**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS**
**CÁLCULO VECTORIAL**
**PAO1 2022**

# SOLUCIÓN y RÚBRICA - PRIMERA EVALUACIÓN

**Tema 1a:**

**Dada la superficie S: $2x^2+3y^2+z^2=20$, entonces el plano tangente a S en el punto (2,1,3) es paralelo a la recta: $l(t)=(-5+3t,2+2t,3-6t),t\in\mathbb{R}$.**

**Solución:**

El vector normal a S en el punto indicado es:

$$2x^2+3y^2+z^2-6=0$$
$$F(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-6$$
$$N=\nabla F=(4x,6y,2z)$$
$$N|_{(2,1,3)}=(8,6,6)$$

Para que el plano sea paralelo a la recta, el vector normal del plano debe ser perpendicular al vector director de la recta:

$$(8,6,6)\cdot(3,2,-6)=8(3)+6(2)-6(6)=0$$

La proposición es **VERDADERA**.

**Rúbrica:**

| **Capacidades deseadas** | **Desempeño** | | | |
|---|---|---|---|---|
| El estudiante sabe cómo emplear los conceptos aprendidos sobre planos tangentes a una superficie. | **Inicial** | **En desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelente** |
| | No sabe cómo determinar el plano tangente. | Sabe cómo determinar el plano tangente, pero no usa la información correctamente. | Sabe cómo encontra el planos tangente, usa la información pero comete errores al relacionar los vectores característicos. | Sabe cómo determinar el planos tangente, usa correctamente la información conseguida y justifica el valor de verdad de la proposición. |
| | **0** | **1-2** | **3-4** | **5** |

**Tema 1b:**

**Considere la función vectorial $\boldsymbol{r}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ , $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{t}) = (\boldsymbol{f_1}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{f_2}(\boldsymbol{t}), \dots, \boldsymbol{f_n}(\boldsymbol{t}))$.**
**El dominio de la función $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{t})$ es igual a la UNIÓN de los dominios de las funciones coordenadas componentes $\boldsymbol{f_i}(\boldsymbol{t})$; es decir:**

$$\boldsymbol{dom\ r} = \bigcup_{i=1}^{n} \boldsymbol{dom\ f_i}$$

**Solución:**

Si consideramos una función vectorial:

$$r(t) = (\sqrt{t}, t)$$

La primera función componente tiene como dominio: $t > 0$; mientras que la segunda función componente tiene como dominio $t \in \mathbb{R}$, la unión de ambos dominios es $t \in \mathbb{R}$.
Como el dominio de r(t) son los puntos donde todas las funciones componentes existan, la unión no es el dominio correcto pues la primera componente no admite valores menores que cero.

La proposición es **FALSA**.

**Rúbrica:**

| **Capacidades deseadas** | **Desempeño** | | | |
|---|---|---|---|---|
| El estudiante sabe analizar el dominio de funciones vectoriales. | **Inicial** | **En desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelente** |
| | No sabe cómo determinar el dominio de una función vectorial. | Sabe cómo determinar el dominio de una función vectorial, pero no utiliza un buen contraejemplo. | Sabe cómo determinar el dominio de una función vectorial, plantea un contraejemplo, pero concluye erróneamente el valor de verdad. | Sabe determinar el dominio de una función vectorial, muestra un contraejemplo adecuado y concluye el valor correctamente el valor de verdad de la proposición. |
| | **0** | **1-2** | **3-4** | **5** |

**Tema 1c:**

**El conjunto** $\boldsymbol{A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ 1 < x^2 + y^2 < 4\right\} \cup \{(0,0)\}}$ **tiene como conjunto de puntos frontera al conjunto** $\boldsymbol{Fr(A) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\ \wedge\ x^2 + y^2 = 4\right\}}$

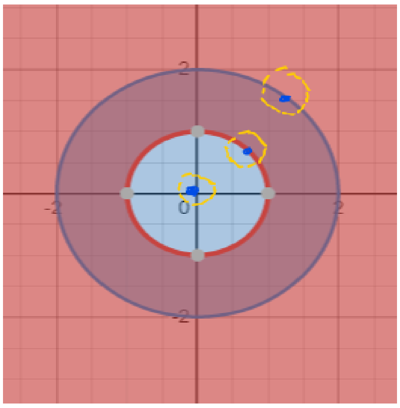
**Solución:**

El conjunto frontera de A es:

$$Fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 = x^2 + y^2 \wedge x^2 + y^2 = 4\} \cup \{(0,0)\}$$

Justificación:

- Los ecuaciones $1 = x^2 + y^2\ \wedge\ x^2 + y^2 = 4$ representan las circunferencias que constituyen los conjuntos de puntos que rodean a la región A.
- El punto (0,0) es punto frontera del conjunto A por pertenecer a él y ser un punto aislado.
- En el siguiente gráfico se puede observar que en cada uno de esos puntos y para cada bola con centro en ellos la bola intercepta al conjunto y a su conjunto complemento.




La proposición es **FALSA**.

**Rúbrica:**

| Capacidades deseadas | Desempeño | | | |
|---|---|---|---|---|
| El estudiante interpreta un conjunto de acuerdo con su representación en el plano y distingue elementos de topología, en este caso, su frontera. | **Inicial** | **En desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelente** |
| | No sabe definir conjunto frontera y por lo tanto no puede determinar valor de verdad. | Define o dibuja correctamente el conjunto frontera pero no expone argumentos de justificación del valor de verdad. | Define o dibuja correctamente el conjunto frontera pero no justifica completamente el valor de verdad. | Define o dibuja correctamente el conjunto frontera y justifica cabalmente el valor de verdad de la proposición. |
| | **0** | **1-2** | **3-4** | **5** |

**Tema 1d:**

**Dada la superficie $S$ en coordenadas esféricas $4-\rho\cos(\varphi)=\rho^2\,sen^2(\varphi)$, entonces el área de la región encerrada por su curva de nivel correspondiente a $k=2$ es igual a $4\pi\ u^2$.**

**Solución:**

Escribiremos la ecuación de la superficie en coordenadas rectangulares.

Note que:

- $\rho cos(\varphi)=z$
- $\rho sen(\varphi)=r \quad \Rightarrow\ \rho^2 sen^2(\varphi)=r^2 \Rightarrow\ \rho^2 sen^2(\varphi)=x^2+y^2$

Luego:

$$4-\rho cos(\varphi)=\rho^2 sen^2(\varphi)$$
$$4-z=x^2+y^2$$
$$z=4-x^2-y^2$$

Con la superficie escrita en coordenadas cartesianas, escribiremos la ecuación de la curva de nivel $k=2$:

$$2=4-x^2-y^2$$
$$x^2+y^2=2$$

Como la curva de nivel es una circunferencia centrada en el origen de radio $\sqrt{2}$, la región que encierra es un círculo de área $2\pi\ u^2$.

La proposición es **FALSA**.

**Rúbrica:**

| **Capacidades deseadas** | **Desempeño** | | | |
|---|---|---|---|---|
| El estudiante sabe cómo interpretar y hallar la ecuación de una curva de nivel de una superficie con ecuación en coordenadas esféricas. | **Inicial** | **En desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelente** |
| | No sabe cómo encontrar una curva de nivel de una superficie en coordenadas esféricas. | Sabe cómo escribir la ecuación de la superficie en coordenadas rectangulares, pero no cómo hallar la ecuación de una curva de nivel. | Sabe cómo escribir la ecuación de la superficie en coordenadas rectangulares, sabe hallar la ecuación de la curva de nivel pero no cómo interpretarla. | Sabe cómo escribir la ecuación de la superficie en coordenadas rectangulares, sabe hallar la ecuación de la curva de nivel e intepretarla para calcular el área que encierra y concluye correctamente. |
| | **0** | **1-2** | **3-4** | **5** |

**Tema 2a:**

**Considere la función** $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1-\cos(x^2+y)}{(x-\sqrt{-y})^2}, & x\neq\sqrt{-y}\\ a, & x=\sqrt{-y}\end{cases}$

a) **Determine si existe el valor real de $a$ para que la función $f(x,y)$ sea continua en el punto $(x_0,y_0)=(1,-1)$.**
b) **Estudie la diferenciabilidad de la función $f(x,y)$ en el punto (1,-1).**

**Solución:**

Calculemos $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)}\frac{1-cos(x^2+y)}{(x-\sqrt{-y})^2}$

Sabemos que, en la vecindad de 0, es válido $1-cos\,x\sim\frac{x^2}{2}$. Luego,

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)}\frac{1-cos(x^2+y)}{(x-\sqrt{-y})^2}=\lim_{(x,y)\to(1,-1)}\frac{(x^2+y)^2}{2(x-\sqrt{-y})^2}=\lim_{(x,y)\to(1,-1)}\frac{(x+\sqrt{-y})^2}{2}=2$$

Por lo tanto, existe $a=2=f(1,-1)$ que hace que la función sea continua en $(x_0,y_0)=(1,-1)$.

**Otra forma.**

Notemos que:

$$\frac{1-\cos(x^2+y)}{(x-\sqrt{-y})^2}=\frac{1-cos^2(x^2+y)}{(x-\sqrt{-y})^2\cdot(1+\cos(x^2+y))}=\frac{sen^2(x^2+y)}{(x^2+y)^2}\cdot\frac{(x^2+y)^2}{(x-\sqrt{-y})^2}\cdot\frac{1}{1+\cos(x^2+y)}$$

Como:

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)}\frac{sen^2(x^2+y)}{(x^2+y)^2}=\lim_{u\to0}\frac{sen^2(u)}{u^2}=1 \text{ y } \lim_{(x,y)\to(1,-1)}\frac{1}{1+\cos(x^2+y)}=\frac{1}{2},$$

Ahora calculemos

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)}\frac{(x^2+y)^2}{(x-\sqrt{-y})^2}=\lim_{(x,y)\to(1,-1)}\left[\frac{x^2+y}{x-\sqrt{-y}}\cdot\frac{x+\sqrt{-y}}{x+\sqrt{-y}}\right]^2$$
$$=\lim_{(x,y)\to(1,-1)}\left[\frac{(x^2+y)\cdot(x+\sqrt{-y})}{x^2+y}\right]^2=\lim_{(x,y)\to(1,-1)}\left[x+\sqrt{-y}\,\right]^2=4$$

Por lo tanto:

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)}\frac{1-\cos(x^2+y)}{(x-\sqrt{-y})^2}=\lim_{(x,y)\to(1,-1)}\frac{sen^2(x^2+y)}{(x^2+y)^2}\cdot\frac{(x^2+y)^2}{(x-\sqrt{-y})^2}\cdot\frac{1}{1+\cos(x^2+y)}=2$$

Para estudiar la diferenciabilidad calculemos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1)=\lim_{t\to0}\frac{f\big((1,-1)+t(1,0)\big)-f(1,-1)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{f(1+t,-1)-2}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\frac{1-\cos(1+2t+t^2-1)}{\left[(1+t)-\sqrt{-(-1)}\right]^2}-2}{t}=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos(2t+t^2)-2t^2}{t^3}=\lim_{t\to0}\frac{(2+2t)\cdot sen(2t+t^2)-4t}{3t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2\,sen(2t+t^2)+(2+2t)^2\cdot cos(2t+t^2)-4}{6\,t} \to \infty$$

La derivada parcial respecto a $x$ no existe por lo que podemos concluir que la función no es diferenciable en el punto $(1,-1)$.

**Rúbrica:**

| **Capacidades deseadas** | **Desempeño** | | | |
|---|---|---|---|---|
| El estudiante sabe cómo plantear el criterio de continuidad en un punto y estudiar la existencia o no del límite para concluir al respecto. Sabe calcular las derivadas parciales en un punto. Sabe utilizar los teoremas para concluir respecto a la diferenciabilidad de la función en un punto. | **Inicial** | **En desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelente** |
| | No sabe cómo plantear el criterio de continuidad, no calcula el límite, no calcula las derivadas parciales para concluir respecto a la diferenciabilidad de la función en el punto indicado. | No plantea el criterio de continuidad, pero muestra que el límite existe, concluyendo que la función es continua en dicho punto. | Plantea el criterio de continuidad, muestra que el límite existe, concluyendo que la función es continua en dicho punto. Calcula las derivadas parciales, pero no concluye respecto a la diferenciabilidad de la función. | Plantea el criterio de continuidad, muestra que el límite existe, concluyendo que la función es continua en dicho punto. Calcula las derivadas parciales y concluye que al no existir al menos una de ellas le permite concluir que la función no es diferenciabilidad en dicho punto. |
| | 0 | 1-8 | 9-15 | 16-20 |

**Tema 2b:**

**Dada la función:**

$$\boldsymbol{f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x^2y-y^3}{x^2+y^2} & ;(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;(x,y)=(0,0)\end{cases}}$$

a) **Determine si $f(x,y)$ es continua en (0,0).**
b) **Determine $\frac{\partial f}{\partial v}$ en el origen para toda dirección no nula dada por $v=\big(cos\,(t), sen\,(t)\big); t\in\mathbb{R}$.**
c) **Determine si $f(x,y)$ es diferenciable en (0,0).**
d) **Determine o justifique si $f(x,y)$ es clase $C^1$.**

**Solución:**

a) Se toma el límite usando el sistema de coordenadas polares:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{3x^2y-y^3}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{r^3(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta)}{r^2}=0$$
$$\therefore f\ si\ es\ continua\ en\ (0,0)$$

b) Se emplea la definición de derivada direccional:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f\big((0,0)+h(\cos t,\sin t)\big)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h\cos t,h\sin t)-0}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\dfrac{3h^3\cos^2t\sin t-h^3\sin^3t}{h^2}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}3\ \cos^2t\sin t-\sin^3t$$
$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=3\cos^2t\sin t-\sin^3t$$

c) Se consiguen las derivadas en el origen con la formula encontrada en b) pues la variable t representa la dirección en la cual se deriva.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)_{t=0}=3\cos^2t\sin t-\sin^3t\big|_{t=0}=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)_{t=\frac{\pi}{2}}=3\cos^2t\sin t-\sin^3t\big|_{t=\frac{\pi}{2}}=-1$$

Luego la diferenciabilidad:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{r(h_1,h_2)}{||(h_1,h_2)||}$$
$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f(h_1,h_2)-f(0,0)-Df(0,0)(h_1,h_2)^T}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$
$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{\dfrac{3h_1^2h_2-h_2^3}{h_1^2+h_2^2}-0-[0\quad -1]\begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{\dfrac{3h_1^2h_2-h_2^3}{h_1^2+h_2^2}+h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{4h_1^2 h_2}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{r\to 0} \frac{4r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^3} = 4\cos^2\theta\sin\theta$$

$$\therefore f\ no\ es\ diferenciable\ en\ (0,0)$$

d) Como f no es diferenciable en (0,0) entonces f no es de clase $C^1$ en el punto (0,0).

**Rúbrica:**

| **Capacidades deseadas** | **Desempeño** | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Inicial** | **En desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelente** |
| El estudiante sabe cómo determinar continuidad en un punto, anlaizar la existencia de derivadas direccionales, analizar difrenciabilidad de una función en un punto y emplear el teorema de la diferenciabilidad para concluir si una función es de clase $C^1$. | No sabe cómo plantear el criterio de continuidad, no calcula el límite, no calcula las derivadas parciales para concluir respecto a la diferenciabilidad de la función en el punto indicado. | Plantea el criterio de continuidad y muestra que el límite existe, concluyendo que la función es continua en dicho punto. Emplea la definición de derivada direccional y obtiene correctamente la derivada solicitada. | Determina la continuidad en el punto , calcula correctamente la derivada direccional solicitada, obtiene las derivadas parciales en el origen, aplica la expresión de diferenciabilidad, pero tiene problemas en su desarrollo o no concluye correctamente. | Determina la continuidad en el punto , calcula correctamente la derivada direccional solicitada, obtiene las derivadas parciales en el origen, aplica la expresión de diferenciabilidad concluyenco la no diferenciabilidad en el origen y aplica bien el teorema concluyendo que la función no es de Clase $C^1$. |
| | 0 | 1-10 | 11-16 | 17-20 |

**Tema 3a:**

**Dada la función** $\boldsymbol{z = \frac{1}{y}[f(ax+y) + g(ax-y)]}$**, demuestre que si** $\boldsymbol{z}$ **es de clase** $\boldsymbol{C^2}$ **se cumple que** $\boldsymbol{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2a^2}{y}\frac{\partial z}{\partial y} + a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}$

**Solución:**

Calculamos las derivadas parciales primera y segunda de f con respecto de $x$ :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}[f'(ax+y)a + g'(ax-y)a] = \frac{a}{y}f'(ax+y) + \frac{a}{y}g'(ax-y) \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{a^2}{y}f''(ax+y) + \frac{a^2}{y}g''(ax-y) \qquad \text{(II)}$$

Calculemos las derivadas parciales primera y segunda con respecto de $y$ :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{[f'(ax+y) - g'(ax-y)]y - [f(ax+y) + g(ax-y)]}{y^2}$$
$$= \frac{1}{y}f'(ax+y) - \frac{1}{y}\, g'(ax-y) - \frac{1}{y^2}f(ax+y) - \frac{1}{y^2}g(ax-y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{f''(ax+y)y - f'(ax+y)}{y^2} - \frac{[-g''(ax-y)y - g'(ax-y)]}{y^2}$$
$$-\frac{[f'(ax+y)y^2 - f(ax+y)2y]}{y^4} - \frac{[-g'(ax-y)y^2 - g(ax-y)2y]}{y^4}$$
$$= \frac{1}{y}f''(ax+y) + \frac{1}{y}g''(ax-y) - \frac{2}{y^2}f'(ax+y) + \frac{2}{y^2}g'(ax-y)$$
$$+\frac{2f(ax+y)}{y^3} + \frac{2g(ax-y)}{y^3} \qquad \text{(III)}$$

Sustituyendo (I) Y (III) en $\frac{2a^2}{y}\frac{\partial z}{\partial y} + a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, se tiene:

$$\frac{2a^2}{y}\frac{\partial z}{\partial y} + a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2a^2}{y}\left[\frac{1}{y}\, f'(ax+y) - \frac{1}{y}\, g'(ax-y) - \frac{1}{y^2}f(ax+y) - \frac{1}{y^2}g(ax-y)\right]$$
$$+a^2\left[\frac{1}{y}\, f''(ax+y) + \frac{1}{y}\, g''(ax-y) - \frac{2}{y^2}\, f'(ax+y) + \frac{2}{y^2}\, g'(ax-y) + \frac{2f(ax+y)}{y^3} + \frac{2g(ax-y)}{y^3}\right]$$
$$= \frac{a^2}{y}\, f''(ax+y) + \frac{a^2}{y}\, g''(ax-y)$$

De (II), se tiene $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2a^2}{y}\frac{\partial z}{\partial y} + a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

**Rúbrica:**

| **Capacidades deseadas** | **Desempeño** | | | |
|---|---|---|---|---|
| El estudiante debe estar en la capacidad de demostrar o resolver ecuaciones en derivadas parciales, utilizando regla de la cadena y técnicas de derivación | **Inicial** | **En desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelente** |
| | Aplica linealidad en la función, pero no calcula o calcula de forma incorrecta las derivadas parciales de primer y segundo orden. | Calcula correctamente las derivadas parciales de primer orden con respecto a x,y. Pero, no calcula o calcula de forma incorrecta las parciales segundas con respecto a x, y. | Calcula correctamente las derivadas parciales de primer y segundo orden con respecto de x, y, pero no logra demostrar la ecuación que se desea, por cometer algunos errores. | Calcula correctamente las derivadas parciales de primer y segundo orden con respecto de x, y, logra demostrar la ecuación que se desea demostrar. |
| | **0-1** | **2-8** | **0-16** | **17-20** |

**Tema 3b:**

***Sea*** $z = f(u, v)$***, donde*** $u = x - \frac{y}{2}$, $v = x + \frac{y}{2}$ ***. Demuestre que si*** $f$ ***es de clase*** $C^2$***,***
***entonces, se cumple que*** $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$

***Solución:***

$\frac{\partial u}{\partial x} = 1$,   $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2}$,   $\frac{\partial v}{\partial x} = 1$,   $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2}$

*Calculemos las derivadas parciales primera y segunda de $f$ con respecto de $x$*

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$

***Como $f$ es de clase*** *$C^2$, las derivadas iteradas o mixtas son iguales*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

$=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$

$=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 v}$

*Calculemos las derivadas parciales primera y segunda de $f$ con respecto de $y$*

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial v}$

***Como $f$ es de clase*** *$C^2$, las derivadas iteradas o mixtas son iguales*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

$=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$

$=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 v}\right)$

$=\frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 v}$

***Así,***

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 v} + 4\left(\frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 v}\right)$$
$$= 4\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$$

**Rúbrica:**

| **Capacidades deseadas** | **Desempeño** | | | |
|---|---|---|---|---|
| El estudiante debe estar en la capacidad de demostrar o resolver ecuaciones en derivadas parciales, utilizando regla de la cadena y técnicas de derivación. | **Inicial** | **En desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelente** |
| | No realiza el ejercicio o calcula de forma incorrecta las derivadas parciales de u,v con respecto a x,y. | Calcula correctamente las derivadas parciales de u,v con respecto a x,y, las derivadas parciales de f de primer orden con respecto a x,y. Pero no calcula o calcula de forma incorrecta las parciales segundas de f con respecto a x, y | Calcula correctamente las derivadas parciales de u,v con respecto a x,y, las derivadas parciales de f de primer orden con respecto a x,y. calcula de forma correcta las parciales segundas de f con respecto a x, y, pero no logra demostrar la ecuación que se desea, por cometer algunos errores. | Calcula correctamente las derivadas parciales de primer y segundo orden con respecto de x, y, logra demostrar la ecuación que se desea demostrar. |
| | **0-1** | **2-8** | **9-16** | **17-20** |

**Tema 4a:**

**Una inteligencia artificial (IA) está siendo entrenada para que cuando reciba un par $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \mathbb{R}^2$ prediga un valor $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$. Al valor que predice la IA le llamaremos $\boldsymbol{z}$ (al final del entrenamiento, $\boldsymbol{z}$ será muy próximo de $\boldsymbol{k}$). Entrenar una IA significa encontrar los parámetros $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^2$que hacen que el error de predicción $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ sea el menor posible. Inicialmente, la IA asume parámetros aleatorios $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$ generando una predicción errada $\boldsymbol{z_0}$, el resto del entrenamiento consiste en desplazar ese punto $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$ una y otra vez hasta que $\boldsymbol{E}$ sea muy pequeño. Si se conoce que:**

- $\boldsymbol{E(x,y) = \frac{1}{2}[z(x,y) - k]^2}$
- $\boldsymbol{z(x,y) = f(ax + by)}$
- $\boldsymbol{f(u) = \frac{1}{1+e^{-u}}}$

**a) Si $\boldsymbol{z = f(u)}$. Demuestre que $\boldsymbol{\frac{dz}{du} = z(1 - z)}$.**
**b) Demuestre que la dirección inicial en que se debe desplazar el punto $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$ para que $\boldsymbol{E(x,y)}$ disminuya lo más rápido posible es el vector:**

$$\boldsymbol{v = \big(-az_0(z_0 - k)(1 - z_0), -bz_0(z_0 - k)(1 - z_0)\big)}$$

**Solución:**

a) Note que $z = f(u) = \frac{1}{1+e^{-u}}$, entonces:

$$\frac{dz}{du} = \frac{e^{-u}}{(1+e^{-u})^2} = \left(\frac{1}{1+e^{-u}}\right)\left(\frac{e^{-u}}{1+e^{-u}}\right) = \left(\frac{1}{1+e^{-u}}\right)\left(\frac{1+e^{-u}-1}{1+e^{-u}}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{1+e^{-u}}\right)\left(\frac{1+e^{-u}}{1+e^{-u}} - \frac{1}{1+e^{-u}}\right) = z(1-z)$$

b) Sabemos que el vector que nos ayudará a reducir el error más rápido es:

$$v = -\nabla E = \left(-\frac{\partial E}{\partial x}, -\frac{\partial E}{\partial y}\right) \; ; (x,y) = (x_0, y_0)$$

Entonces, encontraremos las derivadas parciales de $E$ usando regla de la cadena, para lo cual haremos el cambio de variable $u = ax + by$, y usaremos el resultado demostrado en el literal a), de modo que:

- $\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial z}\frac{\partial z}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial E}{\partial z}\frac{\partial z}{\mathrm{du}}\frac{\partial u}{\mathrm{d}x} = (z-k)(z)(1-z)(a) = az(z-k)(1-z)$
- $\frac{\partial E}{\partial y} = \frac{\partial E}{\partial z}\frac{\partial z}{\mathrm{d}y} = \frac{\partial E}{\partial z}\frac{\partial z}{\mathrm{du}}\frac{\partial u}{\mathrm{d}y} = (z-k)(z)(1-z)(b) = bz(z-k)(1-z)$

Recordemos que cuando $(x,y) = (x_0, y_0)$, se tiene $z = z_0$. Luego, sustituyendo:

$$v = \big(-az_0(z_0 - k)(1 - z_0), -bz_0(z_0 - k)(1 - z_0)\big)$$

**Rúbrica a):**

| **Capacidades deseadas** | **Desempeño** | | | |
|---|---|---|---|---|
| El estudiante sabe cómo derivar la función en cuestión y sabe cómo manipular correctamente las expresiones algebráicas para demostrar lo deseado. | **Inicial** | **En desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelente** |
| | El estudiante no sabe cómo derivar la función en cuestión. | El estudiante sabe cómo derivar, pero comete errores algebraicos y obtiene una derivada errada. | El estudiante sabe cómo derivar la expresión dada sin errores, pero no consigue demostrar lo que se solicita en el enunciado. | El estudiante sabe cómo derivar la expresión dada sin errores y consigue demostrar exitosamente lo que se solicita en el enunciado. |
| | **0** | **1-2** | **3-4** | **5** |

**Rúbrica b):**

| **Capacidades deseadas** | **Desempeño** | | | |
|---|---|---|---|---|
| El estudiante sabe interpretar el problema, plantea que necesita el gradiente y lo calcula exitosamente usando regla de la cadena. | **Inicial** | **En desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelente** |
| | El estudiante no sabe cómo interpretar el problema y realiza cálculos no relacionados a lo que se solicita. | El estudiante sabe cómo interpretar el problema, indica que necesita el gradiente, e intenta calcularlo sin éxito. | El estudiante sabe cómo interpretar el problema, calcula el gradiente, pero tiene pocos errores algebraicos y no concluye. | El estudiante sabe cómo interpretar el problema, calcula el gradiente de forma correcta, y concluye exitosamente. |
| | **0** | **1-5** | **6-10** | **11-15** |

**Tema 4b:**

**Abigaíl escala una montaña modelada por la función $f(x,y) = 1200 - \frac{3}{2}x^2 - 2y^2$ (con $x, y, f(x,y)$ en metros). En cierto momento, se encuentra tomando un descanso en un punto donde $(x,y) = (10,10)$. Abigaíl ya está muy cansada, pero decide avanzar en la dirección donde pueda acercarse más a la cima dando su último esfuerzo de modo que consigue avanzar 10 metros (en el plano $XY$) para romper su propio récord. Como señal de que ha conseguido superarse, coloca una bandera de forma perpendicular a la superficie en el punto donde se detuvo. Determine:**

a) **En qué dirección se desplazó Abigaíl cuando decidió moverse del punto? $(10,10)$.**
b) **Cuál es la nueva altura record a la que llegó Abigaíl en su aventura?**
c) **En qué dirección unitaria apunta el asta de la bandera?**

**Solución:**

**a)** La dirección donde se puede avanzar más rápido a la cima, es la dirección de máximo crecimiento de $f$, y esta está dada por el gradiente en el punto (10,10):

$$\nabla f(10,10) = \left(f_x(10,10), f_y(10,10)\right) = (-3x, -4y)_{|(x,y)=(10,10)} = (-30,-40).$$

**b)** Abigaíl se desplazó en la dirección del vector unitario:

$$\frac{\nabla f(10,10)}{||\nabla f(10,10)||} = \frac{(-30,-40)}{\sqrt{(-30)^2+(-40)^2}} = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

El punto en final al que llegó avanzando 10 metros en dicha dirección (en el dominio de $f$) es:

$$\left(x_f, y_f\right) = (10,10) + 10\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = (4,2)$$

Luego, la altura record que alcanza es:

$$h_{record} = f\left(x_f, y_f\right) = 1200 - \frac{3}{2}(4)^2 - 2(2)^2 = 1168 \text{ metros}$$

**c)** La dirección unitaria en la que apunta el asta de la bandera es el vector normal unitario de $f$ en el punto (4,2):

$$v = \frac{\left(f_x(4,2), f_y(4,2), -1\right)}{\sqrt{(f_x(4,2))^2 + \left(f_x(4,2)\right)^2 + (-1)^2}} = \frac{(-3(4), -4(2), -1)}{\sqrt{(-12)^2+(-8)^2+(-1)^2}} = \left(-\frac{12}{\sqrt{209}}, -\frac{8}{\sqrt{209}}, -\frac{1}{\sqrt{209}}\right)$$

**Rúbrica a):**

| Capacidades deseadas | Desempeño | | | |
|---|---|---|---|---|
| El estudiante sabe cómo interpretar que necesita el gradiente de $f$ en el punto $(10, 10)$, y lo calcula de forma exitosa. | **Inicial** | **En desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelente** |
| | El estudiante no sabe cómo interpretar el problema y no realiza cálculos coherentes. | El estudiante sabe cómo interpretar el problema, pero no calcula el gradiente. | El estudiante sabe cómo interpretar el problema, pero comete errores aritméticos o algebraicos al calcular el gradiente. | El estudiante sabe cómo interpretar el problema, calcula el gradiente y evalúa en el punto exitosamente. |
| | **0** | **1-2** | **3-4** | **5** |

**Rúbrica b):**

| Capacidades deseadas | Desempeño | | | |
|---|---|---|---|---|
| El estudiante sabe cómo interpretar que requiere desplazar 10 metros el punto (10,10) en dirección del gradiente usando su unitario. | **Inicial** | **En desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelente** |
| | El estudiante no sabe cómo interpretar el problema y no realiza cálculos coherentes. | El estudiante sabe cómo interpretar el problema, calcula el punto desplazado en el dominio de f, pero no concluye y comete errores. | El estudiante sabe cómo interpretar el problema, calcula exitosamente el punto nuevo haciendo el desplazamiento, pero no calcula correctamente la altura. | El estudiante sabe cómo interpretar el problema, calcula exitosamente el punto nuevo en el dominio de f, evalúa en la función y concluye correctamente. |
| | **0** | **1-4** | **5-7** | **8-10** |

**Rúbrica c):**

| Capacidades deseadas | Desempeño | | | |
|---|---|---|---|---|
| El estudiante sabe interpretar el problema, plantea que necesita el vector normal unitario y lo calcula bien. | **Inicial** | **En desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelente** |
| | El estudiante no sabe cómo interpretar el problema y no realiza cálculos coherentes. | El estudiante sabe cómo interpretar el problema, pero realiza mal todos los cálculos. | El estudiante sabe cómo interpretar el problema, pero comete errores aritméticos pequeños | El estudiante sabe cómo interpretar el problema y calcula exitosamente el vector normal unitario. |
| | **0** | **1-2** | **3-4** | **5** |

**Tema 5a:**

**Dada una hélice representada por la función vectorial** $\mathbf{r}(t)=\langle 2\cos t, 2\operatorname{sen} t, t\rangle$

a) **Determine las ecuaciones de los planos osculador y rectificante (o rectificador) para** $t=\frac{\pi}{2}$
b) **Determine el valor de la curvatura para** $t=0$

**Solución:**

**a)** $r\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(0,2,\frac{\pi}{2}\right)$

$r'(t)=\langle -2\,sen\,t\,,2\,cos\,t\,,1\rangle$

$$\|r'(t)\|=\sqrt{4sen^2t+4cos^2t+1}=\sqrt{5}$$

$T(t)=\frac{r\prime(t)}{\|r\prime(t)\|}=\frac{\langle -2\,sen\,t,2\,cos\,t,1\rangle}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\langle -2\,sen\,t\,,2\,cos\,t\,,1\rangle$

$T'(t)=\frac{1}{\sqrt{5}}\langle -2\,cos\,t\,,-2\,sen\,t\,,0\rangle$

$$\|T'\|=\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{4\cos^2 t+4\operatorname{sen}^2 t+0^2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$\boldsymbol{N}(t)=\frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}=\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\langle -2\,cos\,t,-2\,sen\,t,0\rangle}{2/\sqrt{5}}=\langle -\,cos\,t\,,-\,sen\,t\,,0\rangle$

$$\boldsymbol{B}(t)=\boldsymbol{T}(t)\times\boldsymbol{N}(t)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}}sen\,t & \frac{2}{\sqrt{5}}cos\,t & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ -\,cos\,t & -\,sen\,t & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\langle sen\,t\,,-\,cos\,t\,,2\rangle$$

**Plano osculador**:

Con $\boldsymbol{B}(\pi/2)=\frac{1}{\sqrt{5}}\langle 1,0,2\rangle$ como vector directriz:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\langle 1,0,2\rangle\cdot[(x,y,z)-(0,2,\pi/2)]=0\Rightarrow \boldsymbol{x+2z-\pi=0}$$

**Plano rectificador:**

Con $\boldsymbol{N}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\langle 0,-1,0\rangle$ como vector directriz:

$$\langle 0,-1,0\rangle\cdot[(x,y,z)-(0,2,\pi/2)]=0\Rightarrow \boldsymbol{y-2=0}$$

**b) La curvatura** en $t = 0$

$r'(t) = \langle -2\, sen\, t\, , 2\, cos\, t\, , 1 \rangle$

$r''(t) = \langle -2\, cos\, t\, , -2\, sen\, t\, , 0 \rangle$

$$r'(0) \times r''(0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \langle 0, -2, 4 \rangle$$

$$\kappa(0) = \frac{\|r'(0) \times r''(0)\|}{\|\boldsymbol{r}'(0)\|^3} = \frac{\|\langle 0, -2, 4 \rangle\|}{(5)^{3/2}} = \frac{\sqrt{20}}{5\sqrt{(5)}} = \frac{2}{5}$$

**Rúbrica:**

| **Capacidades deseadas** | **Desempeño** | | | |
|---|---|---|---|---|
| El estudiante es capaz de calcular las ecuaciones de los planos osculador y Rectificante y calcular su curvatura. | **Inicial** | **En desarrollo** | **Desarrollado** | **Excelente** |
| | No puede aplicar correctamente los conceptos asociados a la derivada requeridos. | Determina los vectores velocidad y su módulo, con estos obtiene el vector T, luego su derivada y el vector N, para finalmente obtener el vector Binormal, pero no determina las ecuaciones de los planos solicitados. | Con todos los cálculos requeridos determina las ecuaciones de los planos osculador y rectificante pero no determina correctamente el valor de la curvatura solicitada para t=0. | Determina correctamente las ecuaciones de los planos osculador y rectificante y el valor de curvatura solicitado o comete errores no significativos en el proceso. |
| | **0-3** | **4-10** | **11-16** | **17-20** |

**Tema 5b:**

**Considere las superficies:**

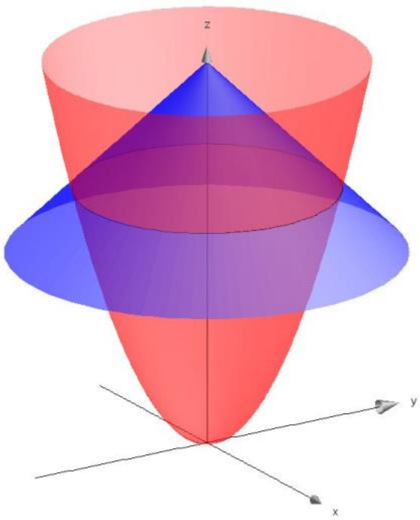
$$\boldsymbol{S_1: z = 6 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad S_2: z = x^2 + y^2}$$

**a) Realice un bosquejo de $S_1$ junto a $S_2$ en el espacio, denotando la curva de intersección.**
**b) Determine una parametrización, en orientación positiva, para la curva de intersección entre las superficies en términos de t.**
**c) Determine los vectores T, N y B para esta trayectoria.**
**d) Determine la de longitud de arco total de la curva.**

**Solución:**

a) La superficie $S_1$ es la parte superior de un cono, mientras que $S_2$ es un paraboloide.

Un bosquejo podría ser:




b) Se interceptan las superficies reemplazando todo en términos de las variables x y para lidiar con la proyección de la curva de intersección sobre el plano XY.

$$\begin{cases} z = 6 - \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad z = 6 - \sqrt{z}$$

$$\left(\sqrt{z}\right)^2 = (6 - z)^2$$

$$z^2 - 13z + 36 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad z = 4 \quad ; \quad z = 9$$

Según la figura, el vértice del cono se da en z= 6, así que la solución válida es z=4.

Entonces tanto en $S_1$ o en $S_2$ se puede conseguir:

$$x^2 + y^2 = 4$$

Por lo que x y se pueden parametrizar como una circunferencia de radio 2 y centro en el origen:

$$C(t) = \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = 4 \end{cases} \quad ; \quad t \in [0,2\pi]$$

c) El vector tangente unitario:

$$\boldsymbol{T}(t) = \frac{\vec{C}'(t)}{\left|\left|\vec{C}'(t)\right|\right|}$$

$$\vec{C}'(t) = [-2\sin t\,, 2\cos t\,, 0] \quad ; \quad \left|\left|\vec{C}'(t)\right|\right| = 2$$

$$\boldsymbol{T}(t) = \frac{[-2\sin t\,, 2\cos t\,, 0]}{2} = [-\sin t\,, \cos t\,, 0]$$

El vector normal unitario:

$$\boldsymbol{N}(t) = \frac{\boldsymbol{T}'(t)}{\left|\left|\boldsymbol{T}'(t)\right|\right|}$$

$$\boldsymbol{T}'(t) = [-\cos t\,, -\sin t\,, 0] \quad ; \quad \left|\left|\boldsymbol{T}'(t)\right|\right| = 1$$

$$\boldsymbol{N}(t) = \frac{[-\cos t\,, -\sin t\,, 0]}{1} = [-\cos t\,, -\sin t\,, 0]$$

El vector Binormal es:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\imath}} & \hat{\boldsymbol{\jmath}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = [0 \quad 0 \quad 1]$$

d) la longitud de arco a lo largo de toda la curva:

$$S(t) = \int_0^{2\pi} \left|\left|C'(t)\right|\right| dt = \int_0^{2\pi} 2\,dt = 4\pi$$

**Rúbrica:**

| **Capacidades deseadas** | **Desempeño** | | | |
|---|---|---|---|---|
| | No puede bosquejar las superficies dadas ni aplicar correctamente los conceptos asociados a la derivada requeridos | Bosqueja las superficies dadas y su curva intersección; realiza correctamente el proceso de parametrización de la trayectoria. | Bosqueja las superficies dadas y su curva intersección; realiza correctamente el proceso de parametrización de la trayectoria. Obtiene el vector T, el vector N, para finalmente obtener el vector Binormal. | Bosqueja las superficies dadas y su curva intersección; realiza correctamente el proceso de parametrización de la trayectoria. Obtiene el vector T, el vector N, para finalmente obtener el vector Binormal. Calcula correctamente la longitud de la trayectoria. |
| | **0-3** | **4-10** | **11-16** | **17-20** |