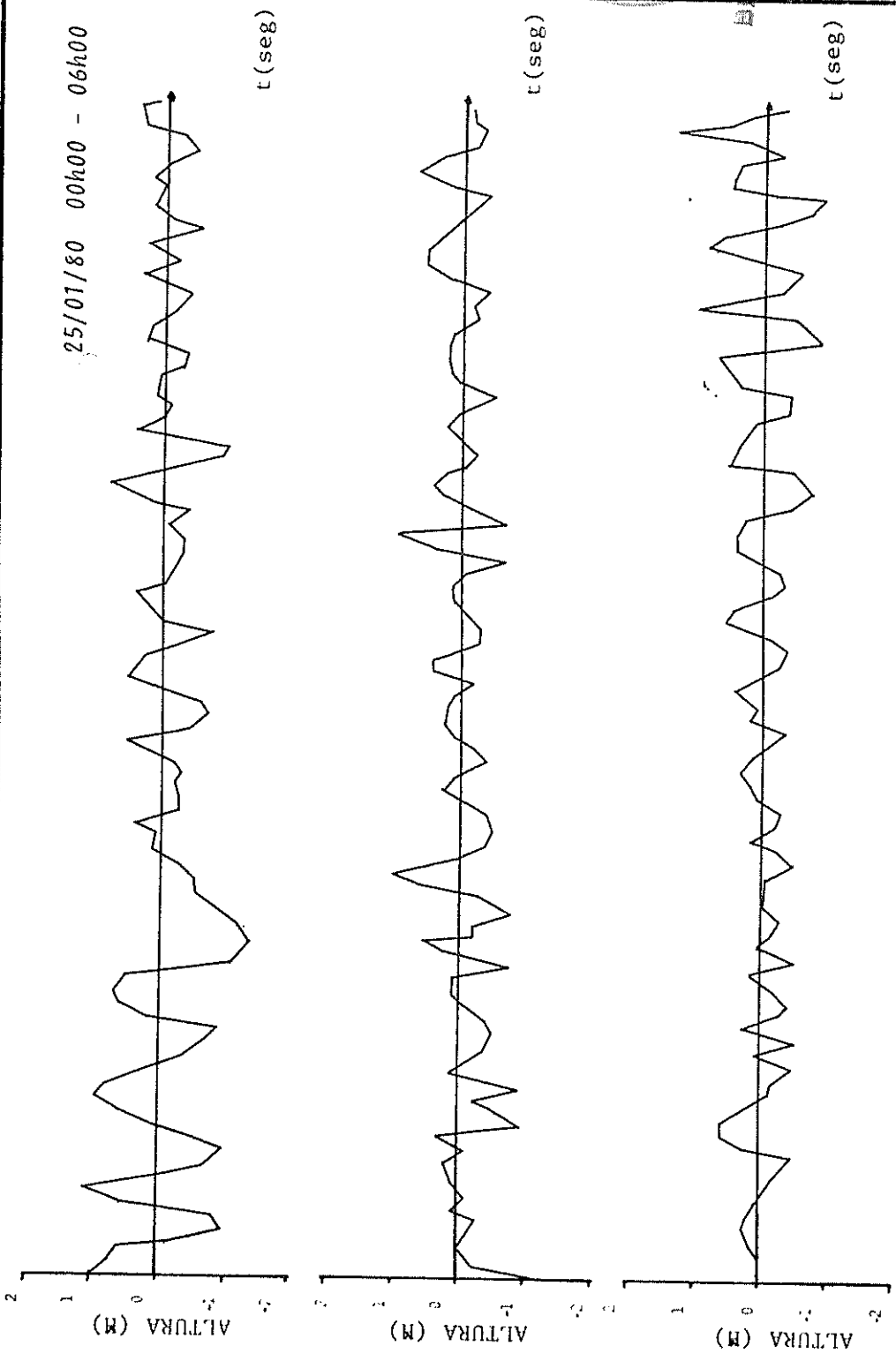


Fig. N°27 DATOS DE LA SERIE DATO 22 REFERIDOS A UNA LINEA MEDIA CERO

(1 mm. = 1.75 seg)



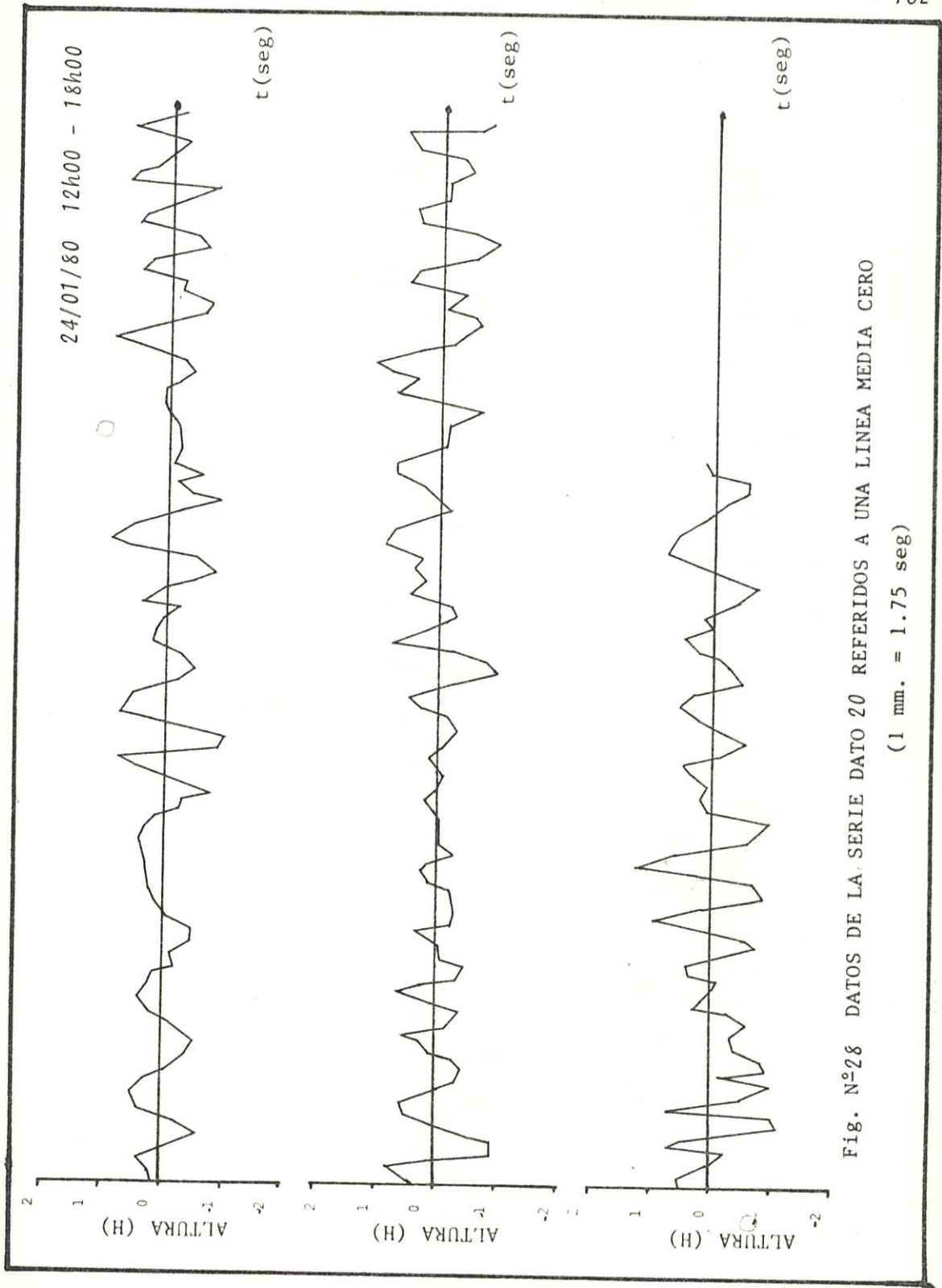


Fig. N°28 DATOS DE LA SERIE DATO 20 REFERIDOS A UNA LINEA MEDIA CERO  
(1 mm. = 1.75 seg)

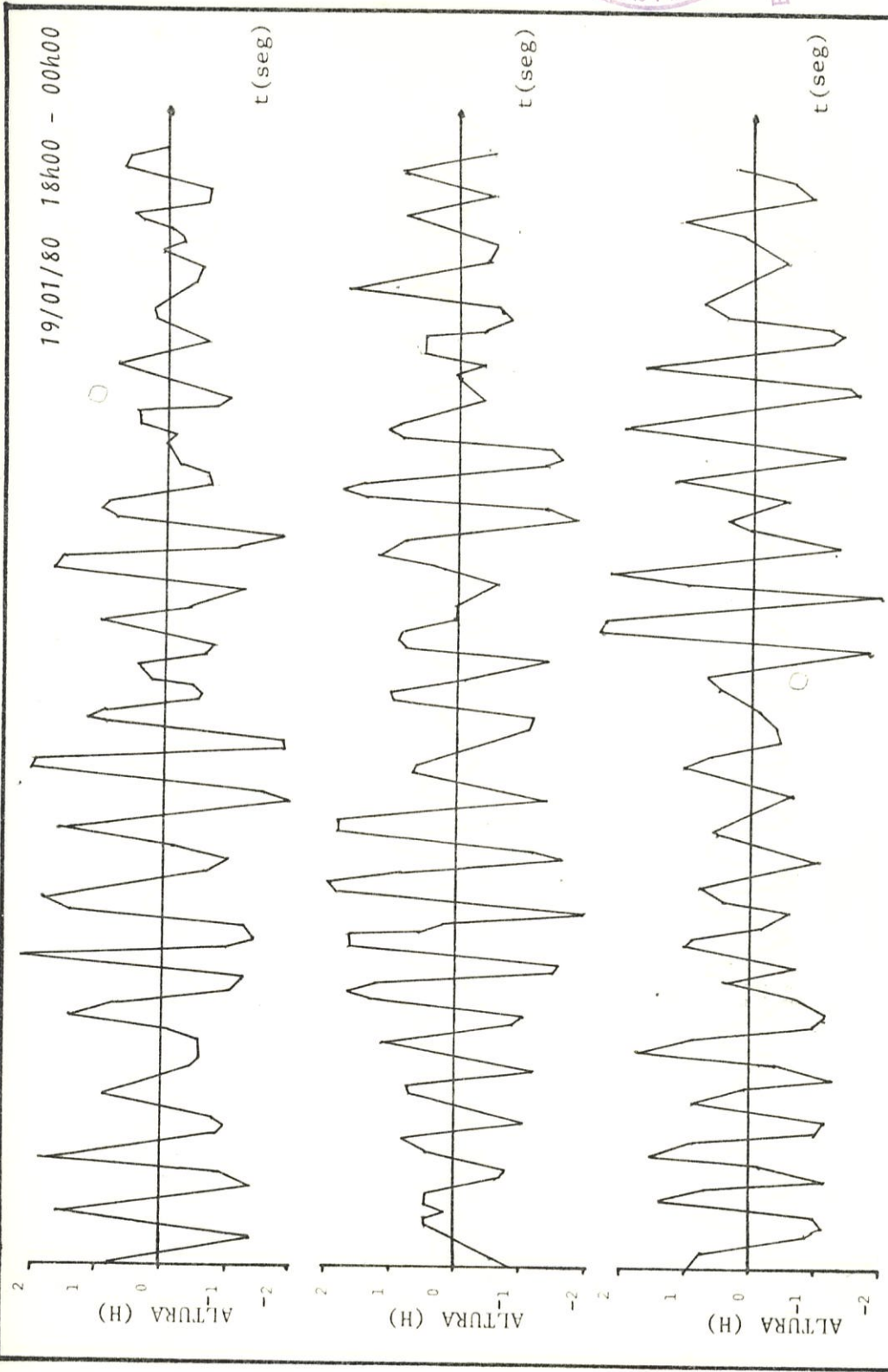


Fig. N° 29 DATOS DE LA SERIE DATO 2 REFERIDOS A UNA LINEA MEDIA CERO  
(1 mm. = 1.75 seg)

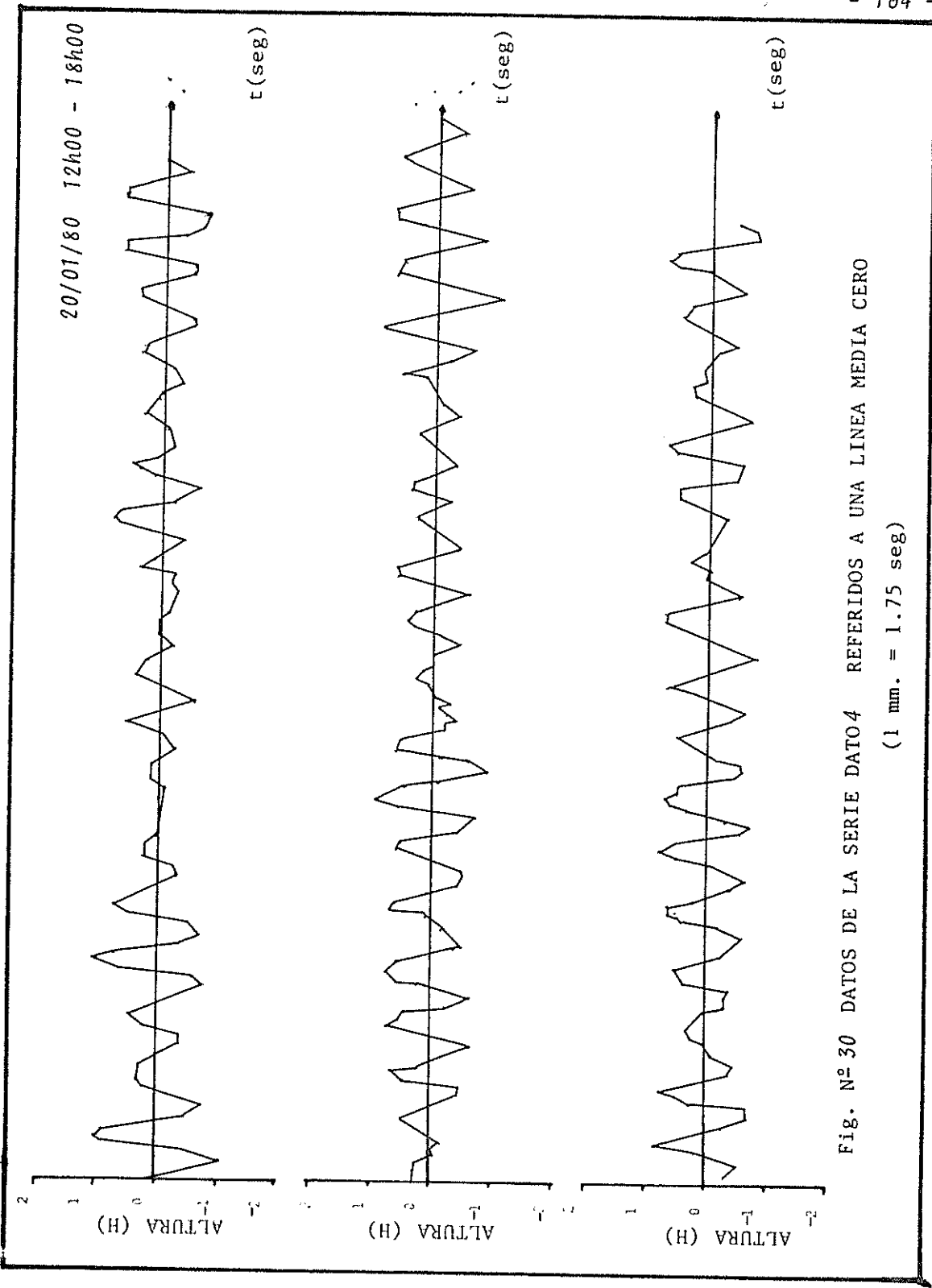


Fig. N° 30 DATOS DE LA SERIE DATO4 REFERIDOS A UNA LINEA MEDIA CERO  
(1 mm. = 1.75 seg)

ANEXO B

*Gráficos de porcentajes de alturas*

21/01/80 - 12h00-18h00

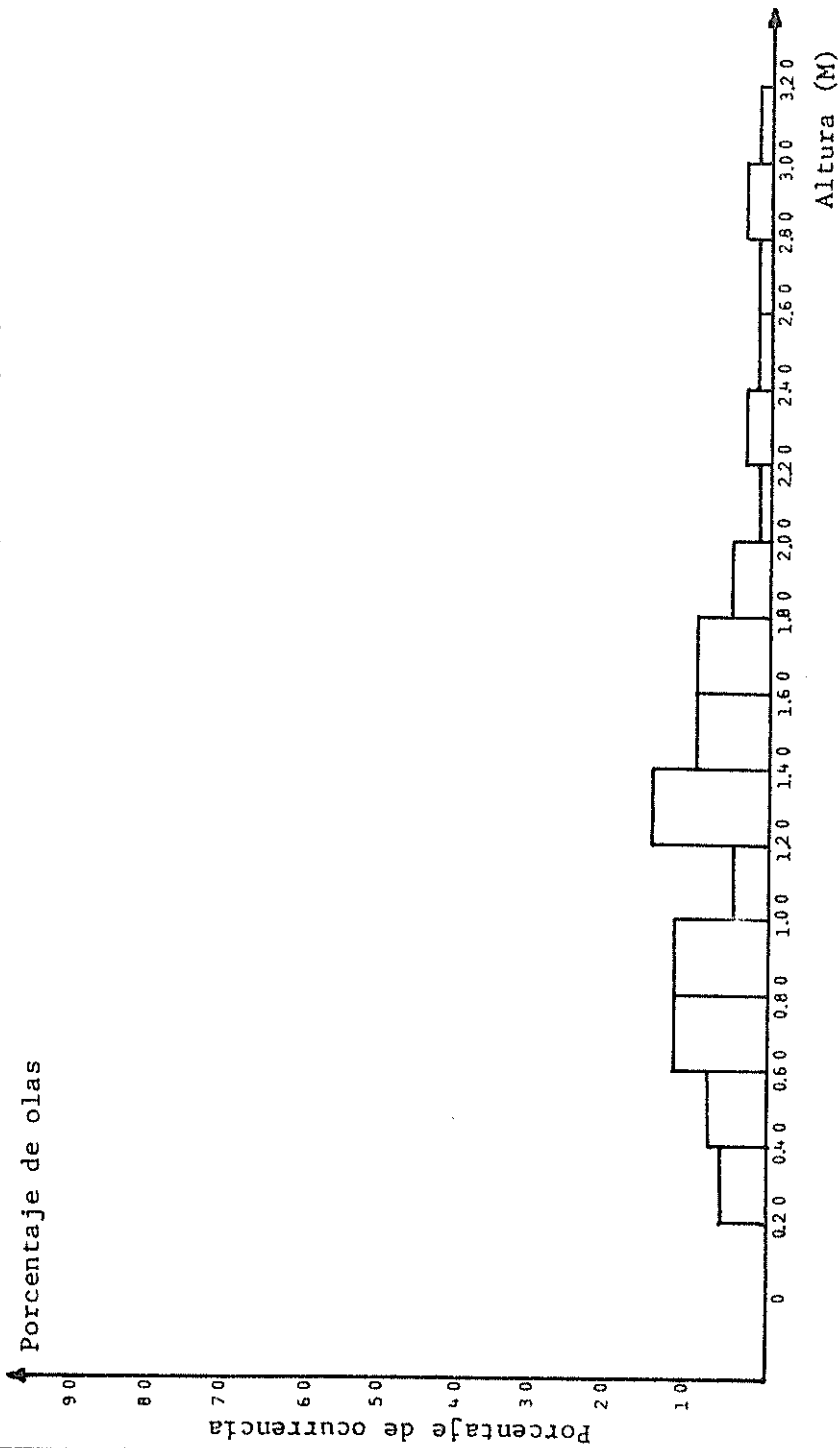


Fig. N° 34 Porcentaje de ocurrencia de olas de la serie Dato 8

*[Faint handwritten text, possibly a signature or date]*

24/01/80 - 00h00-06h00

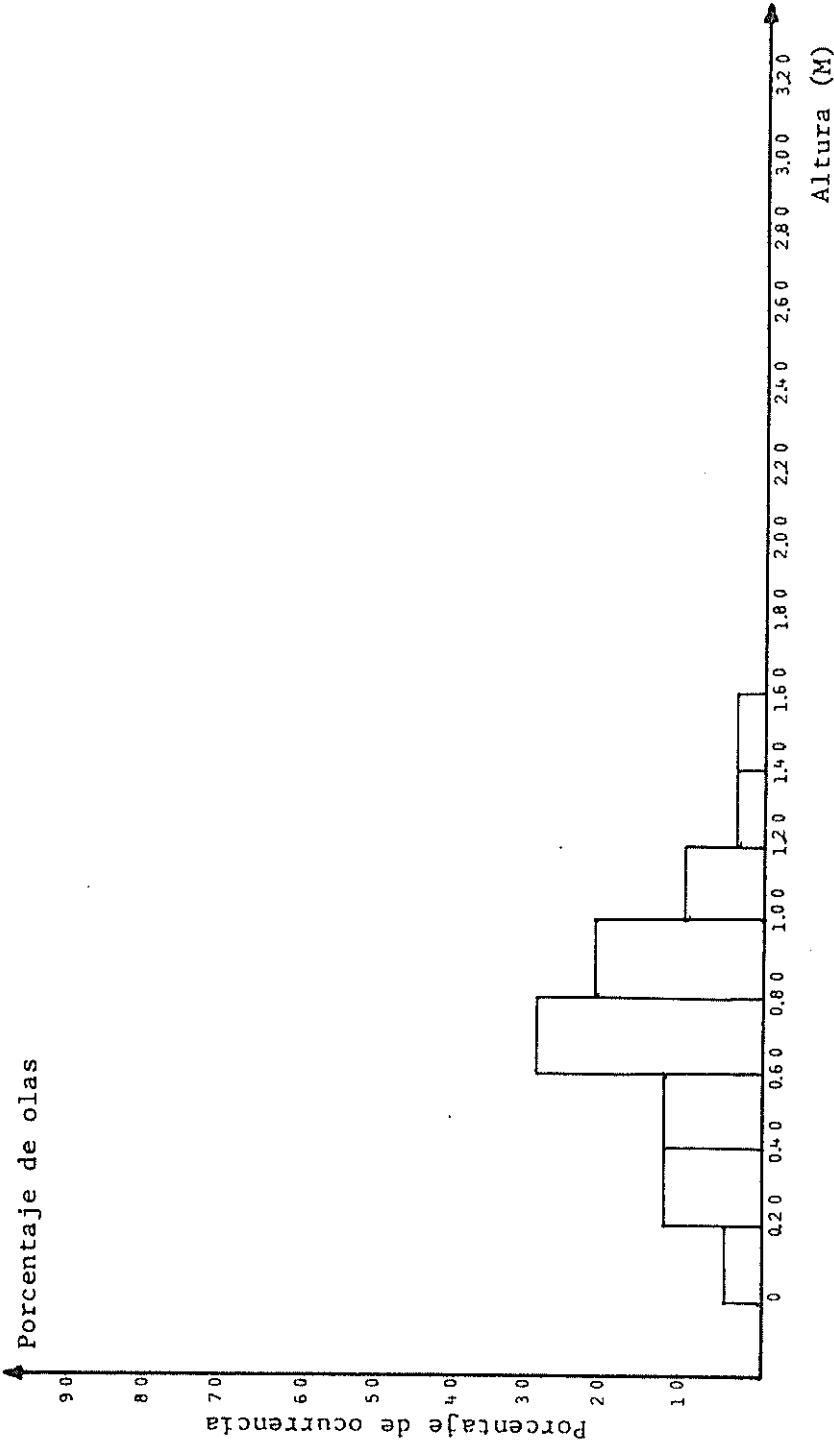
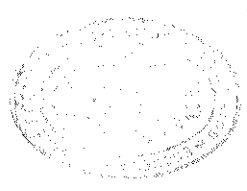


Fig. N° 32 Porcentaje de ocurrencia de olas de la serie Dato 18

C

25/01/80 - 18h00-00h00



BIBLIOTECA

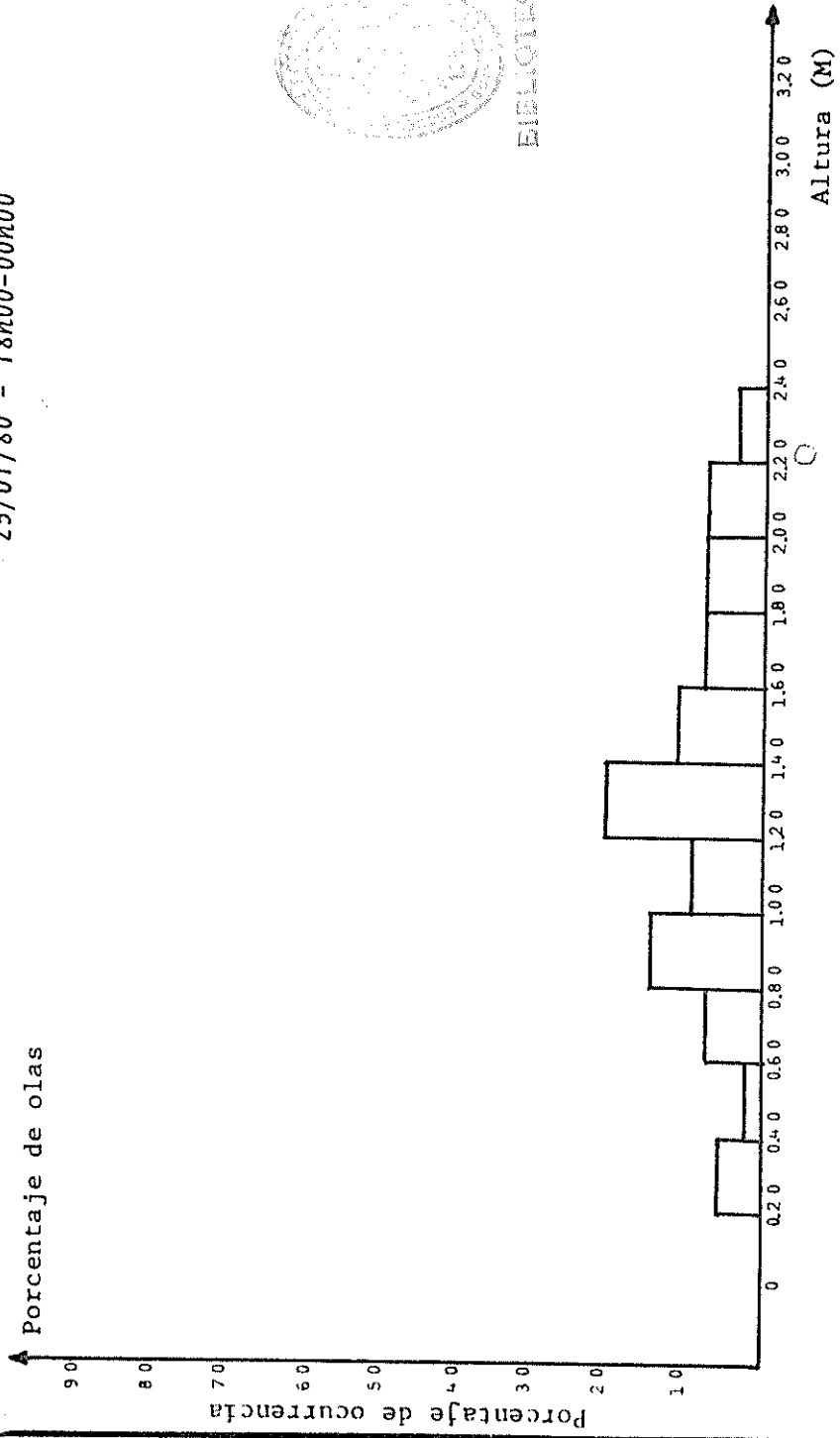


Fig. N°33 Porcentaje de ocurrencia de olas de la serie Dato 25

ANEXO .C

*Gráficos de porcentajes de períodos*



21/01/80 - 12h00-18h00

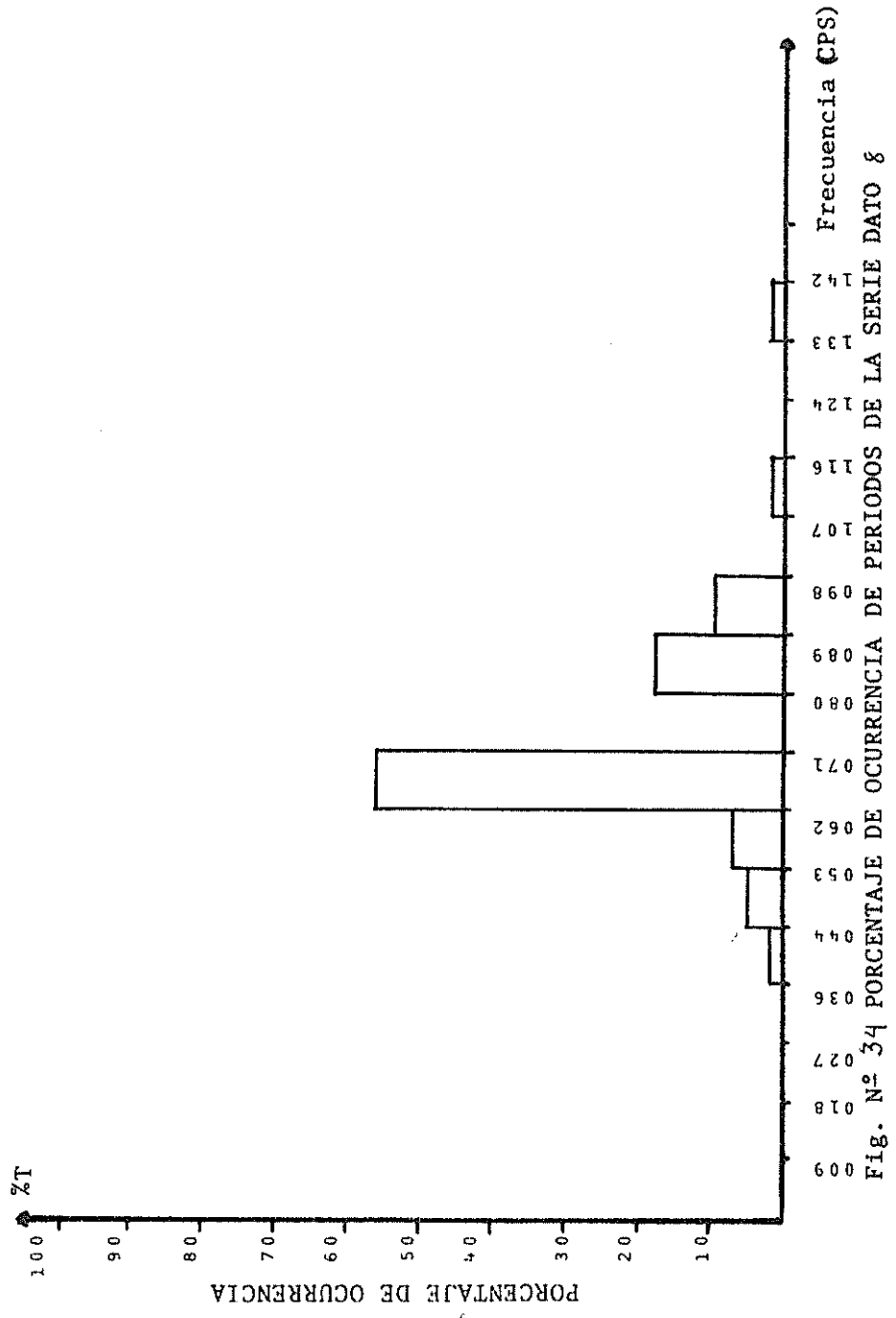
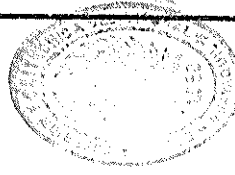


Fig. N° 34 PORCENTAJE DE OCURRENCIA DE PERIODOS DE LA SERIE DATO 8

*Handwritten notes:*  
1.00  
0.90  
0.80  
0.70  
0.60  
0.50  
0.40  
0.30  
0.20  
0.10  
0.00

24/01/80 - 00h00-06h00



BIBLIOTECA

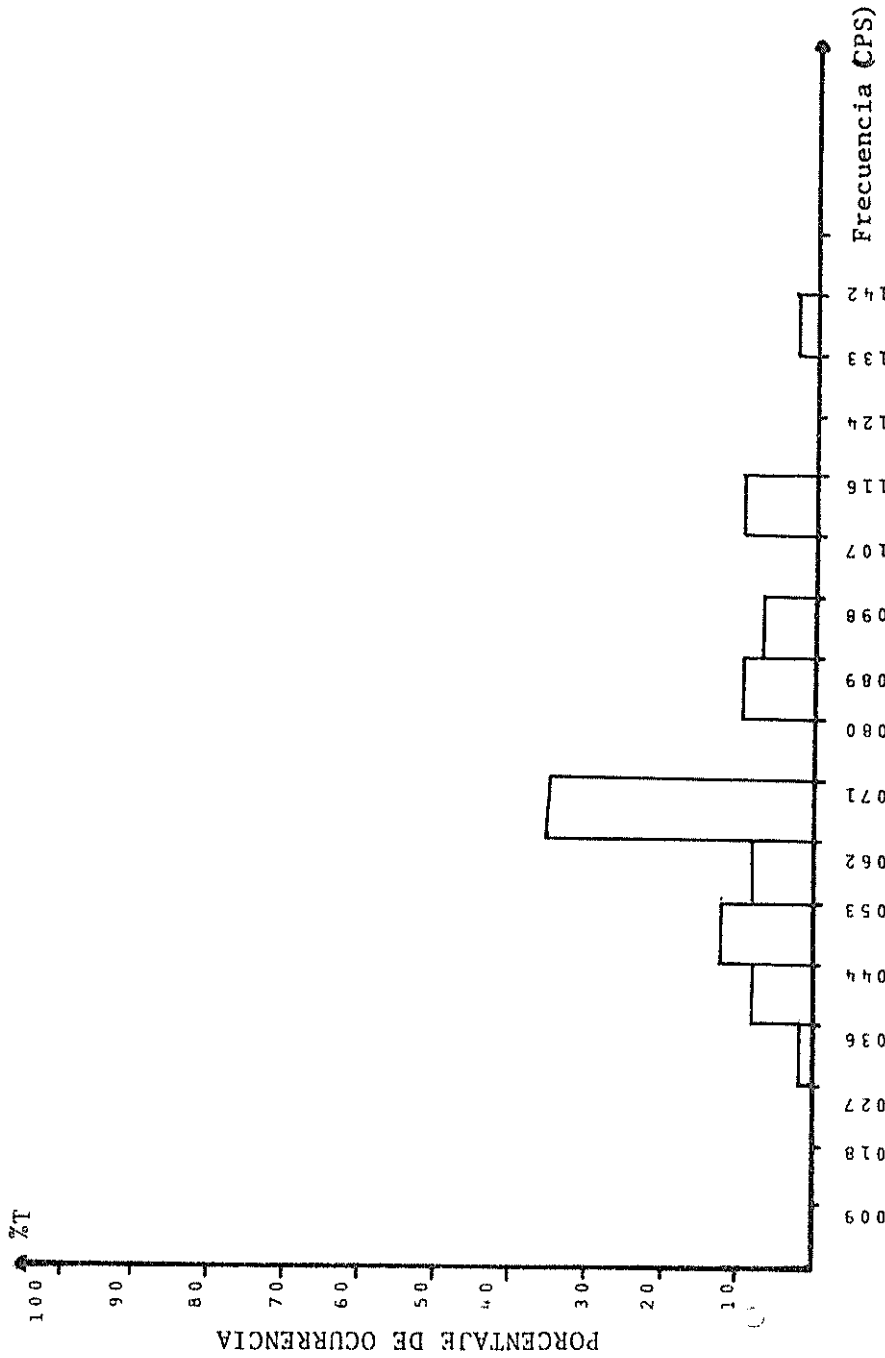


Fig. N° 35 PORCENTAJE DE OCURRENCIA DE PERIODOS DE LA SERIE DATO 18

25/01/80 - 18h00-00h00

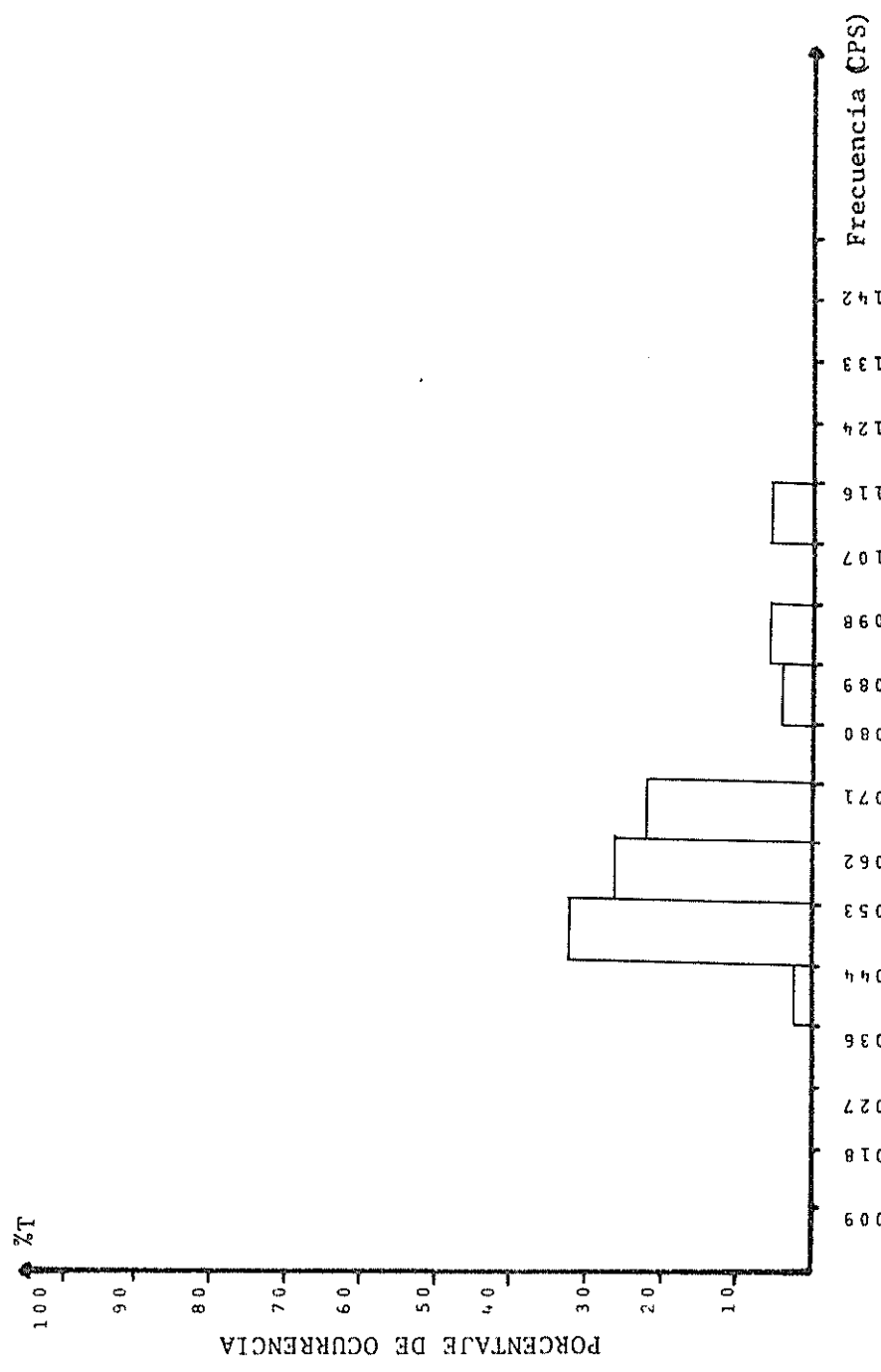


Fig. N° 36 PORCENTAJE DE OCURRENCIA DE PERIODOS DE LA SERIE DATO 25



BIBLIOTECA

ANEXO D

*Espectro de Potencia*

NUMERO DE PUNTOS DE FRECUENCIA 128

TIPO DE VENTANA 2            MOUT= 1

FNY= 0.2844            DELTAT= 1.7578

REGISTRO DEL DIA 21/01/80 , 12H00-13H00, N=1021

M0=0.2638E+00  
M2=0.1756E-02  
M4=0.2077E-04  
ESP= 0.0022

0.000	0.2753E-03
0.002	0.2927E-03
0.004	0.3148E-03
0.007	0.3447E-03
0.009	0.3657E-03
0.011	0.2930E-03
0.013	0.2530E-03
0.016	0.3179E-03
0.018	0.4062E-03
0.020	0.4991E-03
0.022	0.5424E-03
0.024	0.4501E-03
0.027	0.3606E-03
0.029	0.3296E-03
0.031	0.2767E-03
0.033	0.1583E-03
0.036	0.9453E-04
0.038	0.1464E-03
0.040	0.1674E-03
0.042	0.1743E-03
0.044	0.1011E-02
0.047	0.2855E-02
0.049	0.3775E-02
0.051	0.2644E-02
0.053	0.1353E-02
0.056	0.2896E-03
0.058	0.1031E-02
0.060	0.4215E-02
0.062	0.1511E-01
0.064	0.3239E-01
0.067	0.3492E-01
0.069	0.3337E-01
0.071	0.3155E-01
0.073	0.1747E-01
0.076	0.9355E-02
0.078	0.7623E-02
0.080	0.6843E-02
0.082	0.8449E-02
0.084	0.7401E-02
0.087	0.4615E-02
0.089	0.3305E-02
0.091	0.2389E-02
0.093	0.1234E-02
0.096	0.1359E-02
0.098	0.1158E-02
0.100	0.5864E-03
0.102	0.3659E-03
0.104	0.3506E-03
0.107	0.4721E-03
0.109	0.5121E-03
0.111	0.5359E-03
0.113	0.6621E-03
0.116	0.7947E-03
0.118	0.6705E-03
0.120	0.4495E-03
0.122	0.5343E-03
0.124	0.6133E-03
0.127	0.5095E-03
0.129	0.5397E-03

0.140	0.6555E-03
0.142	0.6925E-03
0.144	0.5805E-03
0.147	0.4229E-03
0.149	0.3277E-03
0.151	0.3060E-03
0.153	0.2445E-03
0.156	0.1476E-03
0.158	0.1244E-03
0.160	0.1778E-03
0.162	0.2438E-03
0.164	0.2643E-03
0.167	0.1844E-03
0.169	0.1323E-03
0.171	0.1919E-03
0.173	0.2289E-03
0.176	0.1723E-03
0.178	0.2491E-03
0.180	0.5290E-03
0.182	0.4848E-03
0.184	0.2191E-03
0.187	0.2269E-03
0.189	0.3165E-03
0.191	0.2544E-03
0.193	0.1612E-03
0.196	0.2283E-03
0.198	0.2649E-03
0.200	0.1661E-03
0.202	0.1753E-03
0.204	0.2597E-03
0.207	0.2678E-03
0.209	0.1799E-03
0.211	0.9669E-04
0.213	0.9435E-04
0.216	0.1314E-03
0.218	0.1539E-03
0.220	0.1154E-03
0.222	0.1073E-03
0.224	0.1863E-03
0.227	0.1868E-03
0.229	0.9400E-04
0.231	0.6494E-04
0.233	0.8386E-04
0.236	0.9207E-04
0.238	0.9403E-04
0.240	0.7611E-04
0.242	0.4849E-04
0.244	0.6576E-04
0.247	0.7952E-04
0.249	0.4211E-04
0.251	0.4071E-04
0.253	0.6783E-04
0.256	0.6272E-04
0.258	0.6038E-04
0.260	0.7901E-04
0.262	0.1011E-03
0.264	0.1179E-03
0.267	0.1125E-03
0.269	0.8195E-04
0.271	0.6763E-04

NUMERO DE PUNTOS DE FRECUENCIA 128

TIPO DE VENTANA 2 MCUT= 7

FNY= 0.2844 DELTAT= 1.7578

REGISTRO DEL DIA 24/01/80, 00H00-06H00, N=1025

M0=0.7822E-01  
M2=0.4613E-03  
M4=0.6783E-05  
ESPF= C.0022





CPS

M2-CPS

0.000	0.11173E-04
0.002	0.41050E-04
0.004	0.10200E-03
0.007	0.10730E-03
0.009	0.67960E-04
0.011	0.76900E-04
0.013	0.19520E-03
0.016	0.33090E-03
0.018	0.33060E-03
0.020	0.30380E-03
0.022	0.26750E-03
0.024	0.13400E-03
0.027	0.53250E-04
0.029	0.14370E-03
0.031	0.19450E-03
0.033	0.15960E-03
0.036	0.16480E-03
0.038	0.13980E-03
0.040	0.64810E-03
0.042	0.37930E-02
0.044	0.53460E-02
0.047	0.21950E-02
0.049	0.17030E-03
0.051	0.59190E-03
0.053	0.89960E-03
0.056	0.24840E-02
0.058	0.56590E-02
0.060	0.70130E-02
0.062	0.73310E-02
0.064	0.65580E-02
0.067	0.38550E-02
0.069	0.20920E-02
0.071	0.10640E-02
0.073	0.53680E-03
0.076	0.13430E-02
0.078	0.31820E-02
0.080	0.36840E-02
0.082	0.26320E-02
0.084	0.18230E-02
0.087	0.14790E-02
0.089	0.13000E-02
0.091	0.92410E-03
0.093	0.58750E-03
0.096	0.44880E-03
0.098	0.43870E-03
0.100	0.32920E-03
0.102	0.19330E-03
0.104	0.17090E-03
0.107	0.23060E-03
0.109	0.22980E-03
0.111	0.17540E-03
0.113	0.89130E-04
0.116	0.63380E-04
0.118	0.12560E-03
0.120	0.19060E-03
0.122	0.22340E-03
0.124	0.23020E-03
0.127	0.28610E-03
0.129	0.34110E-03

0.140	0.2539E-03
0.142	0.2166E-03
0.144	0.1345E-03
0.147	0.1217E-03
0.149	0.2881E-03
0.151	0.3652E-03
0.153	0.2573E-03
0.156	0.1406E-03
0.158	0.6730E-04
0.160	0.3577E-04
0.162	0.3830E-04
0.164	0.6442E-04
0.167	0.5930E-04
0.169	0.3237E-04
0.171	0.2073E-04
0.173	0.3759E-04
0.176	0.5500E-04
0.178	0.4508E-04
0.180	0.3552E-04
0.182	0.2395E-04
0.184	0.2881E-04
0.187	0.3568E-04
0.189	0.2446E-04
0.191	0.2122E-04
0.193	0.2445E-04
0.196	0.2440E-04
0.198	0.3224E-04
0.200	0.2647E-04
0.202	0.1367E-04
0.204	0.1532E-04
0.207	0.3000E-04
0.209	0.3070E-04
0.211	0.2724E-04
0.213	0.3476E-04
0.216	0.3062E-04
0.218	0.2248E-04
0.220	0.2558E-04
0.222	0.3811E-04
0.224	0.3633E-04
0.227	0.2707E-04
0.229	0.2039E-04
0.231	0.1305E-04
0.233	0.1402E-04
0.236	0.1447E-04
0.238	0.1249E-04
0.240	0.1303E-04
0.242	0.1702E-04
0.244	0.2617E-04
0.247	0.2396E-04
0.249	0.1196E-04
0.251	0.1049E-04
0.253	0.1350E-04
0.256	0.1434E-04
0.258	0.1617E-04
0.260	0.1739E-04
0.262	0.1718E-04
0.264	0.1810E-04
0.267	0.2010E-04
0.269	0.2217E-04
0.271	0.2544E-04

NUMERO DE PUNTOS DE FRECUENCIA 128

TIPO DE VENTANA 2           MCUI= 7

FNY= 0.2844           DELTA1= 1.7578

REGISTRO DEL DIA 25/01/80, 18H00-00H00, N=1059

=0.2534E+00

=0.1105E-02

=0.1341E-04

PF= 0.0022

0.000	0.5074E-04
0.002	0.6464E-04
0.004	0.1222E-03
0.007	0.1650E-03
0.009	0.1788E-03
0.011	0.1624E-03
0.013	0.3156E-03
0.016	0.4696E-03
0.018	0.2737E-03
0.020	0.1409E-03
0.022	0.2546E-03
0.024	0.2675E-03
0.027	0.3585E-03
0.029	0.4619E-03
0.031	0.4923E-03
0.033	0.2438E-03
0.036	0.2175E-03
0.038	0.1507E-03
0.040	0.3118E-03
0.042	-0.1147E-03
0.044	0.1000E-02
0.047	-0.2715E-03
0.049	0.1827E-01
0.051	0.6427E-01
0.053	0.6410E-01
0.056	0.2413E-01
0.058	0.5543E-02
0.060	0.1196E-02
0.062	0.1031E-02
0.064	0.2432E-02
0.067	0.4272E-02
0.069	0.7670E-02
0.071	0.9798E-02
0.073	0.8824E-02
0.076	0.7735E-02
0.078	0.6012E-02
0.080	0.2656E-02
0.082	0.8569E-03
0.084	0.4291E-03
0.087	0.1056E-02
0.089	0.1670E-02
0.091	0.1153E-02
0.093	0.4150E-03
0.096	0.2629E-03
0.098	0.6328E-03
0.100	0.7410E-03
0.102	0.8845E-03
0.104	0.1678E-02
0.107	0.1813E-02
0.109	0.1165E-02
0.111	0.5846E-03
0.113	0.2535E-03
0.116	0.1696E-03
0.118	0.1964E-03
0.120	0.2563E-03
0.122	0.2871E-03
0.124	0.2816E-03
0.127	0.2924E-03
0.129	0.2955E-03



BIBLIOTECA

0.142	0.1135E-03
0.144	0.9749E-04
0.147	0.5832E-04
0.149	0.8205E-04
0.151	0.1308E-03
0.153	0.9511E-04
0.156	0.4171E-04
0.158	0.5732E-04
0.160	0.1152E-03
0.162	0.1578E-03
0.164	0.1419E-03
0.167	0.1037E-03
0.169	0.8321E-04
0.171	0.4462E-04
0.173	0.0726E-04
0.176	0.1523E-03
0.178	0.1403E-03
0.180	0.6511E-04
0.182	0.3716E-04
0.184	0.1943E-04
0.187	0.1512E-04
0.189	0.3416E-04
0.191	0.4299E-04
0.193	0.3012E-04
0.196	0.3618E-04
0.198	0.5212E-04
0.200	0.0185E-04
0.202	0.9497E-04
0.204	0.9350E-04
0.207	0.9839E-04
0.209	0.1002E-03
0.211	0.8571E-04
0.213	0.5178E-04
0.216	0.4360E-04
0.218	0.9089E-04
0.220	0.1012E-03
0.222	0.5602E-04
0.224	0.6229E-04
0.227	0.8851E-04
0.229	0.5612E-04
0.231	0.2087E-04
0.233	0.1585E-04
0.236	0.1145E-04
0.238	0.3239E-04
0.240	0.9249E-04
0.242	0.1037E-03
0.244	0.5179E-04
0.247	0.1767E-04
0.249	0.2073E-04
0.251	0.4714E-04
0.253	0.5189E-04
0.256	0.2534E-04
0.258	0.9535E-05
0.260	0.2302E-04
0.262	0.4710E-04
0.264	0.4037E-04
0.267	0.3236E-04
0.269	0.3256E-04
0.271	0.6750E-04
	0.1237E-04

ANEXO E

*Gráficos del espectro de potencia*

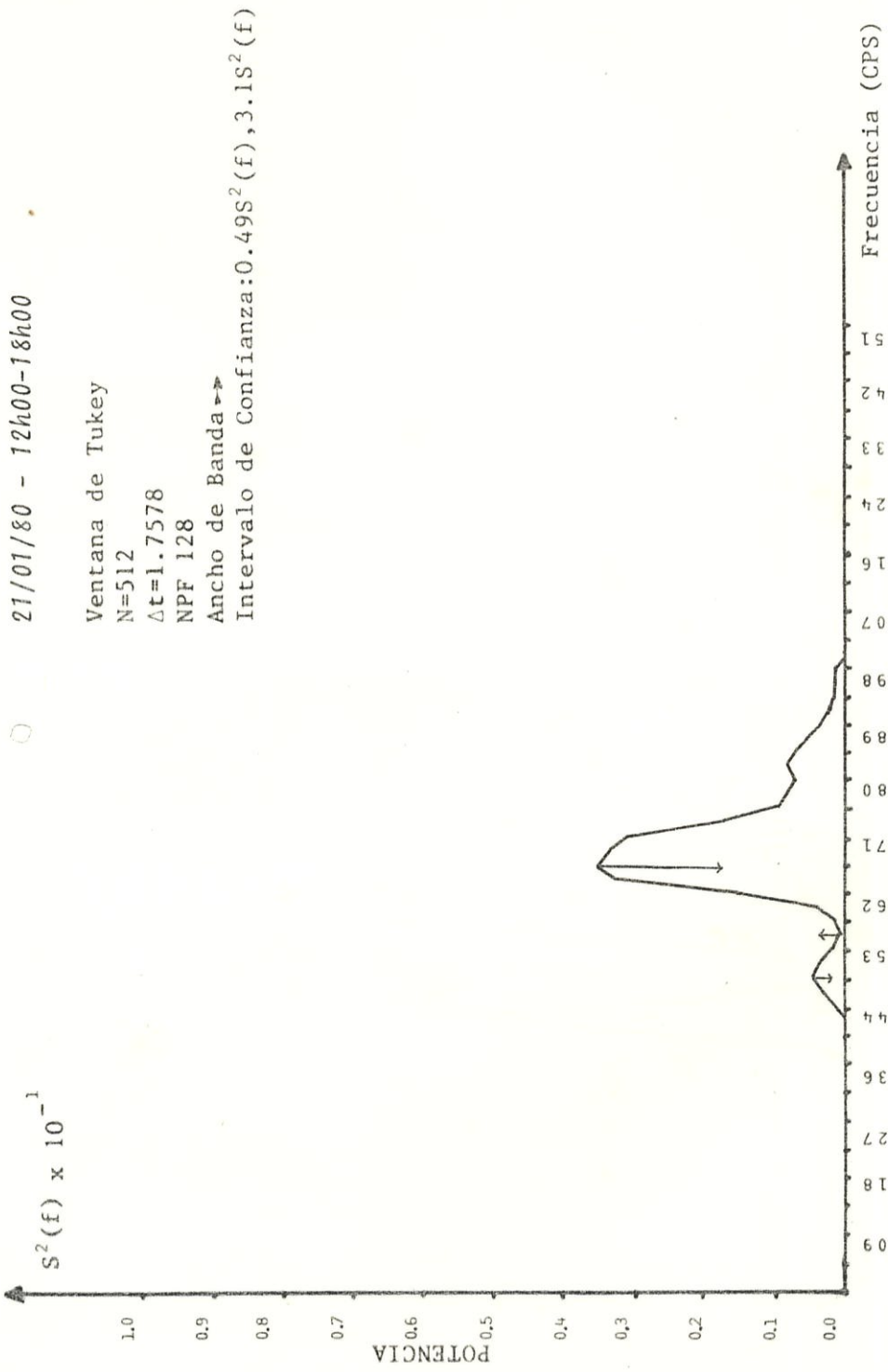


Fig. N.º 37 ESPECTRO DE POTENCIA DE LA SERIE DATO 8

24/01/80 - 00h00-06h00

Ventana de Tukey  
N=512  
 $\Delta t=1.7578$   
NPF 128  
Ancho de Banda  $\rightarrow$   
Intervalo de Confianza:  $0.49S^2(f), 3.1S^2(f)$

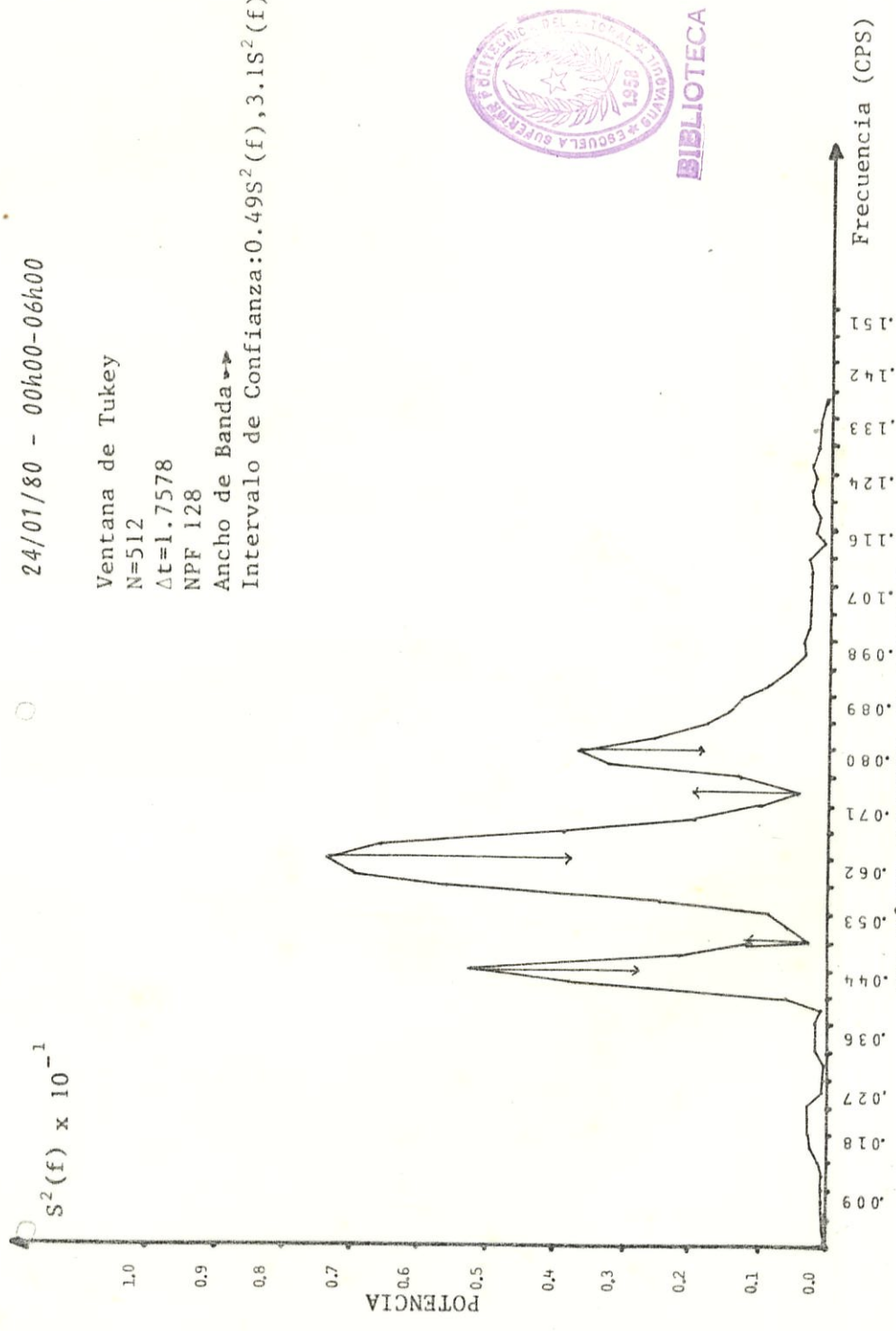


Fig. N° 38 ESPECTRO DE POTENCIA DE LA SERIE DATO 18





25/01/80 - 18h00-00h00

Ventana de Tukey

N=512

$\Delta t=1.7578$

NPF 128

Ancho de Banda  $\rightarrow$

Intervalo de Confianza:  $0.49S^2(f)$ ,  $3.1S^2(f)$

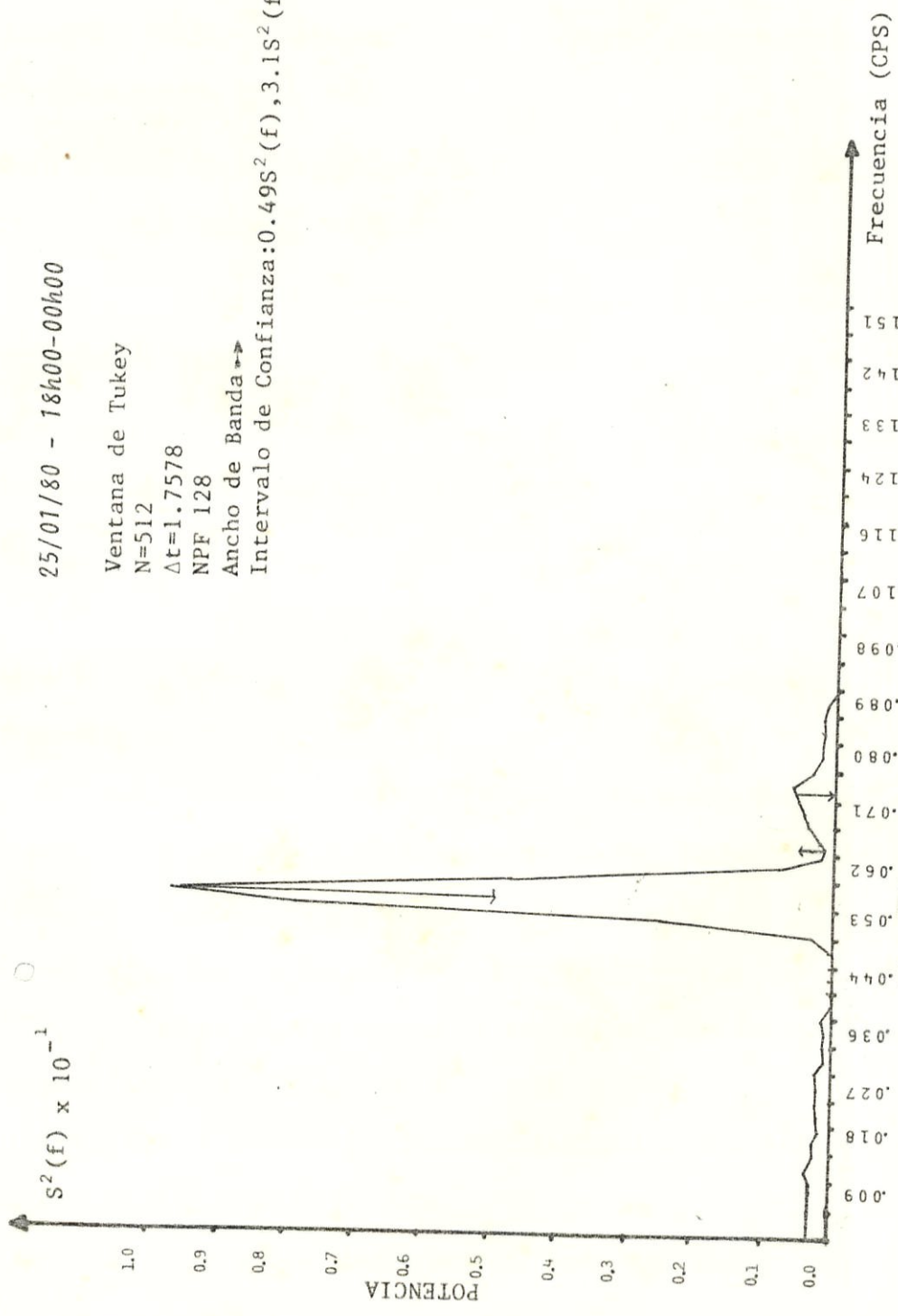


Fig. N° 39 ESPECTRO DE POTENCIA DE LA SERIE DATO 25

## B I B L I O G R A F I A

1. ARSAC J., *Fourier Transform and The Theory of distributions*, Practice Hall - Inc., 1966, Cap. 11.
2. BATH MARKUS, *Spectral Analysis in Geophysics*, Elsevier Scientific Publications Company, Amsterdam, 1974, Cap. 5 y 9.
3. BENDAT J. & PIBRSOL A., *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*, Wiley-Interscience, New York, 1971, Cap. 7 y 9.
4. BLACKMAN R. & TUKEY J., *The Measurement of Power Espectra*, Dover Publications Inc., New York, 1958, 190 p.
5. BRINGHAM E.O., *The Fast Fourier Transform*, Englewood Cliffs, Practice-Hall, New Jersey, 1974, 252 p.
6. CAVALBRI L., *Wave Measurement using pressure transducer*, Acta Oceanológico, Vol. 3, N°3, 1979.
7. FRANCO A.S., *Análise Espectral Continua e Discreta*, Instituto de Pesquisas Tecnológica de la Universidad de Sao Paulo, S.P., Brasil, 1982, Cap. 2. 6, 8, 9.
8. FRANCO A.S., *Sin título, sin publicar*, 1983, 40<sub>n</sub>.
9. HIDY, G., *The waves, the nature of sea motion*, Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1971, Cap. 9.
10. JENKINS, G.M. & WATTS D.G., *Spectral Analysis audits Applications*, Holden-Day Inc., 1968, 523 p.
11. KINSMAN B., *Wind waves*, Practice Hall Inc., New Jersey, Cap. 1,4,9.

12. Mc CRACKEN D., *Programación Fortran V*, Editorial Limusa, México, 1978, Cap. 2, 5, 7.
13. NEUMAN G. & PIERSON W., *Principles of Physical Oceanography* Practice-Hall, Inc., New Jersey, 1966, Cap. 15.
14. SORENSE R., *Basic Coastal Engineering*, Wiley - Interscience, 1978, Cap. 1, 3.
15. WIEGEL R.L., *Oceanographical Engineering*, Practice-Hall Inc., New Jersey, 1964, P. 238-247.



BIBLIOTECA