

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AÑO: 2022	PERIODO: PRIMER TERMINO
MATERIA: Álgebra Lineal	PROFESORES: Laveglia F, Martínez M, Ramírez J, Sánchez J, Valdiviezo J, Vielma J.
EVALUACIÓN: SEGUNDA	FECHA: 01/09/2022

1. Califique justificadamente el grado de verdad de las siguientes proposiciones (S=siempre verdadera, A=a veces verdadera, N=nunca verdadera)

a. (10 Puntos)

Sean A y B matrices cuadradas $n \times n$.

Si $\lambda = 0$ es un valor propio de AB, entonces A y B son invertibles.

b. (10 Puntos)

Sea $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un operador lineal con valores propios $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y correspondientes vectores propios v_1 y v_2 , entonces T es diagonalizable de manera ortogonal

2. (20 Puntos)

Considere el espacio vectorial $V = (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$, dotado del producto interno $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$.

a. Si $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + z = 0\}$, encuentre H^\perp .

b. Encuentre una base ortonormal para H^\perp .

c. Encuentre el vector de H^\perp más próximo a $v = (1, 2, 3)$.

3. (20 Puntos)

Sea $V = \text{Gen}\{\sin(x), x^2, x\}$. Sea $T: V \rightarrow V$ el operador lineal tal que:

$$T(\sin(x)) = x^2$$

$$T(x^2) = 2x^2$$

$$T(x) = \sin(x)$$

Determine:

a. El núcleo y la imagen de T , así como su nulidad y rango.

b. La matriz asociada a T en la base $B = \{\sin(x), x^2, x\}$

4. (20 Puntos)

Sea $A_{3 \times 3}$ diagonalizable, con polinomio característico $p(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)^2$.

Determine A^2 .

5. (20 Puntos)

Probar que toda matriz simétrica 2×2 es diagonalizable