



ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL
Facultad de Ingeniería Marítima y Ciencias del Mar

**IMPLEMENTACIÓN DE UNA SOLUCIÓN DEL FLUJO LAMINAR
VISCOSO BIDIMENSIONAL CON INFLUENCIA DE SUPERFICIE
LIBRE APLICANDO EL METODO DE HINO**

TESIS DE GRADO

Previa a la obtención del Título de:

INGENIERO NAVAL

Presentado por:

Rubén José Paredes Alvarado

Guayaquil - Ecuador

2006

DEDICATORIA

A mis PADRES, por su confianza y constante apoyo para la culminación de mis estudios.

AGRADECIMIENTO

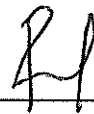
A DIOS, por haberme proporcionado toda la fuerza y paciencia necesaria para la realización de esta Tesis.

Al Ph.D. José Rolando Marín L., por su valiosa colaboración para el desarrollo de este trabajo.

DECLARACIÓN EXPRESA

"La responsabilidad del contenido de esta Tesis de Grado, me corresponde exclusivamente; y el patrimonio intelectual de la misma a la Escuela Superior Politécnica del Litoral".

(Reglamento de Exámenes y Títulos profesionales de la ESPOL)



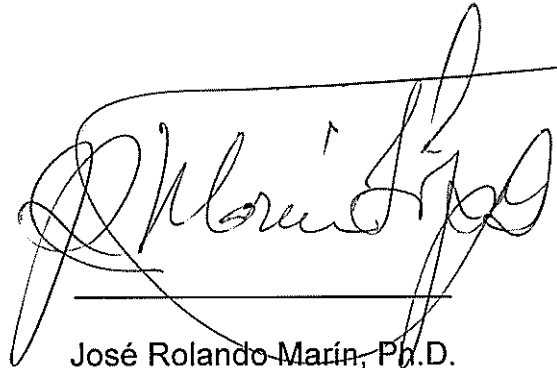
Rubén Paredes Alvarado

TRIBUNAL DE GRADO



Ing. Bolívar Vaca R.

Presidente del Tribunal



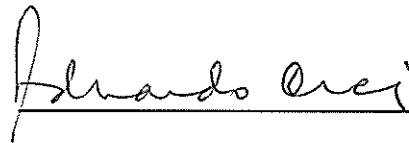
José Rolando Marín, Ph.D.

Director de Tesis



Ing. Marco Velarde T.

Miembro Principal



Ing. Eduardo Orcés P.

Miembro Principal

RESUMEN

En el presente trabajo se describe la implementación de un método para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes usando una malla no estructurada para simular flujo laminar viscoso e incompresible con influencia de superficie libre, desarrollado por Hino, [7] y [8]. El método emplea el artificio de compresibilidad artificial desarrollada por Chorin, [5].

La discretización espacial se desarrolla aplicando el método de Volúmenes Finitos con un esquema de celda centrada. Los términos de convección y viscosos son evaluados con diferencias centradas. La integración en tiempo se desarrolla con esquema explícito. La condición de frontera de la superficie libre es implementada con un esquema que regenera el contorno de dicha superficie, que resulta de la satisfacción de las ecuaciones de equilibrio dentro del dominio. El procedimiento numérico se lo aplica al flujo dentro de un ducto 2D de sección constante y luego a uno que incluye expansión.

Finalmente se lo aplica al caso del flujo sobre un cuerpo sumergido con influencia de la superficie libre. Además, se analiza el efecto del refinamiento de la malla y el tamaño del paso del tiempo en la razón de convergencia del proceso implementado.

INDICE GENERAL

	Pág.
RESUMEN.....	I
ÍNDICE GENERAL.....	II
ÍNDICE DE TABLAS.....	IV
ÍNDICE DE FIGURAS.....	V
INTRODUCCIÓN.....	1
CAPÍTULO 1	
CONCEPTOS BÁSICOS SOBRE MOVIMIENTO DE FLUIDOS	
VISCOSOS	
1.1 Descripción de las Ecuaciones Gobernantes.....	3
1.2 Descripción de las Condiciones de Frontera.....	8
1.3 Generación Elíptica de la malla.....	14
CAPÍTULO 2	
MÉTODOS PARA LA DISCRETIZACIÓN DE ECUACIONES	
GOBERNANTES	
2.1 Descripción del Método de Volúmenes Finitos.....	22
2.2 Descripción del Método de Compresibilidad Artificial.....	27
2.3 Integración en tiempo.....	34

**CAPÍTULO 3
DESCRIPCIÓN DEL METODO DE HINO**

3.1 Discretización de las Ecuaciones Gobernantes.....	42
3.2 Cálculo de los Flujos Viscoso y No Viscoso.....	45
3.3 Discretización de las Condiciones de Frontera.....	55
3.4 Distorsión de la malla por efecto de la superficie libre.....	61

**CAPÍTULO 4
APLICACIONES**

4.1 Ducto de Sección Constante.....	69
4.2 Ducto con Expansión.....	90
4.3 Solución ideal analítica para flujo sobre cuerpo sumergido bidimensional.....	111
4.4 Flujo viscoso laminar sobre un cuerpo sumergido con superficie libre.....	119
CONCLUSIONES.....	131
RECOMENDACIONES.....	135
APÉNDICES.....	137
BIBLIOGRAFÍA.....	152

INDICE DE TABLAS

No.		Pág.
I.-	Longitud de transición vs. Número de Reynolds.....	83

ÍNDICE DE FIGURAS

No.	Pág.
1. Superficie Libre.....	11
2. Condición de Simetría.....	12
3. Condiciones de Frontera Computacionales.....	13
4. Generación de malla tradicional.....	14
5. Generación Elíptica de la malla.....	15
6. Transformación del plano real al computacional.....	16
7. Volumen de control para la celda triangular i mostrando el punto de evaluación de las funciones.....	24
8. Influencia de β en la convergencia para flujo en ducto de sección constante.....	33
9. Influencia del número CFL en la convergencia para flujo en ducto de sección constante.....	37
10. Longitud Característica de la celda triangular i según Maciel [10]..	38
11. Proceso de discretización desarrollado por Hino, [7].....	40
12. Volumen de Control para el borde $(j, j+1)$	50
13. Promediación de las variables en los nodos en función de los valores almacenados en los centroides de las celdas.....	51
14. Ubicación de las celdas "adicionales".....	55
15. Ubicación del centroide de una celda "adicional".....	56

16.	Implementación de la condición de no deslizamiento.....	57
17.	Implementación de la condición de simetría.....	60
18.	Volumen de control para la condición cinemática de una superficie libre.....	61
19.	Proceso de discretización desarrollado por Hino con actualización de la superficie libre.....	65
20.	Zona de entrada de una tubería.....	69
21.	Alternativas empleadas en la discretización del dominio físico.....	71
22.	Historia de Convergencia de ambos casos.....	72
23.	Variación de presión de casos I y II.....	73
24.	Variación de presión y velocidad.....	74
25.	Alternativas empleadas en el proceso de adimensionalización.....	75
26.	Contorno de velocidades.....	76
27.	Malla utilizada para simular un ducto de longitud igual a 100 veces el diámetro.....	77
28.	Convergencia para diferentes números de Reynolds.....	78
29.	Contorno de velocidad para diferentes números de Reynolds.....	82
30.	Formulación de Langhaar vs. Aprox. num.....	84
31.	Caudal promedio adimensional vs. Número de Reynolds.....	86
32.	Distribución de presión en un ducto de sección constante.....	90
33.	Tubería difusora.....	91
34.	Alternativas empleadas en el análisis de una expansión 1:3.....	92
35.	Historia de Convergencia de la expansión I con varios números de Reynolds.....	93

36. Historia de Convergencia de la expansión II con varios números de Reynolds.....	94
37. Contorno de velocidades de la expansión I con diferente número de Reynolds.....	97
38. Contorno de velocidades de la expansión II con diferente número de Reynolds.....	100
39. Variación del Caudal en función de la posición x, Expansión I.....	102
40. Variación del Caudal en función de la posición x, Expansión II...	103
41. Caudal promedio vs. Numero de Reynolds para un ducto con expansión 1:3.....	104
42. Distribución de presión en la expansión I con diferente números de Reynolds.....	107
43. Distribución de presión en la expansión II con diferente números de Reynolds.....	110
44. Descripción del problema. Fuente: Fox, [6], pagina 552.....	111
45. Efecto de los cambios de la elevación de la plantilla en la profundidad del agua en el flujo en canal abierto. Fuente: Fox, [6], página 553.....	114
46. Datos del ejemplo 10.2. Fuente: Fox, [6], página 553.....	115
47. Diagrama de energía específica. Fuente: Fox, [6], página 554..	118
48. Malla utilizada para analizar el flujo sobre un cuerpo sumergido de 0.1 de altura.....	120
49. Malla utilizada para analizar el flujo sobre un cuerpo sumergido de 0.2 de altura.....	120
50. Contorno de Presiones para el cuerpo de 0.1 de altura luego de la primera iteración.....	121

51. Contorno de Presiones para el cuerpo de 0.2 de altura luego de la primera iteración.....	122
52. Caudal vs. X en la primera iteración del cuerpo sumergido con una altura de 0.1.....	123
53. Caudal vs. X en la primera iteración del cuerpo sumergido con una altura de 0.2.....	123
54. Evolución de la Superficie Libre en varias iteraciones en el caso del cuerpo con una altura de 0.1.....	125
55. Evolución de la Superficie Libre en varias iteraciones en el caso del cuerpo con una altura de 0.2.....	126
56. Contorno de presiones luego de la última iteración, cuerpo I.....	127
57. Contorno de presiones luego de la última iteración, cuerpo II.....	128
58. Variación de presión sobre el fondo en la dirección x.....	129
59. Variación de la superficie libre.....	130

CAPÍTULO 1

CONCEPTOS BÁSICOS SOBRE MOVIMIENTO DE FLUIDOS VISCOSOS

En este capítulo se revisarán las ecuaciones gobernantes del movimiento de fluidos y el proceso de adimensionalización de las mismas. Se describirán también las condiciones de fronteras físicas y computacionales presentes en el problema de flujo laminar viscoso bidimensional con influencia de la superficie libre.

1.1 Descripción de las Ecuaciones Gobernantes

Las ecuaciones gobernantes son las ecuaciones de Navier-Stokes, las cuales reciben su nombre de Claude-Louis Navier y George Gabriel Stokes. Se trata de un conjunto de ecuaciones no lineales en derivadas parciales que aplican el principio de conservación del Momentum en un fluido. Estas ecuaciones gobiernan la dinámica de la atmósfera terrestre,

las corrientes oceánicas y el flujo alrededor de vehículos o proyectiles y, en general, cualquier fenómeno en todo tipo de fluidos; este sistema de ecuaciones es de extrema dificultad matemática. Dado que en el plano bidimensional se tienen tres variables, las componentes de la velocidad y la presión, las ecuaciones de Navier-Stokes se resuelven acopladas con la Ecuación de Continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + F_x \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + F_y \quad (3)$$

Donde:

(x, y) son las coordenadas horizontal, y vertical (positivo hacia arriba),

(u, v) son las componentes de la velocidad,

p es la presión con componente hidrostático,

(F_x, F_y) son los componentes de las fuerzas de cuerpo, por unidad de masa,

ν es la viscosidad cinemática, y,

ρ es la densidad del fluido.

Existen varias formas de escribir de manera adimensional el sistema de ecuaciones (1)-(3), pero en este trabajo se utilizarán las siguientes relaciones que fueron propuestas por Chorin [5], donde D es una longitud de referencia, U , es la velocidad en flujo uniforme, y, ρ es la densidad del fluido:

$$u' = \frac{u}{U}, \quad v' = \frac{v}{U}, \quad x' = \frac{x}{D}, \quad y' = \frac{y}{D}, \quad t' = \left(\frac{v}{D^2}\right)t, \quad p' = \left(\frac{D}{\rho v U}\right)p,$$

$$F'_x = \left(\frac{vU}{D^2}\right)F_x, \quad F'_y = \left(\frac{vU}{D^2}\right)F_y \quad (4)$$

Reemplazando estas igualdades en el sistema de ecuaciones (1)-(3) y eliminando los primas, para ahorrar tiempo de escritura, se obtienen las ecuaciones de Continuidad y de Navier-Stokes en forma adimensional:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\text{Fn}^2} \quad (7)$$

Donde F_n es el número de Froude, definido usando la constante gravitacional, g , y , Re es el número de Reynolds, con ν como la viscosidad cinemática:

$$F_n = \frac{U}{\sqrt{gD}}, \quad Re = \frac{UL}{\nu} \quad (8)$$

De acuerdo con Hino, [7], se usará el siguiente artificio matemático, en el que se llamará p^* a la presión sin la componente hidrostática; además, los términos viscosos pueden ser escritos de una manera diferente, como se muestra a continuación:

$$p^* = p + \frac{\gamma}{F_n^2} \quad (9)$$

$$\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (10)$$

$$\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}, \quad (11)$$

donde según Newman, [13], τ_{ij} es el esfuerzo cortante que actúa en la dirección j en un plano perpendicular al eje i , y por ser el agua un fluido newtoniano se tiene:

$$\tau_{xx} = \frac{1}{\text{Re}} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (12)$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (13)$$

$$\tau_{yy} = \frac{1}{\text{Re}} \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (14)$$

Combinando las ecuaciones (9)-(11) con las ecuaciones Gobernantes, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = -\frac{\partial p^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} = -\frac{\partial p^*}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \quad (16)$$

Finalmente, al agrupar los términos no viscosos y viscosos, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (u^2 + p^* - \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (uv - \tau_{xy})}{\partial y} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv - \tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v^2 + p^* - \tau_{yy})}{\partial y} = 0 \quad (18)$$

En las ecuaciones del Momentum del sistema de ecuaciones anterior, se pueden diferenciar claramente tres términos, dos que corresponden a las derivadas parciales en las direcciones (x, y), y, un tercer término que es la derivada parcial con respecto al tiempo. Estas ecuaciones diferenciales parciales no pueden ser clasificadas como Hiperbólicas o Parabólicas dado que presentan un comportamiento matemático considerado como una combinación de ambos.

1.2 Descripción de las Condiciones de Frontera

Para resolver las ecuaciones de movimiento, es necesario imponer condiciones apropiadas sobre las fronteras del dominio del fluido ya sean físicas o computacionales, y son precisamente estas condiciones las que diferencian un problema hidrodinámico de otro.

Condición de No deslizamiento

Esta es una de las condiciones de frontera física. Cuando un fluido se mueve sobre una superficie sólida, debido a la viscosidad del mismo, el fluido se “adhiera” a la pared y debido al esfuerzo cortante sobre dicha

superficie se forma una delgada lámina del fluido conocida como capa límite. En este caso, el fluido sobre la pared iguala en velocidad a la superficie sólida debido a la existencia del esfuerzo cortante. Esto provoca que las componentes de la velocidad, normal y tangencial a la superficie, del fluido sea igual a las respectivas componentes de la velocidad de la superficie sólida [13]. Esta condición puede ser escrita como:

$$\bar{u} = \bar{U} \quad (19)$$

Donde \bar{u} es la velocidad del fluido, y, \bar{U} es la velocidad de la pared. Además, los valores de presión sobre la superficie rígida deben ser deducidos de condiciones de compatibilidad. Para problemas con números de Reynolds elevados, el gradiente de presión en dirección normal a la superficie puede ser despreciado debido a las propiedades de la capa límite del flujo cerca de la superficie, [4]:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (20)$$

Condición de frontera sobre la Superficie libre

En Ingeniería Naval se tiene una dificultad particular ya que operando en la interfase entre dos fluidos, agua y aire, se van a generar olas. De manera general cualquier interfase entre fluidos es conocida como superficie libre y su condición de frontera es expresada matemáticamente por dos ecuaciones, conocidas como condición dinámica y cinemática.

Debido a la baja densidad y viscosidad del aire, el esfuerzo tangencial es despreciable; el único esfuerzo considerable es la presión normal, la cual es generalmente conocida y especificada, y en el presente caso es la atmosférica. Esta es la condición de frontera dinámica sobre una superficie libre. La condición de frontera cinemática establece que una partícula que está sobre la superficie libre permanece sobre la superficie libre. Si $y = h(x, t)$ es una función que describe la posición de la superficie libre, entonces la condición cinemática puede ser escrita como:

$$u \frac{\partial h}{\partial x} = v - \frac{\partial h}{\partial t} \quad (21)$$

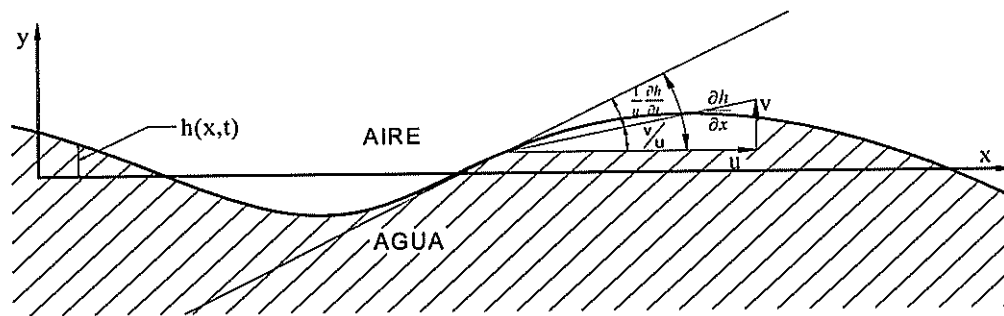


Figura 1
Superficie Libre

Condición de Simetría

En muchos casos los problemas analizados son simétricos con respecto a uno de sus ejes, por lo que en el análisis computacional puede representarse solo una de sus regiones, véase la Figura 2. Para ello es necesario imponer condiciones de simetría sobre la frontera, las cuales requieren que la variación de la presión con respecto a la dirección normal del eje de simetría sea cero, es decir igual que en el caso de la pared, ecuación (20), y que la componente de velocidad normal a la frontera eje sea igual a cero, es decir:

$$\vec{v} \cdot \hat{n} = 0 \quad (22)$$

Donde \hat{n} es el vector unitario normal a la superficie y \vec{v} es el vector velocidad del fluido.

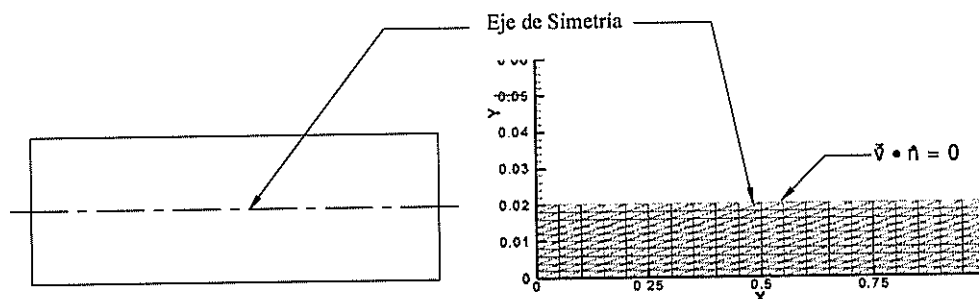


Figura 2
Condición de Simetría

Condición de Entrada y Salida

En los problemas analizados con herramientas computacionales se debe restringir el dominio físico, por lo que es necesario imponer condiciones de entrada y de salida del dominio computacional. Para imponer estas condiciones de frontera es necesario establecer la dirección en la que se propaga la información; esta dirección depende del signo de los valores propios del sistema diferencial de ecuaciones sobre la frontera, para de esta forma poder determinar qué variables deben ser evaluadas fuera del dominio computacional y cuáles deben ser extrapoladas del interior del mismo. De acuerdo con varios autores, entre ellos Hino [8], y Anderson [3], los valores propios del sistema de ecuaciones de Navier-Stokes son:

$$\lambda = \begin{Bmatrix} v_n + a \\ v_n \\ v_n - a \end{Bmatrix} \quad (23)$$

Donde v_n es la velocidad normal a la frontera y a es la velocidad del sonido local. Físicamente, cada valor propio está asociado con la velocidad de la onda con que se propaga la información.

De acuerdo con Anderson, [3], el primer valor propio es siempre positivo y se asume que el vector normal a la frontera apunta hacia fuera, la variable asociada con este valor propio tiene el mismo valor sobre la frontera y en el interior de la malla. De una manera similar el tercer valor propio es siempre negativo por lo tanto la variable asociada con este valor propio es igual a la variable en flujo libre. Por último el segundo valor propio depende si el flujo ingresa o sale del dominio; si la frontera es de entrada, el valor de la variable asociada es igual a la que tendría en flujo libre. En el caso de la frontera de salida, la variable asociada es igual a su valor en el interior del dominio.

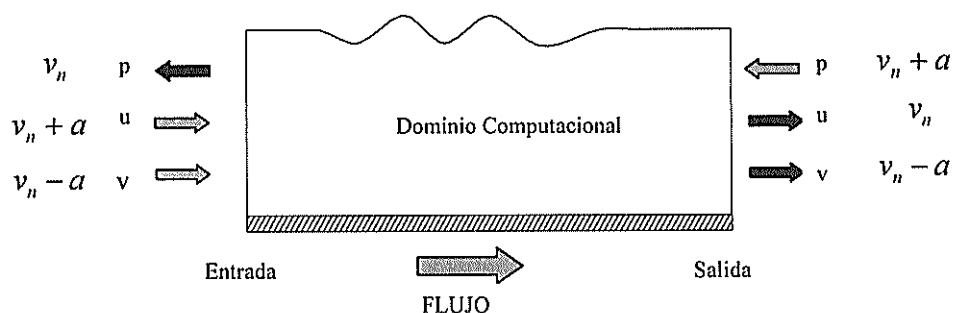


Figura 3
Condiciones de Frontera Computacionales

De acuerdo con Hino, [8], en la frontera de entrada se recomienda establecer los valores de la velocidad ($u=U$, $v=0$) y extrapolar la presión del interior del dominio ($\frac{\partial p}{\partial x} = 0$). En cambio, en la frontera de salida se establece el valor de la presión ($p=0$) y se extrapola la velocidad del interior ($\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$).

1.3 Generación Elíptica de la malla

En Hidrodinámica, es muy común analizar flujos sobre cuerpos de formas irregulares, como por ejemplo folios, véase la Figura 4a. Para discretizar el dominio alrededor de este, no es recomendable utilizar una malla tradicional con celdas rectangulares, debido a que la frontera del folio no es descrita de una forma correcta, como se muestra en la Figura 4b.

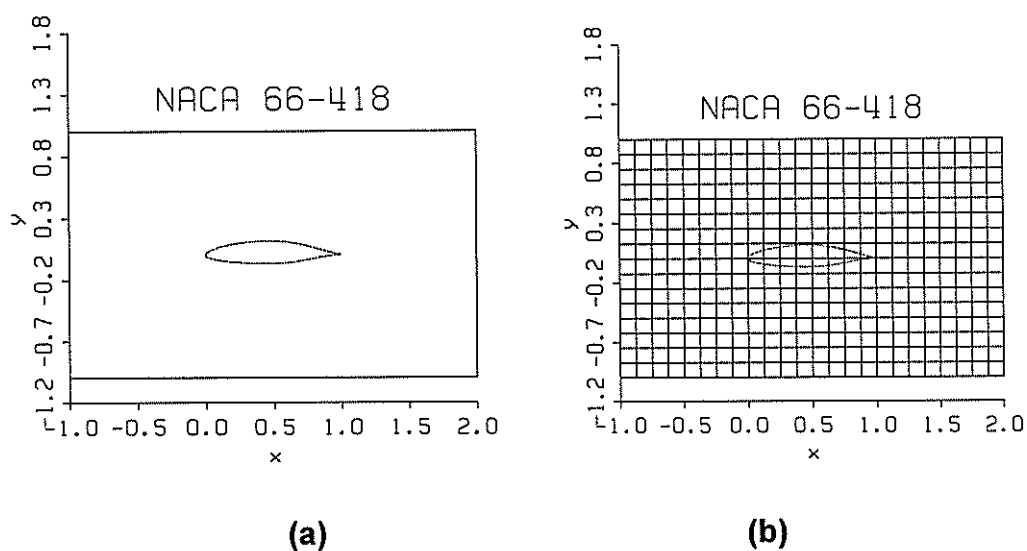


Figura 4
Generación de malla tradicional

En este trabajo se va a discretizar el dominio con elementos triangulares, y el método de Generación Elíptica es utilizado únicamente para ubicar los nodos de manera uniformemente variable. Es decir, no se va a transformar el problema a otro plano computacional. Como alternativa, Thompson, [20] propuso el Método de Generación Elíptica de la malla en el año de 1980. Como muestra la Figura 5, se logra definir con mayor precisión el cuerpo que se desea analizar, asegurándose de esta forma que todos los nodos estén sobre la frontera.

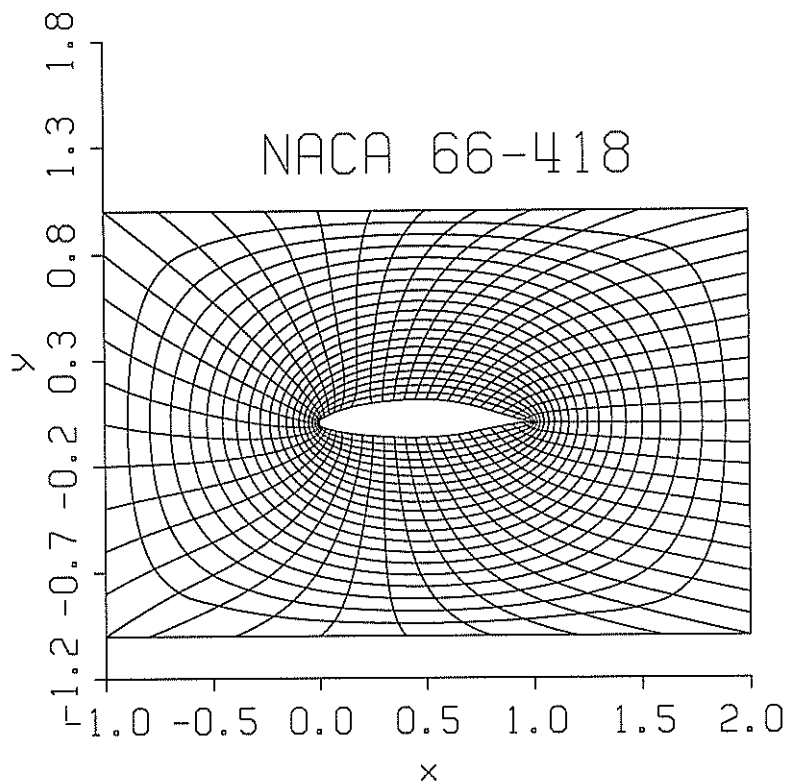


Figura 5
Generación Elíptica de la malla

Debido a que no existe una relación matemática explícita para ubicar los nodos en la discretización del dominio, un sistema de ecuaciones diferenciales parciales es usado para resolver este problema.

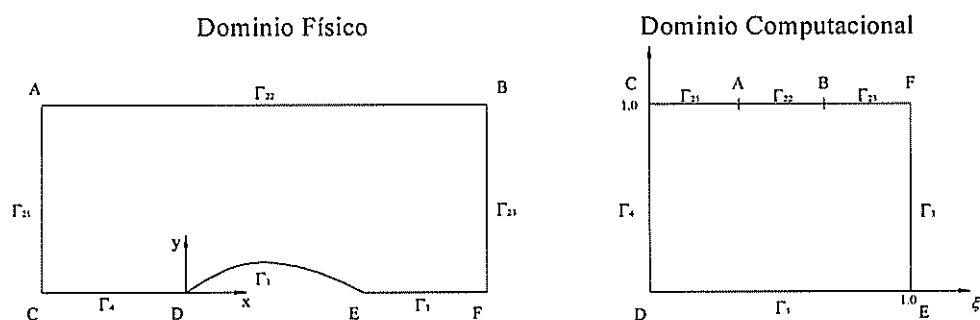


Figura 6
Transformación del plano real al computacional

Dicho sistema diferencial de ecuaciones parciales es de comportamiento elíptico, [2], y se presenta a continuación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

donde (x, y) son las coordenadas en el plano real, y, (ξ, η) las correspondientes en el plano computacional, véase la figura 6.

Debido a la inexistente relación matemática entre los planos es necesario evaluar estas ecuaciones de manera numérica. Por esta razón, en lugar de usar el sistema de ecuaciones (24) es conveniente expresar x y y como una función de ξ y η , obteniéndose el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} &= 0 \\ \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

donde:

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \\ \beta &= \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \\ \gamma &= \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \end{aligned} \quad (26)$$

El sistema de ecuaciones (25)-(26) tiene también un comportamiento Elíptico y es necesario establecer valores en toda la frontera. Para obtener los valores de x y y interiores, es necesario resolver el sistema por un método iterativo.

Luego de discretizar de manera adecuada cada término en el plano computacional y despejar el término deseado, se obtiene la siguiente expresión algebraica, [2]:

$$x_{i,j}^{n+1} = \frac{(x_{i+1,j}^n + x_{i-1,j}^n)}{2} - \frac{\beta (x_{i+1,j+1}^n - x_{i+1,j-1}^n - x_{i-1,j+1}^n + x_{i-1,j-1}^n)}{4\Delta\xi\Delta\eta \left(\frac{\alpha}{\Delta\xi^2} + \frac{\gamma}{\Delta\eta^2} \right)} \quad (27)$$

Donde el superíndice denota el paso de la iteración, es decir, la aproximación n^{th} la cual es usada para estimar el valor $(n + 1)^{\text{th}}$. Una vez que la convergencia es alcanzada, la diferencia entre las aproximaciones sucesivas tiende a cero.

Para resolver estas ecuaciones se recomienda usar el proceso de Relajación, hasta alcanzar convergencia. Los valores iniciales fueron calculados mediante una aproximación lineal, esto se hizo para acelerar la convergencia del método iterativo. El criterio adoptado para obtener una solución convergida fue que el orden de magnitud de la máxima diferencia entre iteraciones sea menor o igual a 10^{-15} . El mismo tratamiento es aplicado a la coordenada y.

La implementación de este proceso se desarrolló a través de la subrutina ELLIGRID, escrita en lenguaje VISUAL FORTRAN. El listado fuente de dicho programa se presenta en el apéndice de este trabajo.

CAPÍTULO 2

MÉTODOS PARA LA DISCRETIZACIÓN DE ECUACIONES GOBERNANTES

Según Anderson, [2], *Discretización es el proceso por el cual una expresión matemática de forma cerrada, tales como una ecuación diferencial o integral incluyendo funciones, las cuales pueden evaluarse de forma continua en algún dominio, es aproximada por expresiones análogas (pero diferentes) las cuales describen valores en solo un número finito de puntos discretos o volúmenes en el dominio.* El método de discretización escogido produce un sistema de ecuaciones algebraicas para calcular de manera finita los valores de las funciones deseadas mediante la utilización de métodos iterativos, y dependiendo del tipo de información utilizada se clasifican en explícitos o implícitos. En un método explícito se usan valores aproximados en iteraciones anteriores para estimar una sola variable. En cambio en un método implícito se requiere resolver un sistema de ecuaciones, debido a

que en una ecuación aparecen algunas variables desconocidas. En ambos casos es necesario tomar en cuenta el límite de estabilidad.

Por simplicidad se ejemplifican los conceptos que se describen a continuación con la ecuación del Momentum en la dirección x:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2 + p^* - \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial uv - \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (17)$$

En el lado izquierdo de la ecuación anterior se pueden diferenciar claramente tres términos, dos que corresponden a las derivadas parciales en las direcciones (x, y), y, un tercer término que es la derivada parcial con respecto al tiempo. Para obtener valores de u es necesario discretizar dichos términos; el proceso en el primer término es conocido como discretización temporal y el los demás como discretización espacial.

En este capítulo se presentarán las diferentes alternativas para resolver los problemas de fluidos compresibles, y luego se detallará un artificio utilizado para aplicarlos en flujos incompresibles. Por último, se escogerá un método de integración en el tiempo exponiendo sus límites de estabilidad numérica.

2.1 Descripción del Método de Volúmenes Finitos

Todos los métodos en CFD utilizan alguna forma de discretización espacial, entre los que tenemos:

Diferencias Finitas:

Según Anderson [2], este método consiste en reemplazar cada derivada en la ecuación por una expresión obtenida luego de la utilización de alguna serie truncada de Taylor. Existen muchos esquemas, dependiendo de la forma de discretización elegida para cada derivada. Para aplicar este método, el dominio debe ser discretizado de la manera tradicional, con cuadriláteros paralelos a los ejes x y y . Además, se lo puede utilizar en problemas con geometrías complejas, con una manipulación previa de las ecuaciones gobernantes, aumentando la complejidad de las mismas.

Elementos Finitos

En el método de Elementos finitos se particiona el dominio en segmentos llamados Elementos Finitos, y dentro de cada uno se desarrolla una interpolación en función de los valores de la función buscada, evaluada en los nodos. Luego se puede aplicar el método de Residuos Ponderados para obtener la matriz rigidez de cada elemento. El método de elementos finitos puede ser adaptado a problemas de gran complejidad e inusual geometría, al igual que el Método de Volúmenes Finitos, lo que incrementa su campo de aplicación en Hidrodinámica.

Volúmenes Finitos

Según Patankar, [16], este método, también llamado de Volúmenes de Control, primero divide el dominio en un finito número de celdas adyacentes de tal manera que cada punto, donde se almacenan las variables, este rodeado por un volumen de control. Luego las ecuaciones diferenciales gobernantes son integradas alrededor de los bordes de cada volumen de control. Después, se asumen perfiles de variación de las variables, entre los nodos, que son utilizadas para evaluar las integrales requeridas. Se obtiene una ecuación algebraica conteniendo las variables de un grupo de nodos. Una ventaja de este sobre el método de

Diferencias Finitas es que al utilizarlo en geometrías complejas (malla no estructurada) no es necesaria la manipulación previa, manteniendo el nivel de complejidad sin variación. Además, las condiciones de frontera pueden ser aplicadas de una manera más sencilla, sobre las fronteras de las celdas, [12].

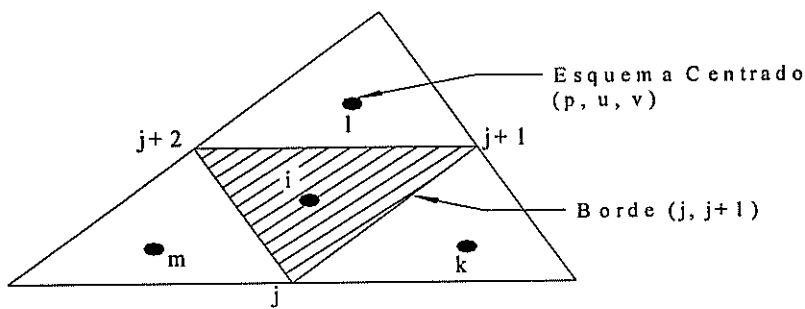


Figura 7

Volumen de control para la celda triangular i mostrando el punto de evaluación de las funciones

En el presente trabajo las celdas a utilizarse tendrán forma triangular y en el esquema centrado que es empleado, las variables del flujo (p^* , u , v) son definidas en el centro de cada volumen de control, siendo este la celda que contiene la variable, véase la figura 7.

Al rescribir la ecuación (17) se obtiene:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad (28)$$

donde las funciones se han agrupado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} q &= u \\ E &= u^2 + p^* - \tau_{xx} \\ F &= uv - \tau_{xy} \end{aligned} \quad (29)$$

Integrando la ecuación (28) en el volumen de control:

$$\iiint_{V_i} \left(\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \right) dV = 0 \quad (30)$$

$$\iiint_{V_i} \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right) dV + \iiint_{V_i} \left(\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \right) dV = 0 \quad (31)$$

Al aplicar el teorema de la Divergencia al segundo término, la Ecuación (31) puede ser escrita de la siguiente manera, [8], donde (n_x, n_y) son las componentes del vector unitario normal hacia fuera del dominio, y la integral cerrada se evalúa en contra de las manecillas del reloj:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_i} q dV + \oint_{\partial V} (E n_x + F n_y) ds = 0 \quad (32)$$

La integral cerrada de la ecuación (32) puede ser aproximada por la suma de los flujos en los bordes de la celda:

$$\oint_{\partial V} (E n_x + F n_y) ds \approx \sum_{\text{bordes}} (E S_x + F S_y)_{j+1/2}, \quad (33)$$

donde:

(S_x, S_y) son los vectores normales proporcionales al área del borde $(j, j+1)$ y está definido por $(y_{j+1}-y_j, -x_{j+1}+x_j)$.

El subíndice $j+1/2$, denota el valor evaluado en el borde $(j, j+1)$.

La suma se desarrolla sobre todos los bordes de la celda i , en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Entonces la forma semi-discreta de la ecuación del Momentum en la dirección x es:

$$V \frac{\partial q}{\partial t} + \sum_{\text{bordes}} (G_{j+1/2}) = 0 \quad (34)$$

Donde:

$$G = E S_x + F S_y \quad (35)$$

2.2 Descripción del Método de Compresibilidad Artificial

Este método fue propuesto por Alexandre Chorin [5] en el año de 1967, ante la necesidad de analizar el movimiento de fluidos incompresibles. Para ese entonces ya se habían desarrollado los primeros métodos para fluidos compresibles con aplicación en el área Aeronáutica. A pesar de la existencia en la actualidad de varias alternativas disponibles para la solución de problemas con flujos incompresibles, en el presente trabajo se escogió este método debido a su fácil extensión a los casos tridimensionales.

En el Capítulo 1, se estableció que las ecuaciones gobernantes para un flujo laminar, bidimensional, viscoso pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2 + p^* - \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(uv - \tau_{xy})}{\partial y} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv - \tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v^2 + p^* - \tau_{yy})}{\partial y} = 0 \quad (18)$$

Al intentar resolver de manera numérica el sistema de ecuaciones (4), (17), y, (18), se puede apreciar que las variables (u, v) pueden ser obtenidas con un método iterativo que avance en el tiempo en las ecuaciones (17) y (18), no así con la variable p^* . Según Chorin, la presión en un fluido incompresible actúa como un parámetro de Relajación para satisfacer la Ecuación de Continuidad original. Por lo que dicha ecuación (4) puede ser modificada añadiendo una derivada artificial de la presión respecto del tiempo, representando la compresibilidad artificial:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \quad (36)$$

donde β actúa como un parámetro de compresibilidad.

La ecuación (36) puede ser deducida de la ecuación de Continuidad para fluidos compresibles, usando la ecuación de estado:

$$p = \beta \rho \quad (37)$$

Incluyendo esta alteración, el sistema de ecuaciones queda:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (36)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2 + p^* - \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial uv - \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv - \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial v^2 + p^* - \tau_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (18)$$

Este sistema de Ecuaciones Diferenciales Parciales es de tipo Hiperbólico, por lo que se puede utilizar un método numérico que avance en el tiempo (Integración en tiempo).

Comparación con Fluidos compresibles:

Los valores propios del sistema conformado por las ecuaciones (36), (17), y, (18), presentados en el Capítulo 1, son:

$$\lambda = \left\{ \begin{array}{c} v_n + a \\ v_n \\ v_n - a \end{array} \right\}, \quad (23)$$

donde v_n es la velocidad normal a la frontera y a es la velocidad del sonido local. El valor de a está dado por:

$$a = \sqrt{v_n^2 + \beta(S_x^2 + S_y^2)} \quad (38)$$

Una comparación con el valor propio de las ecuaciones de Euler para un fluido compresible, muestra que a corresponde a una velocidad del sonido artificial.

En analogía con el caso compresible, un número de Mach puede definirse como la relación de la velocidad del flujo y la velocidad del sonido artificial.

$$\text{Ma} = \frac{v_n}{a} = \frac{v_n}{\sqrt{v_n^2 + \beta(S_x^2 + S_y^2)}} \quad (39)$$

Físicamente, pequeñas perturbaciones de presión se propagan en un fluido incompresible con velocidad infinita. En el método de Compresibilidad Artificial, el parámetro de compresibilidad artificial limita la velocidad de propagación y a diferencia de un fluido incompresible, el efecto de la perturbación es retrasado. El grado de retraso depende del valor de β . Para $\beta \geq 0$ el flujo seudo compresible es comparable con un flujo subsónico, [4].

La solución del sistema con la ecuación de Continuidad modificada carece de sentido físico para flujo no estacionario; sin embargo, en el estado estable la derivada temporal $\frac{\partial p}{\partial t}$ desaparece y la ecuación de Continuidad original para fluido incompresible es recuperada.

Importancia del valor de Compresibilidad Artificial:

La velocidad de propagación de la onda de presión en un fluido seudo compresible es influenciada considerablemente por la selección del parámetro β . Un aumento en el parámetro β produce una propagación de la perturbación más rápida dentro de la zona del flujo, y la solución se

aproximará más correctamente a la solución de un flujo no estacionario completamente incompresible.

Debido a esto, la selección del valor apropiado de β está sujeto a ciertas restricciones. Como por ejemplo, su límite superior puede ser calculado de la relación, k , cociente entre el máximo y mínimo valor propio del sistema diferencial de ecuaciones, [4]:

$$k = \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|} = \frac{|u + \sqrt{u^2 + \beta}|}{|u - \sqrt{u^2 + \beta}|} \quad (40)$$

Existen diferentes modelos en la literatura donde el valor de β es asumido proporcional a la velocidad local del flujo, [8]:

$$\beta = \gamma \cdot \max\left\{\left(u^2 + v^2\right), \beta_{\min}\right\}, \quad (41)$$

donde el parámetro γ es un factor de un orden de magnitud.

El valor de β obtenido de la ecuación (41) es una variable local. Esto puede llevar a problemas de convergencia debido a que la velocidad del flujo se vuelve muy grande, localmente, y provoca un aumento de β .

Un valor mínimo razonable para β puede ser estimado de la condición de que la onda de presión artificial se propaga más rápido que los efectos viscosos. De acuerdo a Bet [4], valores recomendables para β están entre 0.4 y 2.0, dependiendo del problema de flujo examinado. La siguiente figura muestra el comportamiento de convergencia de un flujo a través de un ducto de sección constante con diferentes valores del parámetro β . En este caso el proceso diverge con valores mayores de 1.

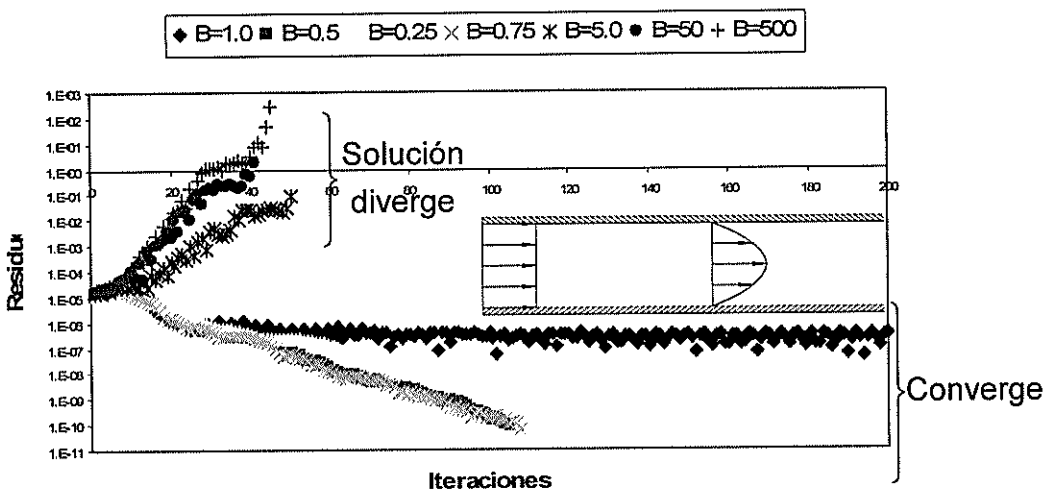


Figura 8
Influencia de β en la convergencia para flujo en ducto de sección constante

En todos los problemas analizados en el presente trabajo se utiliza un valor de 0.5 para β , a no ser que se especifique lo contrario, debido a la aceleración en la convergencia demostrada en la Figura 8.

2.3 Integración en tiempo:

Luego de haber manipulado espacialmente las ecuaciones de Continuidad y de Navier-Stokes utilizando el método de Volúmenes Finitos se obtiene un sistema de ecuaciones que puede ser reescrito como una ecuación diferencial parcial de la forma:

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} = \hat{R} \quad (42)$$

Donde:

$$\hat{Q} \text{ es una función de } (x, y, t), \quad (43)$$

\hat{R} es una función de (\hat{Q}, x, y, t) , y representa la razón de cambio de \hat{Q} .

La variable t es tiempo e indica que la solución puede cambiar en el tiempo (no estacionario), y le da a la ecuación un comportamiento matemático Hiperbólico, esto es, la solución depende de las soluciones en etapas anteriores. Se puede usar esta característica para desarrollar métodos numéricos que avancen en el tiempo en los cuales se empieza con una solución inicial (aproximación) y avanzar la ecuación en tiempo mientras se satisfacen las condiciones de frontera. La aproximación evolucionará y se acercará asintóticamente a la solución del flujo en estado estable, para lo cual se utilizan métodos numéricos que avanzan en el tiempo.

Se considerará un paso de tiempo δt

$$\delta t^n = t^{n+1} - t^n \quad (44)$$

Donde n es el índice para el control de la etapa del tiempo. El símbolo δ indica un paso finito (no diferencial). El avance de la ecuación en cada paso de tiempo puede ocurrir en una o más etapas, y, con una o más iteraciones.

Método de Runge-Kutta:

En el presente caso, la integración en tiempo es realizada usando el método explícito de Runge-Kutta con cinco etapas, que es generalmente representado por, [9]:

$$\begin{aligned} Q_i^{(0)} &= Q_i^{(n)} \\ Q_i^{(k)} &= Q_i^{(0)} - \alpha_k \delta t R_i^{(k-1)} \\ Q_i^{(n+1)} &= Q_i^{(k)} \end{aligned} \quad (45)$$

Con $k = 1, \dots, 5$; $\alpha_1 = \frac{1}{4}$, $\alpha_2 = \frac{1}{6}$, $\alpha_3 = \frac{3}{8}$, $\alpha_4 = \frac{1}{2}$, y, $\alpha_5 = 1$.

El tamaño del paso del tiempo, δt , usado en esta clase de métodos requiere varias consideraciones, entre los que se tiene:

- Resolución de la variación del tiempo (escala temporal de una partícula del fluido),
- Estabilidad del método numérico, y,
- Condición de Estabilidad, donde se utiliza el Número Courant-Friedrichs-Lewy, (CFL).

Entre la literatura existen muchas formulaciones para determinar el valor de δt , como por ejemplo Anderson [3], Chorin [5], Hino [7], Rausch [17], entre otros. La mayoría de estos autores utilizan la siguiente ecuación con ligeras modificaciones:

$$\delta t \leq \frac{\text{CFL} * \Delta x}{\hat{\lambda}}, \quad (46)$$

donde:

1. CFL es el número Courant-Friedrichs-Lewy, y los métodos explícitos generalmente requieren $CFL < 1$. En el presente trabajo se usa un valor de 0.01 de acuerdo a lo recomendado por Maciel, [10].

Para el problema del flujo laminar viscoso en un ducto de sección constante se comprobó la influencia del número CFL en la convergencia del método iterativo, como se muestra en la Figura 9, confirmándose así la recomendación de Maciel [10].

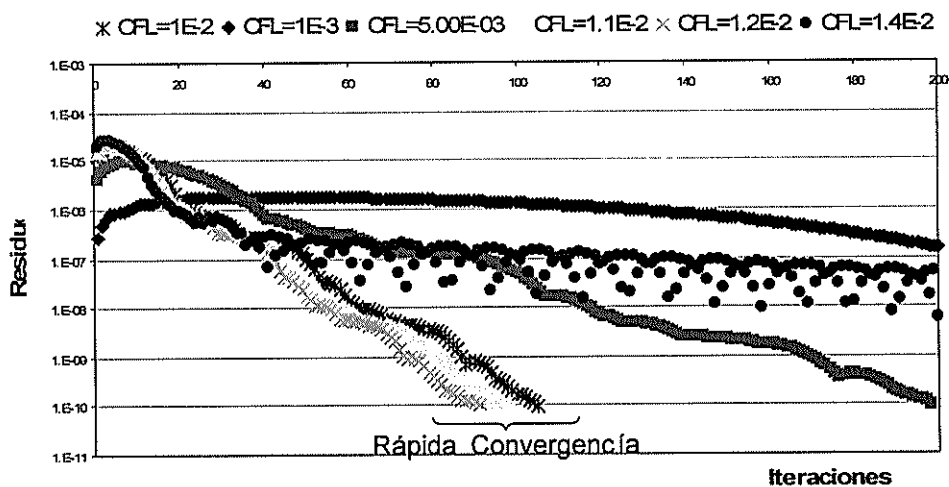


Figura 9
Influencia del número CFL en la convergencia para flujo en ducto de sección constante

2. Δx es la longitud característica de la celda; en este caso Δx se toma como el valor más pequeño entre las longitudes de los lados (L_1, L_2, L_3), y las distancias entre el centroide de la celda y sus vecinas (d_1, d_2, d_3), [10], véase la figura 10.

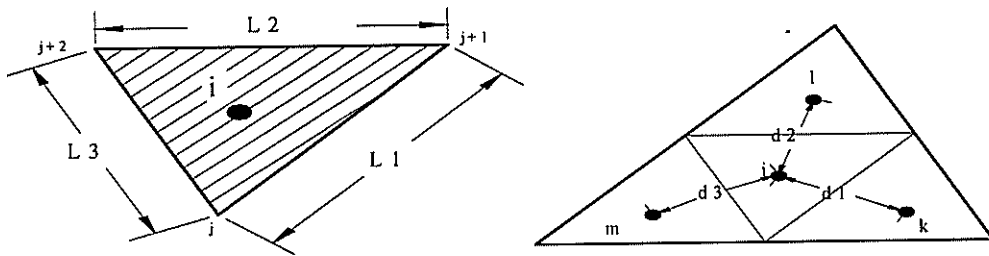


Figura 10
Longitud Característica de la celda triangular i según Maciel
[10]

3. λ es el máximo Valor Propio (velocidad de onda), [8], definida por:

$$\lambda = \sqrt{(u^2 + v^2)^2 + \beta * (S_x^2 + S_y^2)} \quad (47)$$

Con el propósito de acelerar el método numérico, en cada celda se usa un tamaño del paso del tiempo diferente. La idea principal de este

procedimiento es mantener un número CFL constante en todo el proceso, permitiendo así el uso de un tamaño de paso del tiempo apropiado para cada región específica durante el proceso de convergencia [8].

En resumen, en el presente capítulo se han presentado los pasos principales del procedimiento desarrollado por Hino. Como se muestra en la Figura 11, primero la Ecuación de Continuidad es modificada utilizando el método de Compresibilidad Artificial, luego los términos espaciales del sistema de ecuaciones formado por la Ecuación de Continuidad Modificada (36) y una de las formas de las Ecuaciones de Navier-Stokes (17) y (18) son discretizados utilizando el método de Volúmenes Finitos. Luego, aprovechando el comportamiento Hiperbólico del sistema de ecuaciones diferenciales parciales el método de Runge-Kutta de 5 etapas es usado para realizar la integración en tiempo.

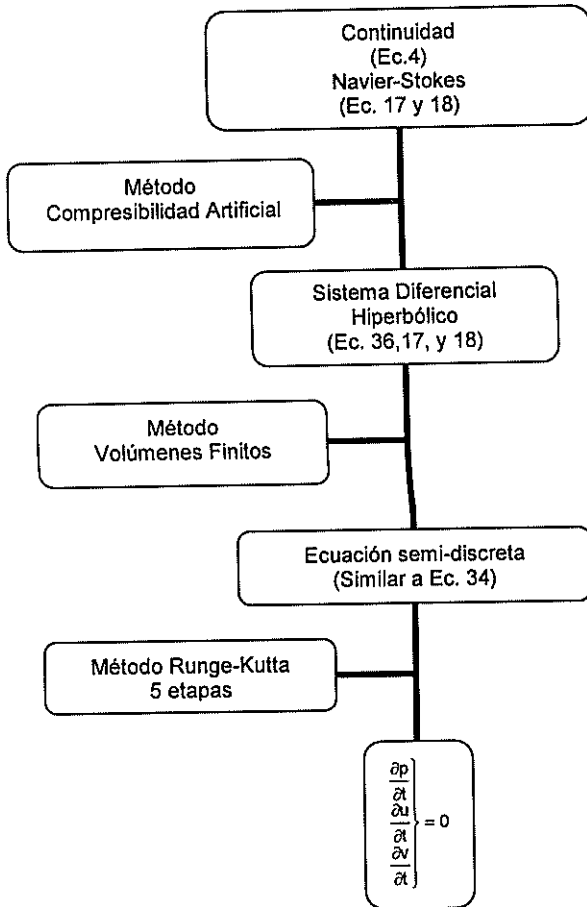


Figura 11
Proceso de discretización desarrollado por Hino, [7]

CAPÍTULO 3

DESCRIPCIÓN DEL METODO DE HINO

Aunque este método no fue presentado en un solo artículo técnico, la mayor parte de este es producto de la combinación de dos de los trabajos del Profesor Takanori Hino, Jefe de la Sección de Vehículos de Alta Velocidad en el Instituto de Investigación de Embarcaciones de Japón, [7] y [8]. A pesar de que ambos consideraban el efecto de la superficie libre, su primer trabajo trataba solamente con flujos no viscosos por lo que se necesitó incluir procedimientos empleados en el segundo, que trata con flujos viscosos.

En el capítulo anterior se presentó de manera general el método desarrollado por Hino, donde las ecuaciones diferenciales para un flujo viscoso laminar e incompresible son manipuladas hasta obtener expresiones algebraicas que permita obtener las soluciones de manera discreta en su estado estable. En

el presente capítulo se complementará la descripción realizada anteriormente, describiendo la forma de cálculo de los denominados flujos viscosos y no viscosos, y, la forma de implementación de las condiciones de frontera. Además, debido a que la intención de este trabajo es poder resolver problemas hidrodinámicos que estén influenciados por la presencia de una superficie libre se hace necesario la implementación de condiciones de fronteras apropiadas.

3.1 Discretización de las Ecuaciones Gobernantes

Como se demostró anteriormente al utilizar el Método de Compresibilidad Artificial [4] se obtiene la Ecuación de Continuidad modificada, por lo que se recupera el comportamiento Hiperbólico del sistema conformado por la ecuación de Continuidad (4) y las de Momentum (17) y (18), como se muestra a continuación:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (36)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2 + p^* - \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial uv - \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv - \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial v^2 + p^* - \tau_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (18)$$

En forma similar a lo realizado en el capítulo anterior, este sistema de ecuaciones puede ser escrito de forma vectorial, obteniéndose:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial(e - e^v)}{\partial x} + \frac{\partial(f - f^v)}{\partial y} = 0 \quad (48)$$

Donde

$$q = \begin{bmatrix} p^* \\ u \\ v \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} \beta u \\ u^2 + p^* \\ uv \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} \beta v \\ uv \\ v^2 + p^* \end{bmatrix}, \quad (49)$$

$$e^v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}, \quad f^v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \end{bmatrix}$$

Siendo:

x es la coordenada horizontal, y la vertical, positivo hacia arriba,

(u, v) son las componentes de la velocidad,

p^* es la presión sin componente hidrostático,

La discretización en el espacio está basada en el método de Volúmenes Finitos. El dominio a resolver es dividido en celdas de distribución

arbitraria (mallas no estructuradas). En este caso las variables del flujo (p^* , u , v) son definidas en el centro de cada celda.

Luego de integrar alrededor del volumen de control y de aplicar el Teorema de la Divergencia se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V_1} q dV + \oint_{\partial V} [(e - e^v)n_x + (f - f^v)n_y] ds = 0 \quad (50)$$

Nuevamente, la integral cerrada de la ecuación (50) puede ser aproximada por la suma de los flujos en los bordes de la celda:

$$\oint_{\partial V} [(e - e^v)n_x + (f - f^v)n_y] ds \approx \sum_{\text{bordes}} [(e - e^v)S_x + (f - f^v)S_y]_{j+1/2} \quad (51)$$

Se define $E_{j+1/2}$ y $E_{j+1/2}^v$ como los flujos no viscoso y viscoso atravesando el borde $(j, j+1)$, respectivamente, que pueden ser escritos como:

$$E_{j+1/2} = (e S_x + f S_y)_{j+1/2} \quad (52)$$

$$E_{j+1/2}^v = (e^v S_x + f^v S_y)_{j+1/2} \quad (53)$$

Entonces la forma semi-discreta de las ecuaciones de Continuidad y Navier-Stokes es:

$$\nabla \frac{\partial q}{\partial t} + \sum_{\text{edges}} \left(E_{j+1/2} + E_{j+1/2}^v \right) = 0 \quad (54)$$

3.2 Cálculo de los Flujos Viscoso y No Viscoso

De acuerdo a la ecuación (54) es necesario calcular los flujos, viscoso y no viscoso, en los bordes de las celdas, y en este caso las variables necesarias son calculadas en el centro de las celdas, por lo que es necesario asumir un perfil de variación entre nodos. Varios esquemas han sido propuestos para cada uno de los flujos, a continuación se describen los utilizados en el presente trabajo.

Flujo No Viscoso

Cada componente del vector del flujo no viscoso, E , puede ser escrito como sigue [8]:

$$E(q) = \begin{bmatrix} \beta U \\ uU + pS_x \\ vU + pS_y \end{bmatrix} \quad (55)$$

Donde $U = u^*S_x + v^*S_y$.

Por facilidad de implementación y para disminuir el tiempo computacional, el flujo no viscoso es evaluado utilizando el siguiente esquema propuesto por Jameson, [9]:

$$E(q)_{\text{cara}} = \frac{E(q)_i + E(q)_k}{2} \quad (56)$$

Donde $E(q)_i$ es el flujo evaluado en la celda i , y, $E(q)_k$, el evaluado en la celda vecina.

Esta relación es equivalente a un esquema centrado de segundo orden en un contexto de Diferencias Finitas. De esta manera, es necesario introducir explícitamente un operador de disipación artificial, D , para evitar, por ejemplo, desacoplamiento en los nodos adyacentes e inestabilidades no lineales (ondas de choque), [9], por lo que es necesario reescribir la ecuación (54):

$$\nabla \frac{\partial q}{\partial t} + \sum_{\text{bordes}} \left(E_{j+1/2} + E_{j+1/2}^v \right) - D(q_i) = 0 \quad (57)$$

Uno de los modelos fue propuesto por Jameson y Mavriplis en 1990, [9], teniendo la siguiente estructura:

$$D(q_i) = d^{(2)}(q_i) - d^{(4)}(q_i) \quad (58)$$

De acuerdo con Hino, [7], para mantener el esquema de segundo orden en el presente trabajo, se usa el término disipativo de cuarto orden, responsable de la estabilidad numérica. El término disipativo de segundo orden, usado para prevenir oscilaciones cerca de ondas de choque, no es implementado.

El término disipador es evaluado como sigue. Primero, el término "Laplaciano no dividido" en el espacio computacional es aproximado como:

$$\nabla^2 q_i = \sum_{j=1}^n q_j - q_i \quad (59)$$

Donde n es el número de celdas vecinas; en caso de ser una celda de frontera, llamada "adicional", su contribución a la sumatoria es despreciada.

El término disipador es calculado usando el valor obtenido en la ecuación (59):

$$D(q_i) = \sum_{j=1}^n \varepsilon \lambda (\nabla^2 q_j - \nabla^2 q_i) \quad (60)$$

Donde:

ε es una constante global la cual controla la magnitud de disipación; de acuerdo con Maciel [10], su valor debe de estar entre 0.01 y 0.04. En todos los casos presentados en esta tesis se utilizó el valor de 0.01 a no ser que se especifique lo contrario.

λ actúa como un factor de escala, y son las contribuciones del máximo valor propio de las ecuaciones de Euler integrado alrededor de cada borde de celda, [10]. Estos términos son definidos como:

$$\lambda = | (uS_x + vS_y) | + \sqrt{(uS_x + vS_y)^2 + \beta(S_x^2 + S_y^2)} \quad (61)$$

Donde u y v son calculados como promedios aritméticos entre los valores asociados a la celda i y su vecina k .

De acuerdo con Swanson y Radespiel [19], se recomienda evaluar el término de disipación artificial solamente en las etapas impares, ahorrando algo de tiempo computacional y mejorando la estabilidad basándose en las características Hiperbólicas/Parabólicas de las ecuaciones de Navier-Stokes. Dicho término permanece “congelado” en las demás etapas, explorando las características Hiperbólicas de estas ecuaciones, para asegurar convergencia.

La implementación de los procesos de cálculo del flujo no viscoso y del termino disipativo, se desarrollaron a través de las subrutinas INVISCID (I, J) y DISIPAT (I, J) respectivamente, escritas en lenguaje VISUAL FORTRAN. El listado fuente de dichos programas se presentan en el apéndice de este trabajo.

Flujo Viscoso

Los componentes del vector del flujo viscoso son escritos como, [8]:

$$E^V(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ S_x \tau_{xx} + S_y \tau_{xy} \\ S_x \tau_{xy} + S_y \tau_{yy} \end{bmatrix} \quad (62)$$

Los gradientes de velocidad en el borde son requeridos para la evaluación del flujo viscoso. Aplicando el teorema de Gauss al Volumen de Control que se forma al conectar los nodos localizados en los extremos de los bordes y los centroides de las celdas que comparten el mismo borde (véase la figura 12). Se tiene:

$$\frac{\partial q}{\partial x} \Big|_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{V^*} \oint q \partial y$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} \Big|_{j+\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{V^*} \left[\frac{q_k + q_{j+1}}{2} (y_{j+1} - y_k) + \frac{q_{j+1} + q_i}{2} (y_i - y_{j+1}) \right. \\ \left. + \frac{q_i + q_j}{2} (y_j - y_i) + \frac{q_j + q_k}{2} (y_k - y_j) \right]$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} \Big|_{j+\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{2V^*} [(q_k - q_i)(y_{j+1} - y_j) + (q_{j+1} - q_j)(y_i - y_k)] \quad (63)$$

Donde V^* es el área del volumen de control.

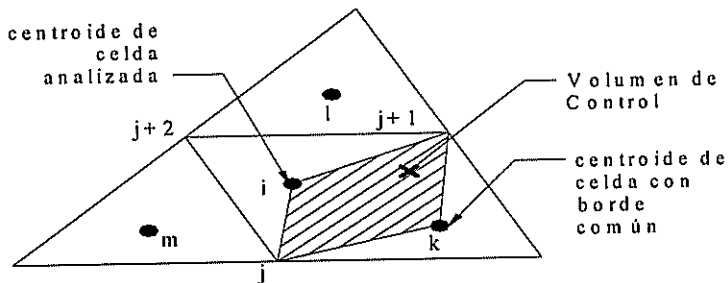


Figura 12
Volumen de Control para el borde (j, j+1)

Las variables del flujo en los vértices, q_j y q_{j+1} , son calculados de los valores centrados en la celda, siguiendo el método de Promediación Laplaciana Ponderada, [17]. El gradiente, $\frac{\partial q}{\partial y}$, puede ser evaluado de una manera similar.

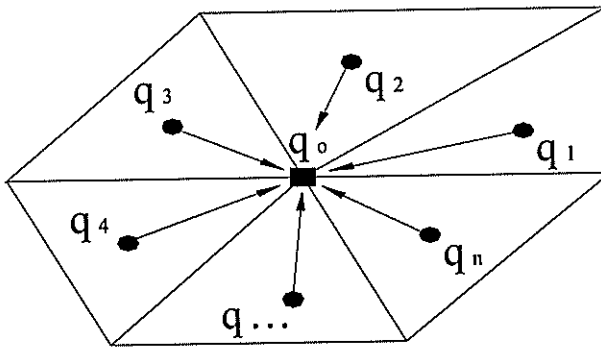


Figura 13
Promediación de las variables en los nodos en función de los valores almacenados en los centroides de las celdas

Como se ilustra en la Figura 13, el promedio ponderado de los valores centrados en la celda q_i alrededor de un nodo está dado por:

$$q_0 = \frac{\sum_{i=1}^n w_i q_i}{\sum_{i=1}^n w_i}, \quad (64)$$

donde el valor q_0 es calculado usando los factores w_i para cada celda.

Este método fue propuesto Holmes y Connell, modificado luego por Rausch, [17]. Los factores pueden ser calculados con las siguientes fórmulas:

$$w_i = 1 + \Delta w_i, \quad (65)$$

Para calcular los valores de Δw_i , primero se definió una función de costo, C:

$$C = \sum_{i=1} (\Delta w_i)^2. \quad (66)$$

Luego esta función de costo fue minimizada para mantener los factores cerca de la unidad resolviendo un problema de optimización dado como restricciones las siguientes ecuaciones:

$$L(x_o) = \sum_{i=1} w_i (x_i - x_o) = 0 \quad (67)$$

$$L(y_o) = \sum_{i=1} w_i (y_i - y_o) = 0 \quad (68)$$

Donde (x_o, y_o) son las coordenadas del nodo, y, (x_i, y_i) son las coordenadas del centroide de las celdas adyacentes.

El método de los Multiplicadores Lagrangianos fue usado para resolver el problema de optimización, obteniéndose:

$$\Delta w_i = \lambda_x (x_i - x_0) + \lambda_y (y_i - y_0) \quad (69)$$

Los Multiplicadores Lagrangianos están definidos por:

$$\lambda_x = \frac{(I_{xy}R_y - I_{yy}R_x)}{(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2)} \quad (70)$$

$$\lambda_y = \frac{(I_{xy}R_x - I_{xx}R_y)}{(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2)}, \quad (71)$$

donde:

$$R_x = \sum_{i=1}^n (x_i - x_0), \quad (72)$$

$$R_y = \sum_{i=1}^n (y_i - y_0), \quad (73)$$

$$I_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - x_0)^2, \quad (74)$$

$$I_{yy} = \sum_{i=1}^n (y_i - y_0)^2, \quad (75)$$

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^n (x_i - x_0)(y_i - y_0). \quad (76)$$

Usando esta ponderación con procedimiento Laplaciano, la ecuación (64) es una interpolación exacta del valor nodal q_0 para una variación lineal de los valores centrados en las celdas q_i . Para una variación no lineal, es de segundo orden de exactitud en espacio.

Finalmente, el flujo viscoso en la cara $(j, j+1)$ es calculado como:

$$\left\{ E_{j+\frac{1}{2}}^v \right\} = [M(j+1, j)]\{(q_k - q_i)\} + [M(i, k)]\{(q_{j+1} - q_j)\} \quad (77)$$

Donde la matriz M se define como:

$$[M(\alpha, \beta)] = \frac{1}{2\text{Re}V^*} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2S_x dy_{\alpha\beta} - S_y dx_{\alpha\beta} & S_y dy_{\alpha\beta} \\ 0 & -S_x dx_{\alpha\beta} & S_x dy_{\alpha\beta} - 2S_y dx_{\alpha\beta} \end{bmatrix}, \quad (78)$$

siendo:

Re , el número de Reynolds,

V^* , el área del volumen de control mostrado en la figura 12, y,

$(dx_{\alpha\beta}, dy_{\alpha\beta})$, el vector definido por:

$$dx_{\alpha\beta} = x_\alpha - x_\beta, \quad dy_{\alpha\beta} = y_\alpha - y_\beta \quad (79)$$

La implementación de estos procesos, cálculo del flujo viscoso y de las variables en los nodos, se desarrollaron a través de las subrutinas VISCOUS (I,J) y LAPLACIAN respectivamente, escritas en lenguaje VISUAL FORTRAN. El listado fuente de dichos programas se presenta en el apéndice de este trabajo.

3.3 Discretización de las Condiciones de Frontera

De acuerdo con Maciel [10], para implementar las condiciones de frontera descritas en el Capítulo 1 se recomienda incorporar celdas “adicionales” fuera del dominio computacional, véase la figura 14.

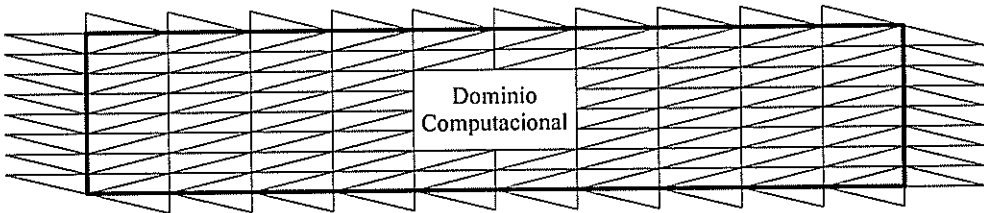


Figura 14
Ubicación de las celdas “adicionales”

En la mayoría de las ecuaciones establecidas en el capítulo 1 se consideran los gradientes de las variables en dirección normal a la frontera. Por ello se tuvo la necesidad de que el centroide de la celda adicional esté ubicado en dirección normal al centroide de su celda vecina

o "real" dentro del dominio computacional, tal como se muestra en la siguiente figura:

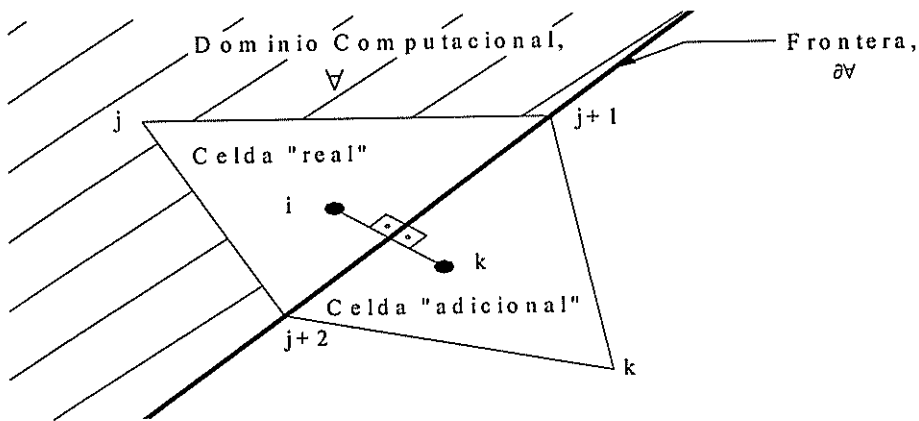


Figura 15
Ubicación del centroide de una celda "adicional"

En el presente trabajo se han considerado las siguientes fronteras: pared sólida, superficie libre, entrada, salida y eje de simetría.

Pared

De acuerdo con la ecuación (19), las condiciones de no permeabilidad y adherencia se imponen para el flujo en la pared sólida y asumiendo que la misma está fija en el espacio, es decir $u = v = 0$. Esto es aproximado imponiendo:

$$u_g = -u_r \quad (80)$$

$$v_g = -v_r \quad (81)$$

Donde el subíndice g representa la celda adicional y el subíndice r su celda vecina real; véase la figura 16.

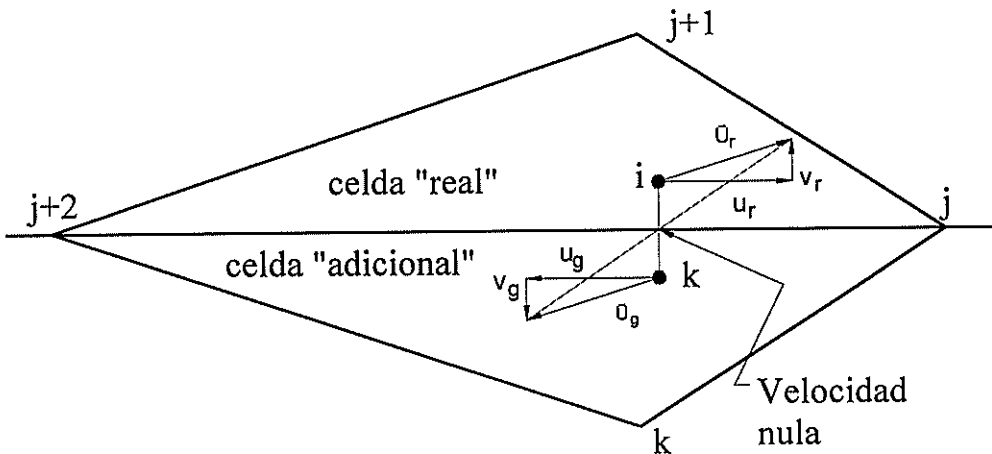


Figura 16
Implementación de la condición de no deslizamiento

De acuerdo a la ecuación (20), el gradiente de la presión normal a la pared se aproxima como cero. De esta asunción, la presión en la celda "adicional" es extrapolada de la celda real vecina (extrapolación de orden cero), es decir:

$$p_g = p_r \quad (82)$$

Superficie libre

De acuerdo con lo descrito en el Capítulo 1, sobre la superficie libre actúa solamente la presión atmosférica, la cual es asumida igual a cero. Aplicando el artificio matemático utilizado por Hino, [7], ecuación (9), la condición de frontera se escribe como:

$$p^* = \frac{h}{Fn^2}, \quad (83)$$

donde h es la altura de la superficie libre, y Fn es el número de Froude.

De acuerdo con Hino, [7], la velocidad sobre la superficie libre es extrapolada desde dentro del dominio computacional, de tal manera que el gradiente de velocidad en la dirección normal es cero. Debido a la ubicación del centroide de la celda adicional, es suficiente establecer:

$$u_g = u_r \quad (84)$$

$$v_g = v_r \quad (85)$$

Eje de Simetría

La variación de presión es tratada de igual manera que en el caso de la frontera tipo pared sólida, por lo que se implementó la ecuación (82). Para aproximar la velocidad, se considerará el problema de ducto con expansión, que se presentará en el próximo capítulo. En este caso, el eje de simetría es paralelo al eje x, por lo que la velocidad fue calculada con la siguiente expresión:

$$u_g = u_r \quad (86)$$

$$v_g = -v_r \quad (87)$$

Esta condición garantiza que no exista flujo que cruce la línea central, como se muestra en la siguiente figura:

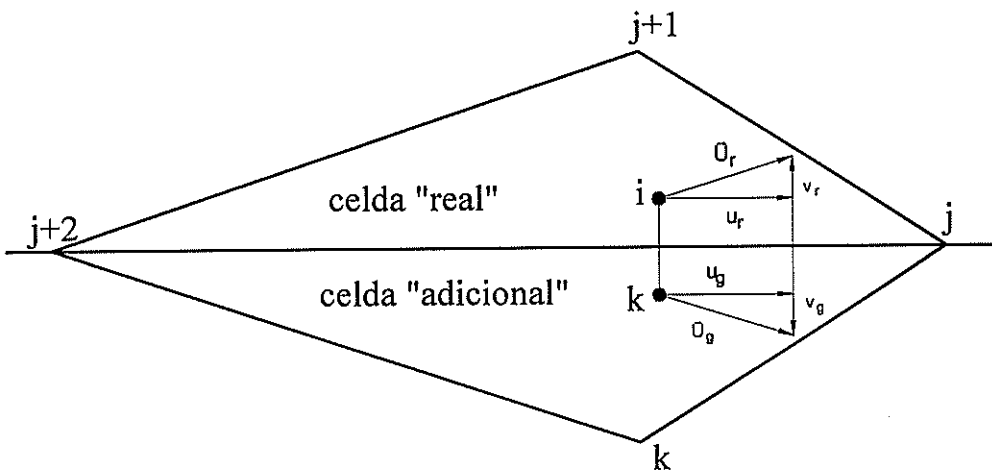


Figura 17
Implementación de la condición de simetría

Entrada y Salida

De acuerdo con Hino, [8], en las celdas "adicionales" de la frontera de entrada se utilizará nuevamente la ecuación (82) para evaluar la presión, y las componentes de la velocidad son definidas por:

$$u_g = 1 \quad (88)$$

$$v_g = 0 \quad (89)$$

En cambio, en la frontera de salida se establece el valor de la presión igual a cero y se extrapola la velocidad desde el interior utilizando las ecuaciones (84) y (85):

$$u_g = u_r \quad (84)$$

$$v_g = v_r \quad (85)$$

$$p_g = 0 \quad (90)$$

La implementación de las condiciones de frontera, se desarrolló a través de la subrutina BOUNDARY, escrita en lenguaje VISUAL FORTRAN. El listado fuente de dicho programa se presenta en el apéndice de este trabajo.

3.4 Distorsión de la malla por efecto de la superficie libre:

Debido a que la superficie libre es parte de la solución buscada, es necesario implementar un método que permita actualizar la forma de la misma. A pesar de la variedad de procesos existentes, se implementará un proceso similar al método descrito por Hino, [7] y [8], y Anders, [1].

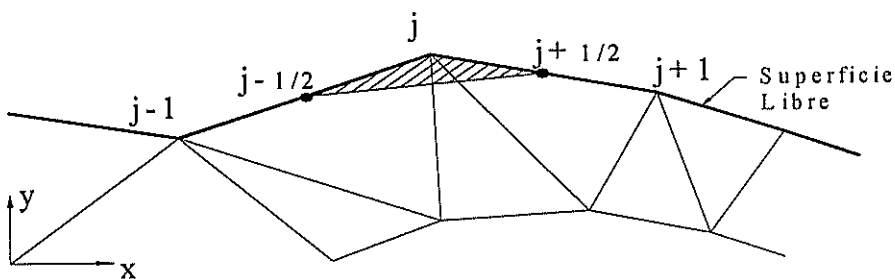


Figura 18
Volumen de control para la condición cinemática de una superficie libre

En dicho método, la condición Cinemática es utilizada para actualizar la ubicación de la superficie libre. La ecuación (21) puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} - v = 0 \quad (91)$$

Según Hino, [7], para evitar la reflexión de ola en la frontera de salida, se puede usar el procedimiento de amortiguamiento de ola, en el que, el término de amortiguamiento es añadido a la ecuación (91):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} - v + D(x) = 0, \quad (92)$$

donde:

$$D(x) = A \left(\frac{x - x_d}{x_o - x_d} \right)^2, \text{ solo si } x \geq x_d, \quad (93)$$

y, donde x_o y x_d son las coordenadas en x de la frontera de salida y el punto inicial de la región amortiguada respectivamente. A es una constante la cual determina la magnitud de amortiguamiento. El término x_d puede ser calculado por, [7]:

$$x_d = x_o - 2\pi Fn^2 \quad (94)$$

La discretización de la Ecuación (92) es desarrollada también utilizando el método de Volúmenes Finitos. Debido a que la altura de la ola es definida por los vértices de los bordes sobre una superficie libre, un Volumen de Control para un vértice j es el área desde $x_{j-1/2} = (x_{j-1} - x_j)/2$ hasta $x_{j+1/2} = (x_{j+1} - x_j)/2$ como es mostrado en la figura 18. Integrando la ecuación (92) sobre este Volumen de Control se tiene:

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} - v + D(x) \right) dx = 0. \quad (95)$$

Esta ecuación puede ser aproximada por:

$$\Delta x_j \frac{\partial h_j}{\partial t} + u_j (h_{j+1/2} - h_{j-1/2}) - (v_j - D(x)h) = 0, \quad (96)$$

donde $\Delta x = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$.

Esta ecuación es resuelta en forma similar a las ecuaciones de Continuidad y Navier-Stokes y la integración en tiempo con el esquema explícito con paso de tiempo local.

Luego de haber actualizado la forma de la superficie libre usando la condición cinemática de esta, una nueva malla, ajustada a la nueva frontera, es generada. Esto es logrado trasladando verticalmente los nodos de la malla bajo la superficie libre, [1], [7] y [8].

$$x_j^{n+1} = x_j^n \quad (97)$$

$$y_j^{n+1} = \begin{cases} y_u + A \frac{h^{n+1}(x_j) - y_u}{h^n(x_j) - y_u} (y_j^n - y_u), & \text{si } y_j^n > y_u \\ y_j^n, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (98)$$

Entonces, para resolver los problemas con influencia de una superficie libre, debe agregarse un paso adicional al proceso descrito en el capítulo anterior, como se muestra en la Figura 19 a). El proceso es finalizado solo si la variación de la posición de la superficie libre es menor o igual a una tolerancia definida, en este caso se utilizará un valor de 10^{-4} .

Finalmente en la figura 19 b) se presenta la estructura del programa implementado, para lo cual fue necesario el uso de subrutinas adicionales, tales como READER, CELLANLS, y UNSTRUCTURED, para hacer más fácil la realización de modificaciones por otros usuarios.

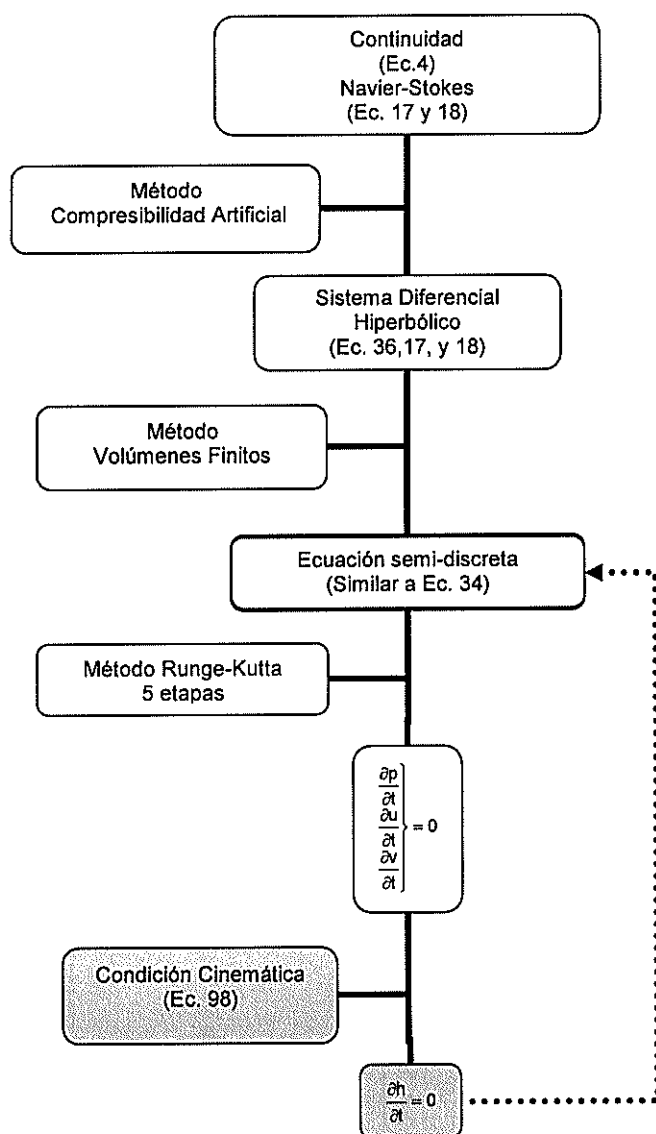


Figura 19 a)

Proceso de discretización desarrollado por Hino con actualización de la superficie libre

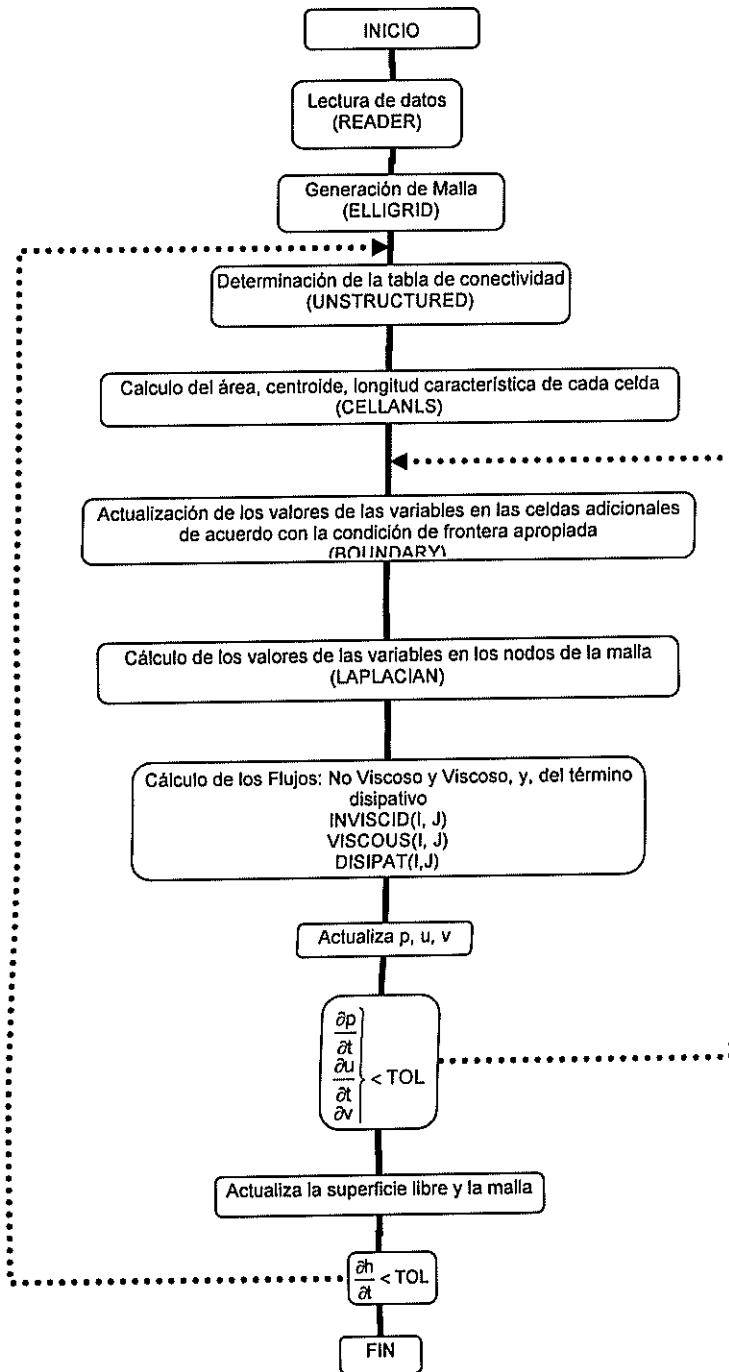


Figura 19 b)
Flujograma del programa implementado

CAPÍTULO 4

APLICACIONES

En el presente capítulo se presentarán tres casos que fueron analizados utilizando el paquete computacional desarrollado como parte de la tesis; todos consideran al agua a 20°C como el fluido analizado. El primer problema es el flujo a lo largo de un ducto 2D de sección constante, en el que se analizó el efecto del refinamiento de la malla y la influencia del valor del número CFL sobre la razón de convergencia del proceso implementado. Luego se analizó el flujo dentro de un ducto 2D con expansión 1:3, y, finalmente se analizó el caso del flujo sobre un cuerpo sumergido con influencia de la superficie libre. Todos los resultados numéricos serán comparados con resultados analíticos y experimentales.

Los cálculos fueron realizados utilizando una computadora portátil con procesador PENTIUM IV, 3.3 GHz, 1 Gb de RAM, y el criterio adoptado para

obtener una solución convergida fue que el valor máximo del residuo, $\max(u_i^{n+1} - u_i^n, v_i^{n+1} - v_i^n, p_i^{n+1} - p_i^n)$, donde i va desde 1 hasta el número de celdas, de las ecuaciones de conservación, sea menor o igual a 10^{-9} .

En todos los casos, ningún modelo de turbulencia fue implementado, es decir, solo se considera flujo laminar. Esta simplificación no es adecuada en los flujos analizados debido a los altos números de Reynolds estudiados en este trabajo. Sin embargo, la intención de este trabajo es ganar experiencia en el tratamiento de flujos gobernados por las ecuaciones de Navier-Stokes en régimen laminar. La simulación de flujos turbulentos está fuera del alcance de esta tesis y representa un paso futuro en el proceso de desarrollo del grupo.

Las mallas no estructuradas fueron creadas transformando cada celda rectangular, obtenida utilizando el método de Generación Elíptica, en dos celdas triangulares. Todas las tablas de conectividad fueron generadas automáticamente y una estructura de datos basado en los volúmenes de control fue implementado. Aunque este procedimiento de generación de malla no es la mejor en términos de discretización espacial, una razonable calidad fue obtenida en los presentes problemas.

4.1 Ducto de Sección Constante

Este caso fue escogido debido a que corresponde a la solución teórica más simple de las ecuaciones de Navier-Stokes [18] y físicamente representa a un flujo estable de un fluido viscoso entre dos placas paralelas separadas por una distancia d , bajo la asunción de que la dimensión horizontal de la pared es mucho mayor a d . Una solución similar puede ser obtenida para un flujo en un tubo de sección circular constante; para flujos laminares, esta solución es físicamente importante por su cercanía al caso de caídas de presión en tuberías.

Desarrollo Teórico

En el problema analizado se consideró la frontera de entrada como flujo libre. De acuerdo con Streeter, [18], en la sección A-A, de la figura 20, cerca de la entrada el perfil de velocidad es uniforme a través de la sección transversal. Después de una longitud de transición L' , el perfil de velocidad alcanza una distribución que se mantiene estable en adelante.

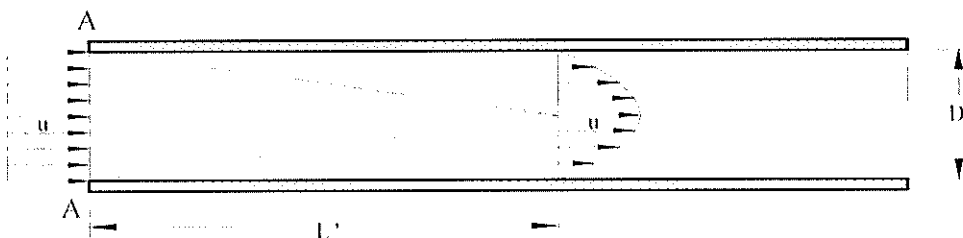


Figura 20
Zona de entrada de una tubería

La longitud de transición, L' , es una función del número de Reynolds; para flujo laminar, Streeter, [18], presenta la formulación desarrollada por Langhaar en forma teórica para tubos circulares:

$$\frac{L'}{D} = 0.058 Re, \quad (99)$$

donde Re es el número de Reynolds.

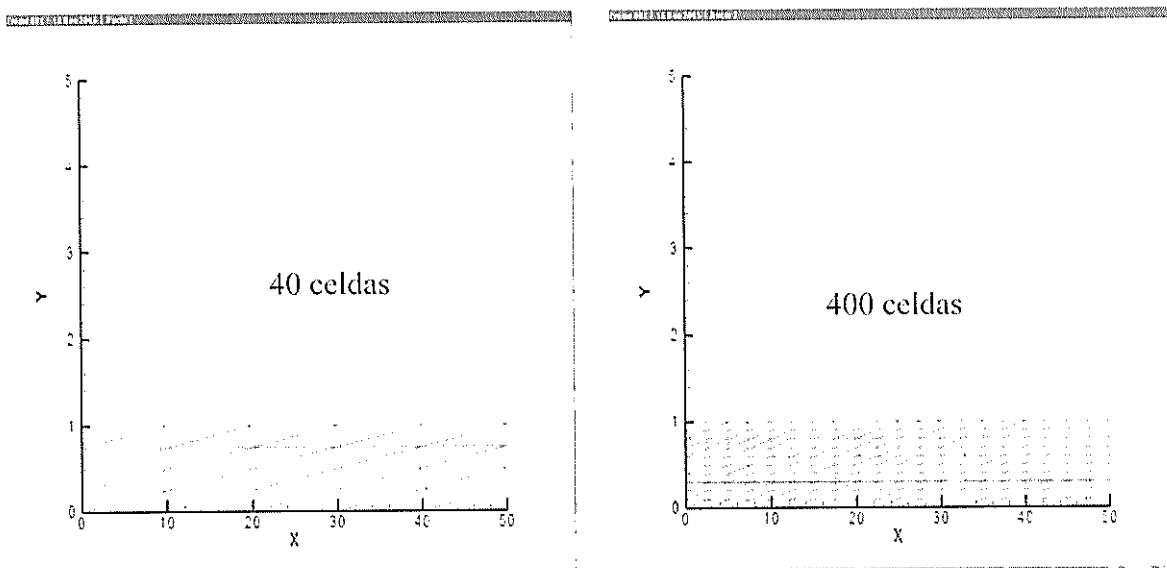
Luego de la longitud de transición, el flujo puede ser considerado como desarrollado, lo que quiere decir que el perfil de velocidades no sufre variación en dirección x ; en cambio la presión presenta una variación lineal negativa.

Desarrollo Numérico

El número de Reynolds empleado en este caso fue de 10^5 , y la separación entre placas será considerada como 0.01 m., además el valor de la viscosidad cinemática es $1.007E-6$ [m^2/s], por lo que la velocidad del flujo libre es:

$$U = \frac{10^5 * 1.007 * 10^{-6} \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]}{0.02[\text{m}]} = 5.035 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

En este problema, primero se intentó establecer la influencia del refinamiento de la malla en la calidad de la respuesta obtenida, para lo cual se comparó solamente la variación de la presión en la dirección x. Se consideraron dos casos en su forma no dimensional, el primero divide al dominio en 40 celdas, y el segundo en 400, como se muestra en la figura 21:



a) Caso I

b) Caso II

Figura 21

Alternativas empleadas en la discretización del dominio físico

El número CFL utilizado en ambos casos fue de 1.0 y el número, ε , utilizado en el término de disipación, definido en la ecuación (60) del capítulo anterior, fue de 0.1. Como se ve en la figura 22, el caso I utiliza 34 iteraciones y el caso II solo 20, esto se debe al mayor número de celdas utilizadas, aunque el tiempo computacional utilizado en el primer caso fue de 9 minutos 35 segundos y del caso II fue de 53 minutos y 53 segundos, es decir el caso II converge en aproximadamente 6 veces más tiempo.

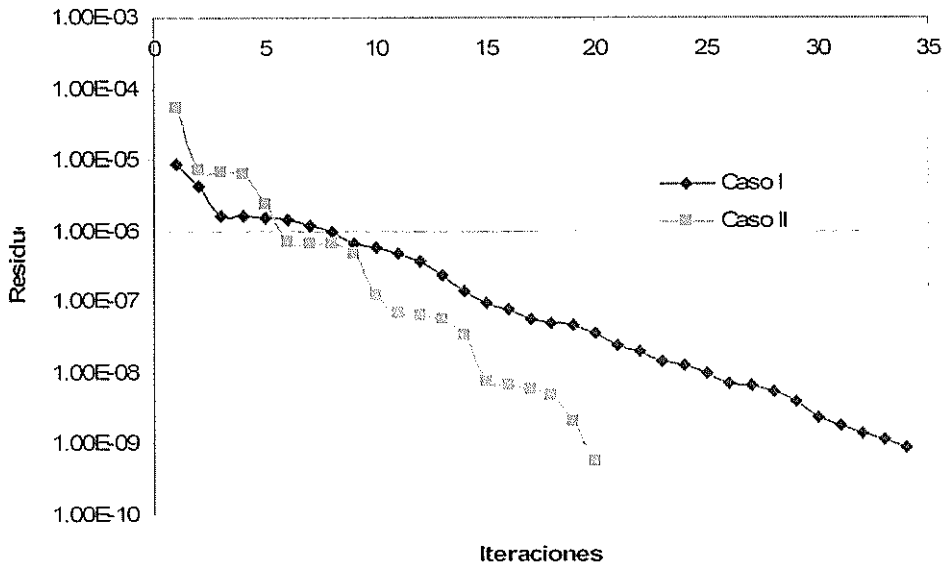


Figura 22
Historia de Convergencia de ambos casos

Comparando la variación de presión en la dirección x de ambos casos, como se muestra en la figura 23, se puede concluir que la discretización en el primer caso es pobre, obteniéndose una distribución de presión con muchas discontinuidades. En el caso II, la distribución de presión obtenida es

razonablemente continua por lo que los resultados de este caso serán utilizados para la validación del método.

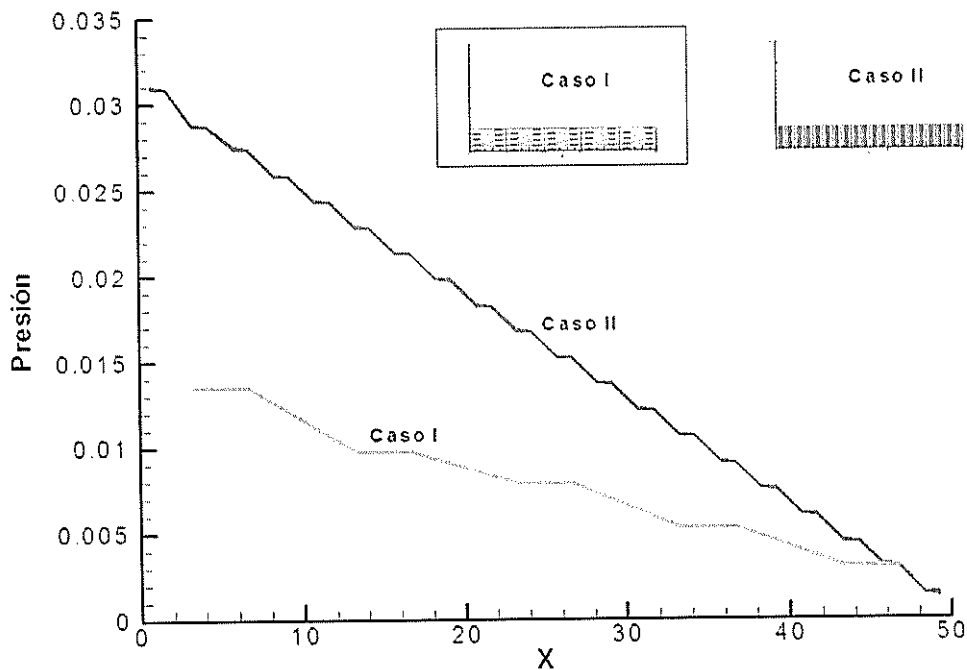
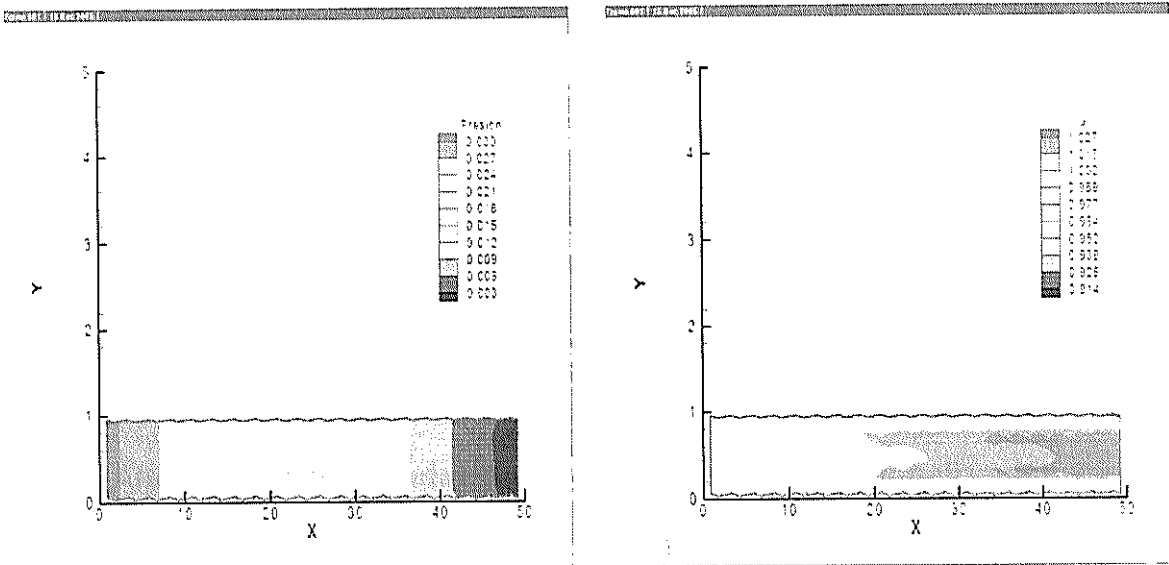


Figura 23
Variación de presión de casos I y II

Por último, analizando cualitativamente los resultados obtenidos mostrados en la figura 24, se puede afirmar que:

- La variación de la presión en la dirección y es prácticamente nula, en concordancia con la teoría,
- El perfil de velocidades en la entrada es casi uniforme, y,

- La velocidad en la zona central aumenta conforme avanza en la dirección x.



a) Contorno de presión

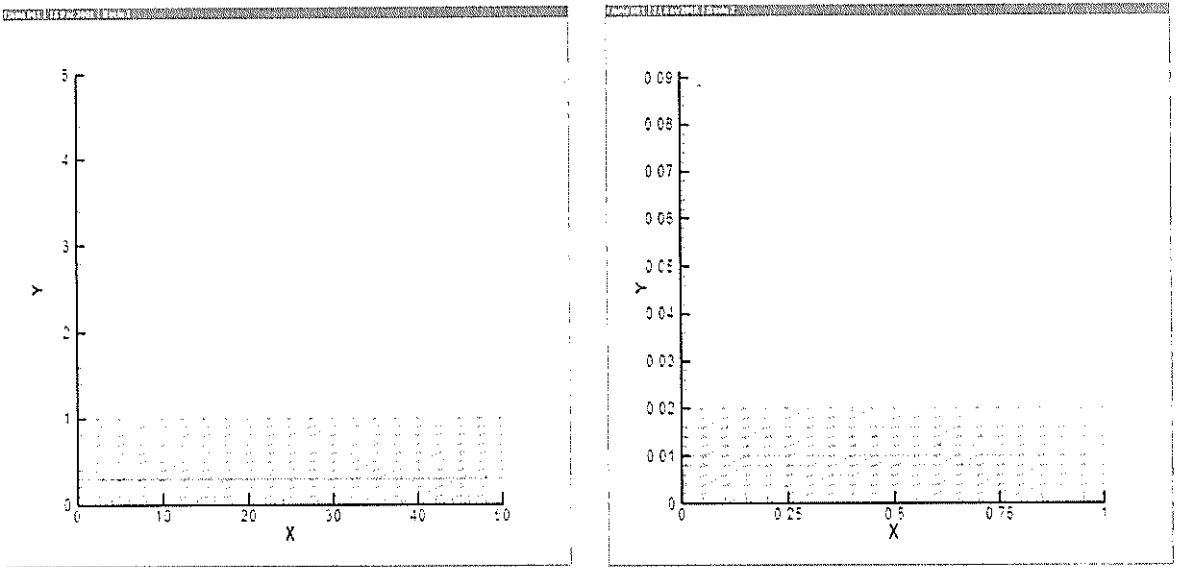
b) Contorno de velocidad

Figura 24

Variación de presión y velocidad

Influencia de la longitud de referencia utilizada en el proceso de adimensionalización

Para obtener las ecuaciones de Navier-Stokes en su forma adimensional se utilizaron las relaciones propuestas por Chorin [5] que incluyen una longitud de referencia. Para comprobar la dimensión utilizada como longitud de referencia se compararán dos casos, como se muestra en la figura 25, en el primero se utilizó el diámetro del ducto, y, en el segundo la longitud del ducto como longitudes de referencia.



a) Diámetro

b) Longitud

Figura 25

Alternativas empleadas en el proceso de adimensionalización

Tomando en cuenta la ecuación (99), se puede decir que la longitud de transición con un número de Reynolds de 10^5 , es de 5800 veces el diámetro. En la figura 26 se presentan los contornos de velocidad obtenidos para ambos casos. En el caso en el que se utilizó el diámetro como longitud de referencia, el perfil de velocidades es aproximadamente uniforme con pequeñas variaciones con respecto al eje x, y, en el caso donde se utilizó la longitud de la placa como referencia, la longitud de transición es aproximadamente 28 veces el diámetro, lo cual está muy por debajo de lo calculado con la ecuación (99). Por lo que se confirma lo afirmado por varios autores, cuyas formulaciones utilizan el diámetro del tubo para definir el número de Reynolds.

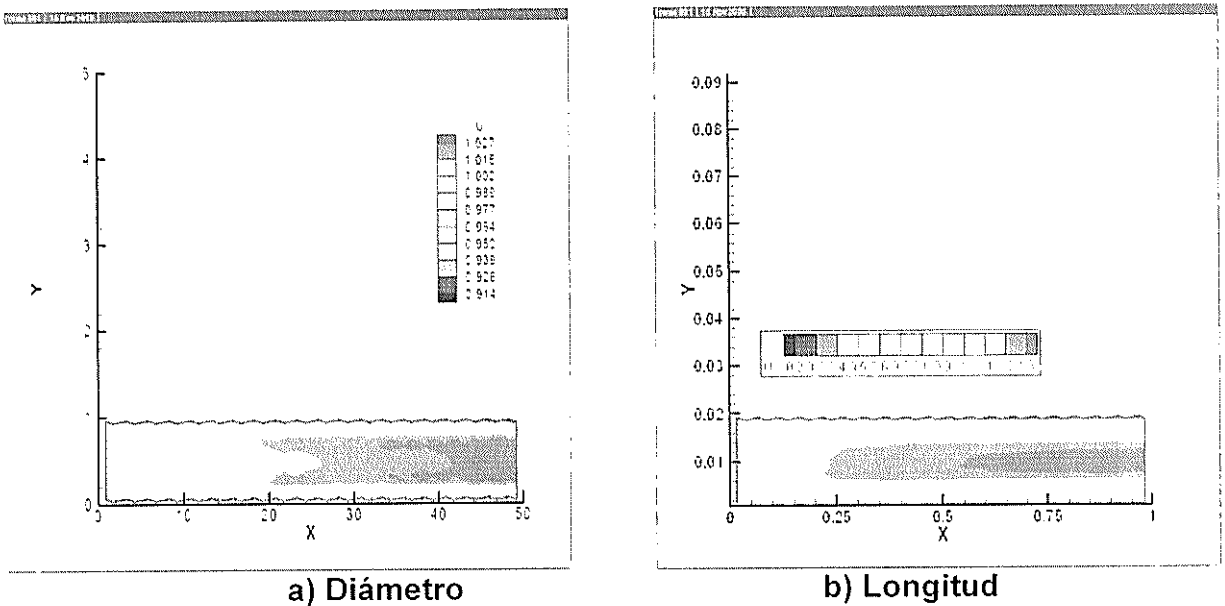


Figura 26
Contorno de velocidades

Longitud de transición

La solución teórica para este problema considera al flujo como completamente desarrollado después de sobrepasar la longitud de transición, evaluada de acuerdo a la ecuación (99), presentada anteriormente. Además, ya se demostró que la longitud de referencia preferible es el diámetro. El siguiente paso es comparar la longitud de transición obtenida de manera numérica con los valores obtenidos con la ecuación (99). Ahora bien, ya se determinó que con un número de Reynolds de 10^5 esta longitud de transición es igual a 5800 veces el diámetro, por lo que se necesitaría simular al menos 10000 veces el diámetro y no 50 como se lo hizo; esto aumentaría más de 200 veces el tiempo computacional empleado, que fue de aproximadamente una hora

en el caso de 50 veces el diámetro. Se decidió entonces utilizar una malla que tenga una longitud de 100 veces el diámetro con la misma densidad de celdas, es decir se emplearán 800, (80x10), como se muestra en la Figura 27.

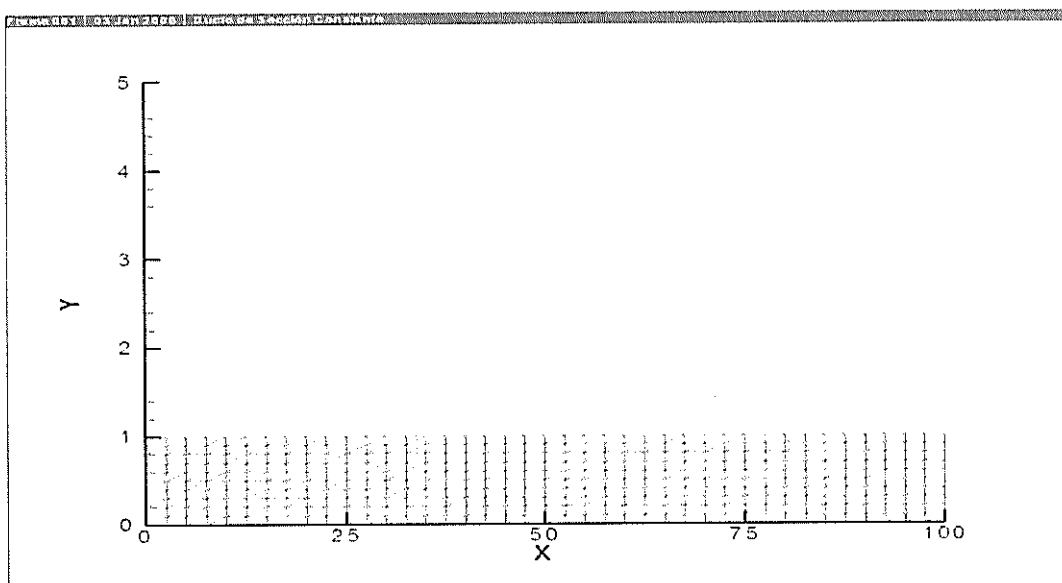


Figura 27
Malla utilizada para simular un ducto de longitud igual a 100 veces el diámetro

En la figura 28 se presenta el historial de convergencia de cada caso analizado, en los que se varió el número de Reynolds de 100 a 10000. De acuerdo con Swanson, [19], para flujos viscosos las propiedades disipativas están presentes en los términos asociados con la viscosidad, sin embargo debido a la no linealidad del sistema de ecuaciones la disipación física puede no ser suficiente, como se muestra en la figura

28. Al aumentar el número de Reynolds empiezan a presentarse pequeñas discontinuidades en la variación del residuo, a pesar del menor número de iteraciones necesarias para alcanzar la convergencia.

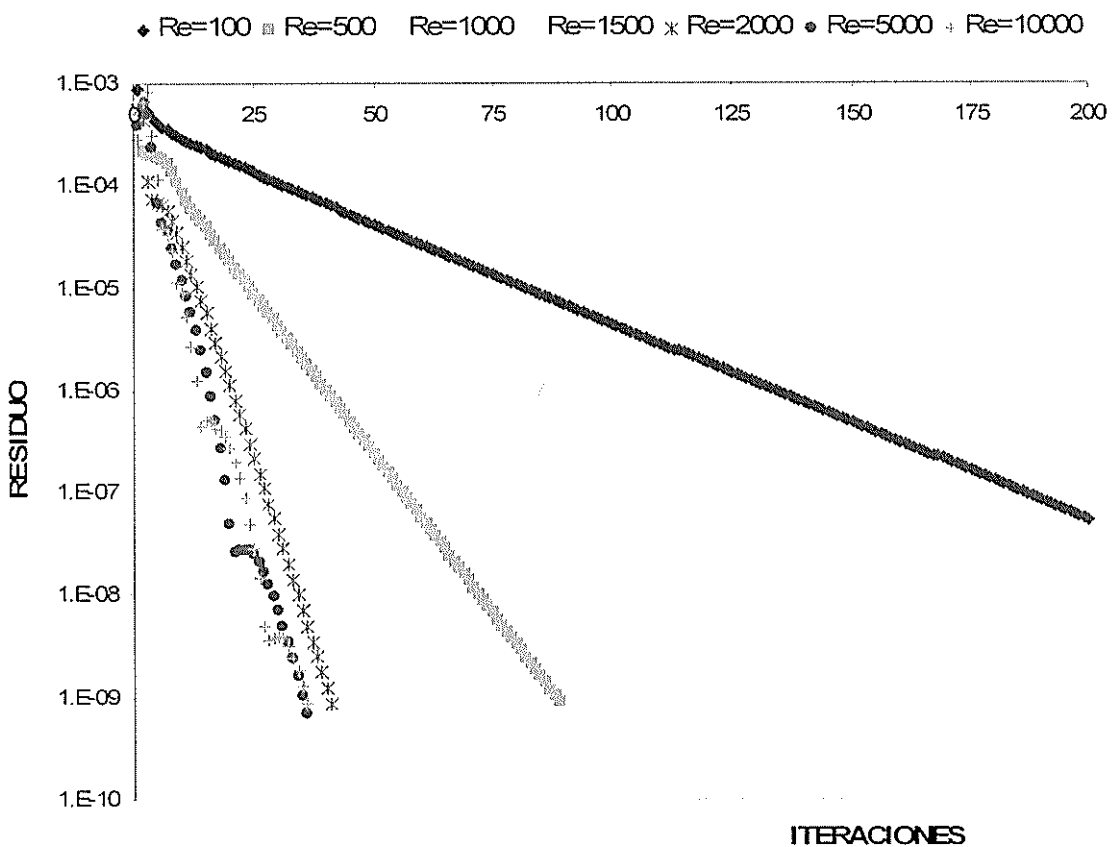


Figura 28
Convergencia para diferentes números de Reynolds

En la figura 29 se presentan los contornos de velocidad para diferentes números de Reynolds. De acuerdo con Langhaar, la longitud de transición depende del número de Reynolds, y es en este tramo del ducto

donde se producen fuertes variaciones en el perfil de velocidad. Esto fue confirmado por las figuras 29 (a) –(f), ya que al aumentar el número de Reynolds aumenta la longitud de la zona con fuertes variaciones en la velocidad. En la figura 29 e), se muestran los perfiles de velocidad en cinco secciones, en la primera el perfil es casi uniforme, y a medida que se va moviendo a la derecha la distribución de velocidades tiende a estabilizarse.

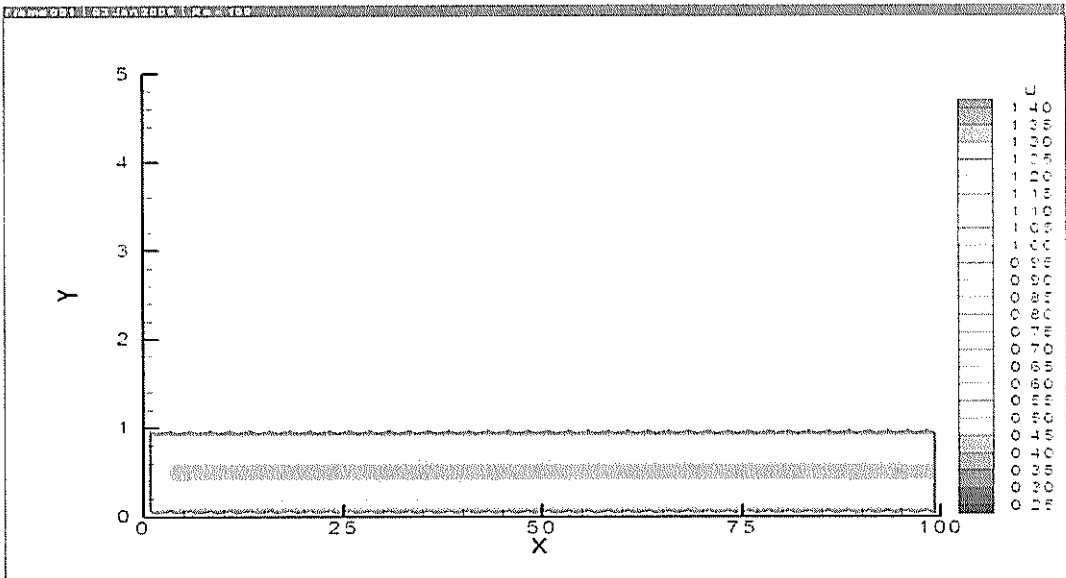


Figura 29 a) $Re = 100$

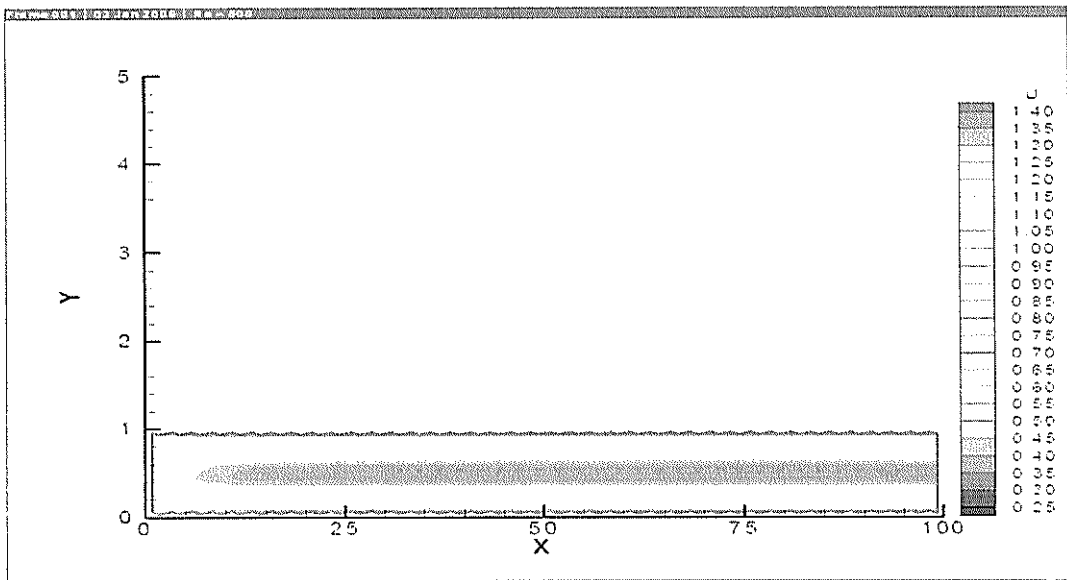


Figura 29 b) $Re = 500$

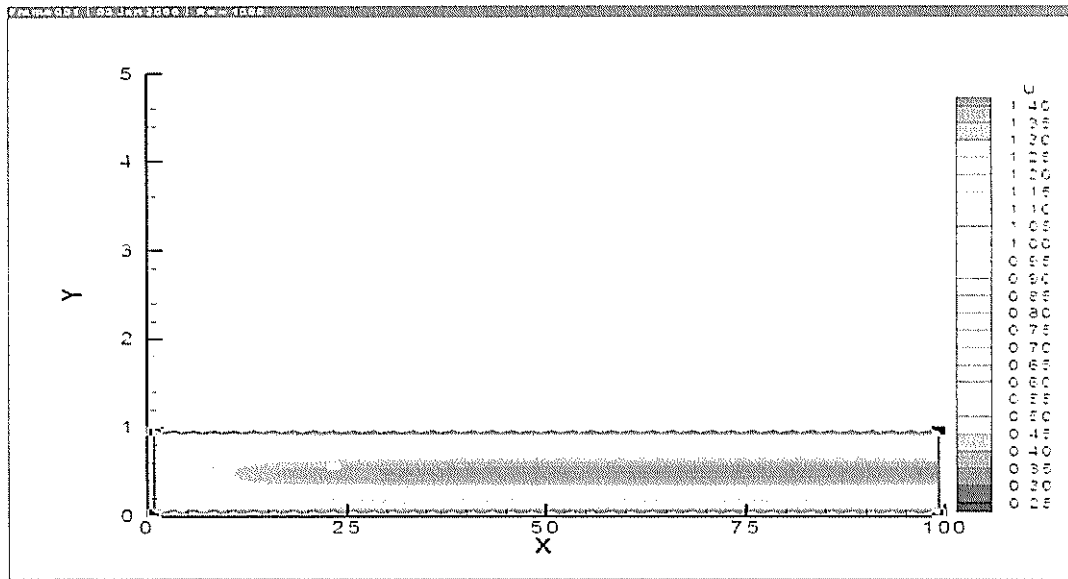


Figura 29 c) $Re = 1000$

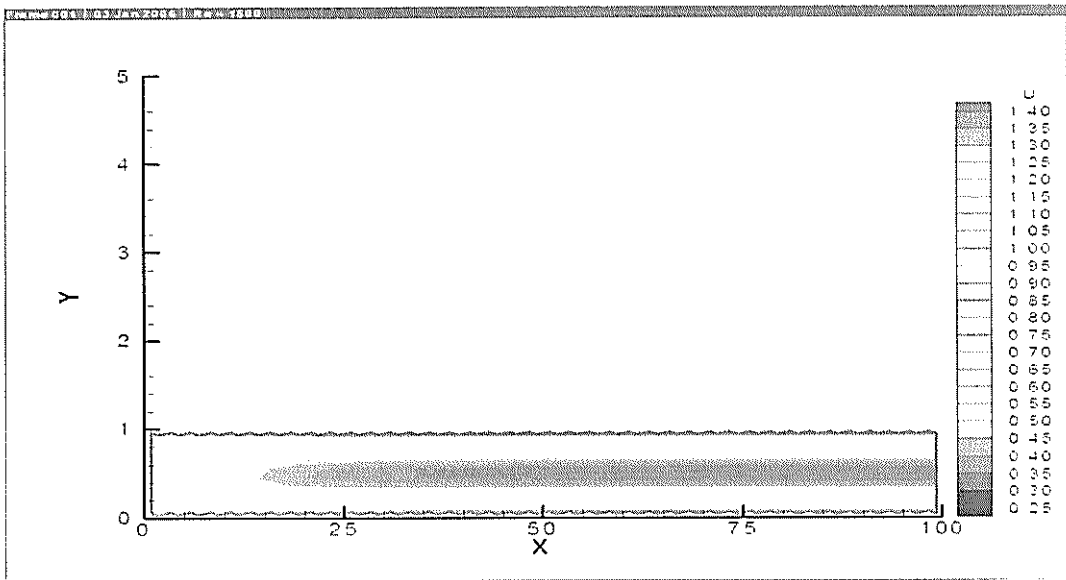


Figura 29 d) $Re = 1500$

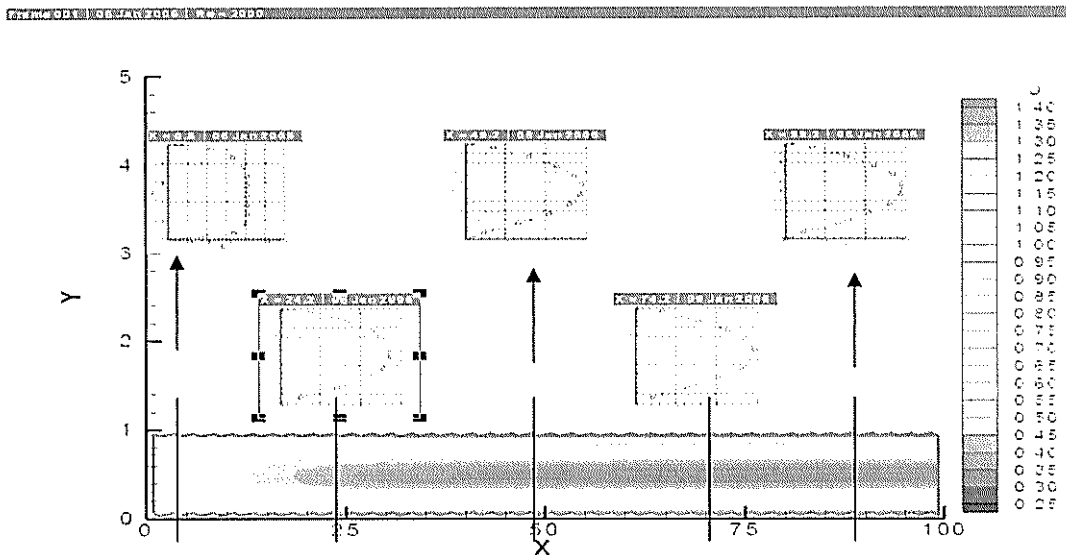


Figura 29 e) $Re = 2000$

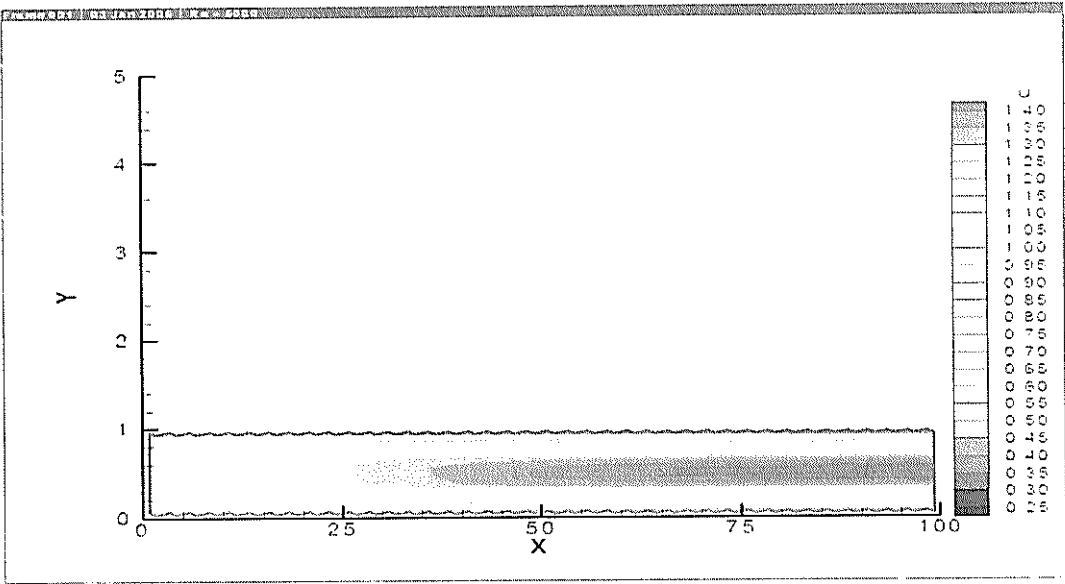


Figura 29 f) $Re = 5000$

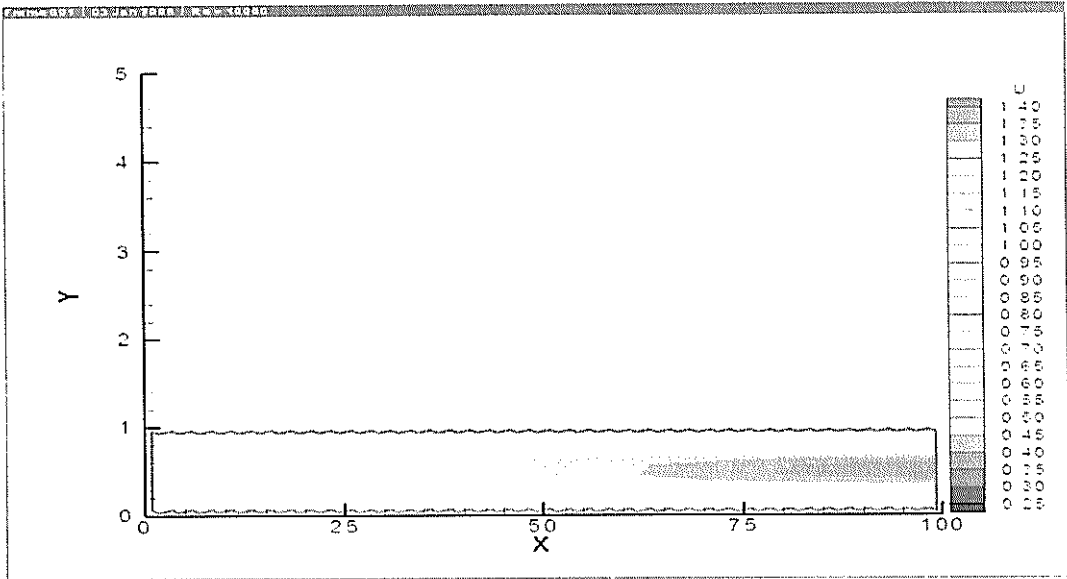
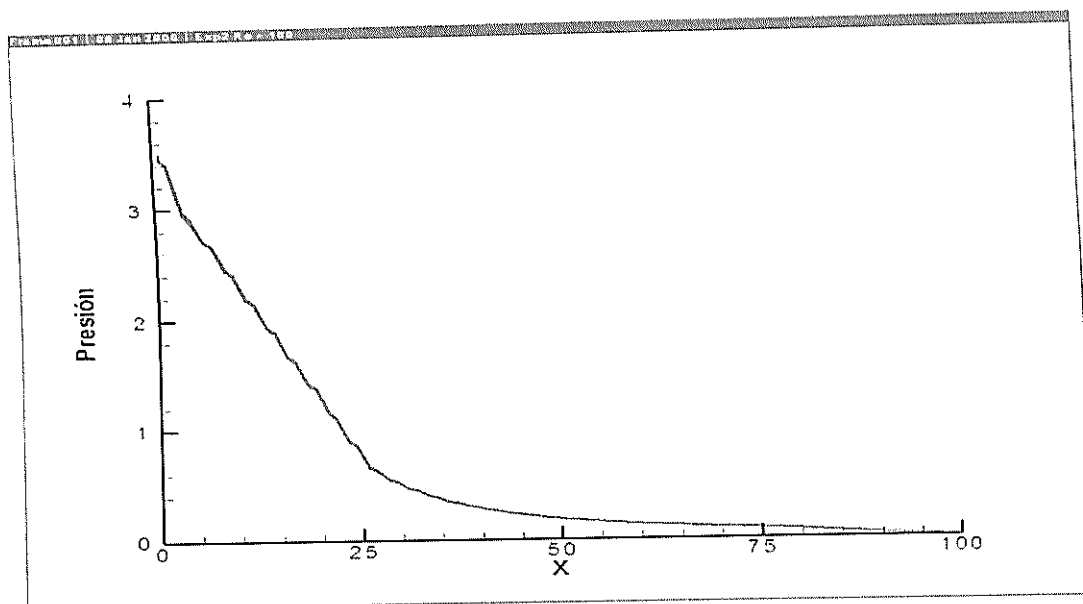
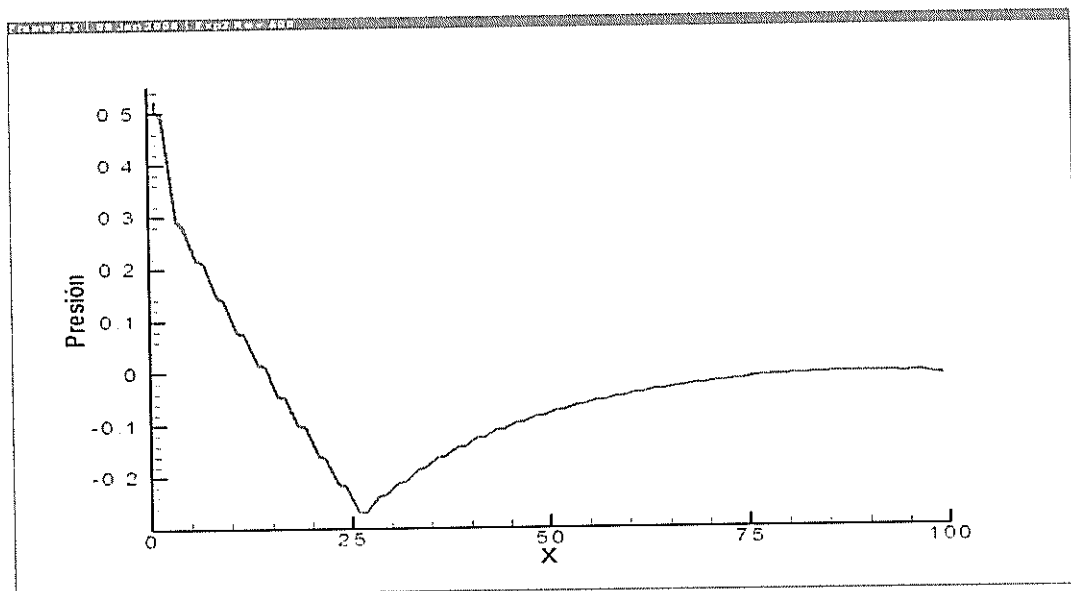
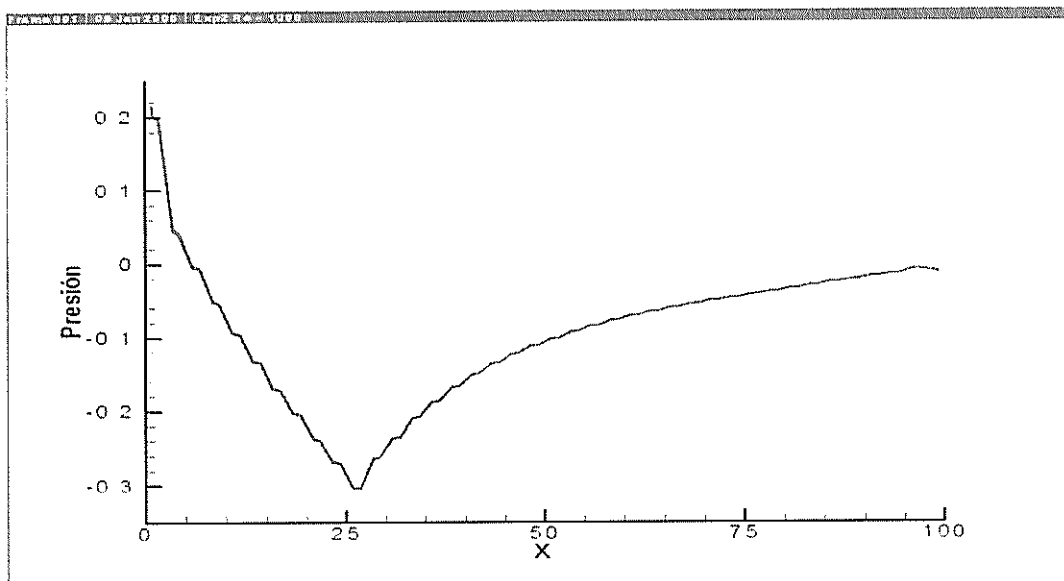
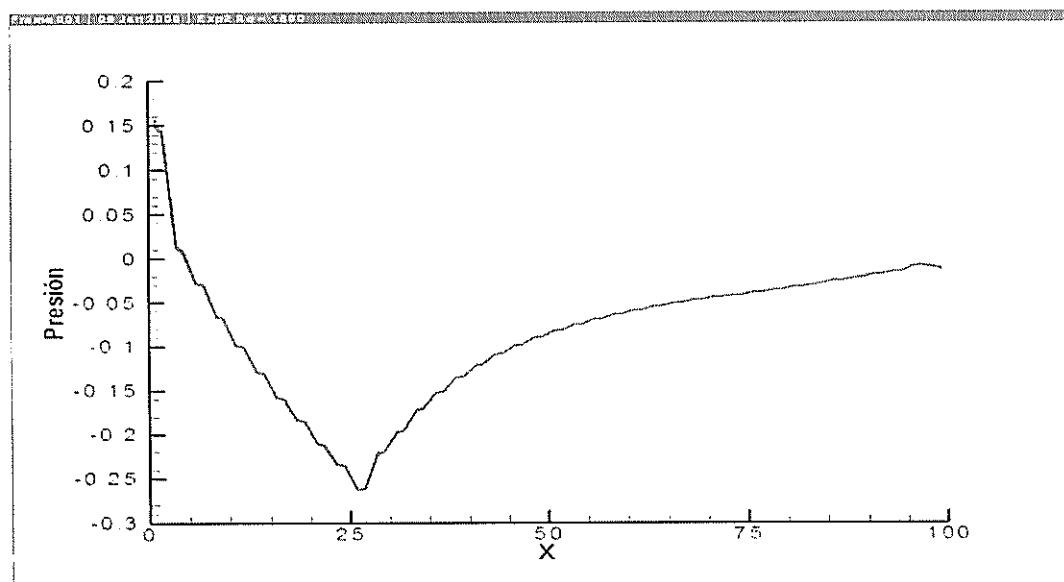


Figura 29 g) $Re = 10000$

Figura 29
Contorno de velocidad para diferentes números de Reynolds

Figura 43 a) $Re = 100$ Figura 43 b) $Re = 500$

Figura 43 c) $Re = 1000$ Figura 43 d) $Re = 1500$

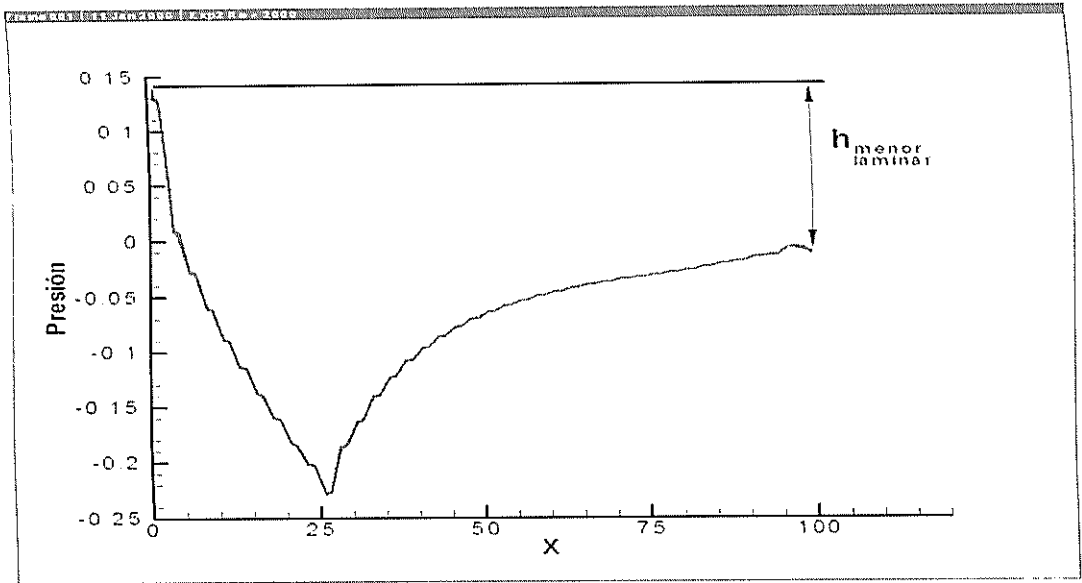


Figura 43 e) $Re = 2000$

Figura 43
Distribución de presión en la expansión II con diferente números de Reynolds

4.3 Solución ideal analítica para flujo sobre cuerpo sumergido bidimensional

Según Fox, [6], en los problemas sobre flujo en canales con fondo horizontal predominan los efectos de la sección transversal (cambio de área) y puede ignorarse el efecto de la fricción, por lo que la ecuación de energía puede escribirse como una forma de la ecuación de Bernoulli.

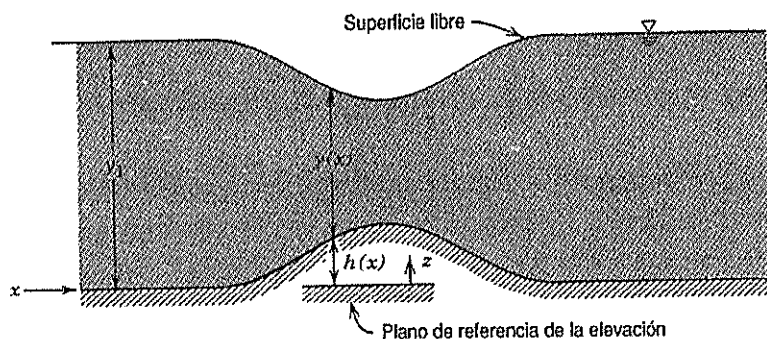


Fig. 10.5 Flujo en canal abierto sobre una protuberancia en una plantilla de canal horizontal.

Figura 44 Descripción del problema Fuente: Fox, [6], página 552.

Se considera un flujo sin fricción en un canal rectangular horizontal de ancho constante, b , con una protuberancia en el fondo del canal, como se ilustra en la figura 44. La altura de la protuberancia sobre la horizontal del canal es $h(x)$; la profundidad del agua, $y(x)$, se mide desde la superficie local del fondo del canal. Se supone que el flujo será uniforme en cada

sección. El objetivo es investigar la forma de la superficie libre cuando el flujo pasa sobre la protuberancia.

Como el flujo es estable, incompresible y sin fricción, se puede aplicar la ecuación de Bernoulli a lo largo de una línea de corriente,

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constante} \quad (101)$$

Al aplicar la ecuación a lo largo de la línea de corriente de la superficie libre entre la posición 1 aguas arriba y el punto sobre la protuberancia, se obtiene

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + y_1 = \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + y + h \quad (102)$$

Puesto que la presión es la atmosférica a lo largo de la superficie libre, $p_1 = p = p_{atm}$, y

$$\frac{V_1^2}{2g} + y_1 = \frac{V^2}{2g} + y + h = \text{constante} \quad (103)$$

La relación de flujo volumétrico es una constante. De tal modo, de la continuidad para flujo estable, incompresible y uniforme en una sección,

$$\frac{Q}{b} = V_1 y_1 = Vy \quad (104)$$

La sustitución de V_1 y V en la ecuación (103) produce:

$$\frac{Q^2}{2gb^2y_1^2} + y_1 = \frac{Q^2}{2gb^2y^2} + y + h = \text{constante} \quad (105)$$

Se puede obtener una expresión para la variación de la profundidad de la superficie libre diferenciando la ecuación superior

$$-\frac{Q^2}{gb^2y^3} \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} + \frac{dh}{dx} = 0, \quad (106)$$

Al resolver para la pendiente de la superficie libre, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dh}{dx}}{\left[\frac{Q^2}{gb^2y^3} - 1 \right]} = \frac{\frac{dh}{dx}}{\left[\frac{V^2}{gy} - 1 \right]} = \frac{\frac{dh}{dx}}{Fr^2 - 1} \quad (107)$$

Donde, el número de Froude local se define como:

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gy}}$$

Examinando la ecuación (107) se puede concluir que la pendiente de la superficie libre depende del número de Froude local. Para $Fr < 1$, un aumento en la elevación del fondo ocasiona una disminución en la profundidad del agua; una disminución en la elevación del fondo provoca el aumento de la profundidad del agua. En el caso de $Fr > 1$, un aumento en la elevación del fondo causa un incremento en la profundidad del agua; una reducción en la elevación del fondo produce la reducción de la profundidad del agua, véase la figura 45 presentada por Fox, [6].

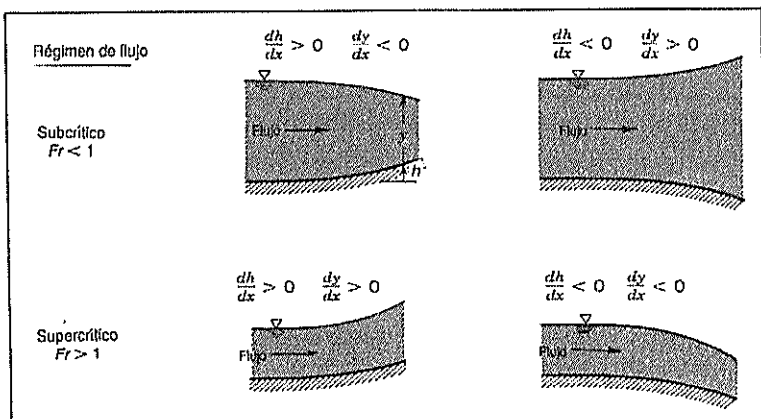


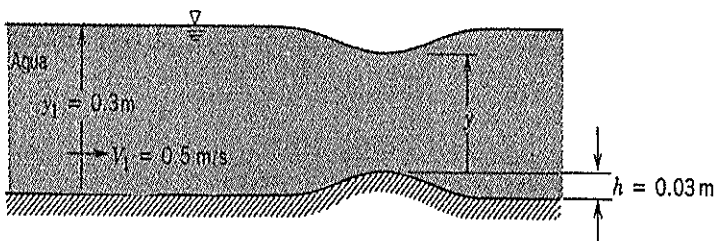
Figura 45
Efecto de los cambios de la elevación de la plantilla en la
profundidad del agua en el flujo en canal abierto
Fuente: Fox, [6], página 553.

Cuando el número de Froude es la unidad, la ecuación (107) predice una pendiente infinita de la superficie del agua, a menos que dh/dx sea igual a cero. Puesto que la pendiente de la superficie libre no puede ser infinita, entonces dh/dx debe ser cero cuando $Fr = 1$; un número de Froude igual a la unidad solo puede existir en el sitio donde $dh/dx = 0$.

Fox, [6], presenta la resolución de un problema de este tipo en el ejemplo 10.2, que considera agua fluyendo por un canal rectangular horizontal. La velocidad y la profundidad del flujo en la sección 1 son 0.5 m/s y 0.3 m, respectivamente, tal como se muestra en la figura 46. El flujo pasa sobre una protuberancia lisa, de 0.03 m de altura, en el piso del canal. Se pide calcular la velocidad y la profundidad del flujo directamente arriba del pico de la protuberancia.

PROBLEMA EJEMPLO 10.2

DATOS: Un flujo de agua en un canal rectangular horizontal. Se desprecian los efectos de la fricción.



ENCUENTRE: La velocidad y la profundidad del flujo arriba del pico de la protuberancia.

Figura 46
Datos del ejemplo 10.2,
Fuente: Fox, [6], página 553.

Como se explicó anteriormente, se puede aplicar la ecuación de Bernoulli a lo largo de una línea de corriente sin fricción. Sobre la superficie libre la presión es constante, por lo que se obtiene la ecuación (103):

$$\frac{V_1^2}{2g} + y_1 = \frac{V^2}{2g} + y + h \quad (103)$$

En el caso de flujo uniforme en cada sección, la ecuación de Continuidad se reduce a $V_1 y_1 = Vy$. Estas dos ecuaciones nos permiten resolver para V y y ; el proceso de solución puede visualizarse empleando el diagrama de energía específica de la manera siguiente. De la ecuación (103):

$$E_1 = \frac{V_1^2}{2g} + y_1 = E + h = \frac{V^2}{2g} + y + h$$

O

$$E = E_1 - h$$

Al reemplazar los valores se obtiene:

$$E_1 = \frac{1}{2} \times (0.5)^2 \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right] \times \frac{1}{9.807} \left[\frac{\text{s}^2}{\text{m}} \right] + 0.3 [\text{m}]$$

$$E_1 = 0.3127 \text{ [m]}$$

Por último, la energía específica sobre la protuberancia es:

$$E = E_1 - h = (0.3127 - 0.03) \text{ [m]} = 0.2827 \text{ [m]}$$

Estos puntos se grafican sobre el diagrama de energía específica, véase la figura 47. Mediante un proceso iterativo se puede llegar a que la profundidad del flujo para este valor es:

$$y = 0.2666 \text{ [m]}$$

El cambio en el nivel de la superficie es:

$$\Delta = y + h - y_1 = 0.2666 + 0.03 - 0.3 \text{ [m]} = -3.4 \text{ [mm]}$$

La velocidad del flujo es:

$$V = V_1 \frac{y_1}{y} = 0.5 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \times \frac{0.3000 \text{ [m]}}{0.2666 \text{ [m]}} = 0.563 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

El diagrama de energía específica sugiere que el flujo podría pasar por la protuberancia aproximadamente a $E_1 - E_{\min} = 0.313 \text{ m} - 0.1978 \text{ m} = 0.115 \text{ m}$ de altura, sin alcanzar su velocidad crítica.

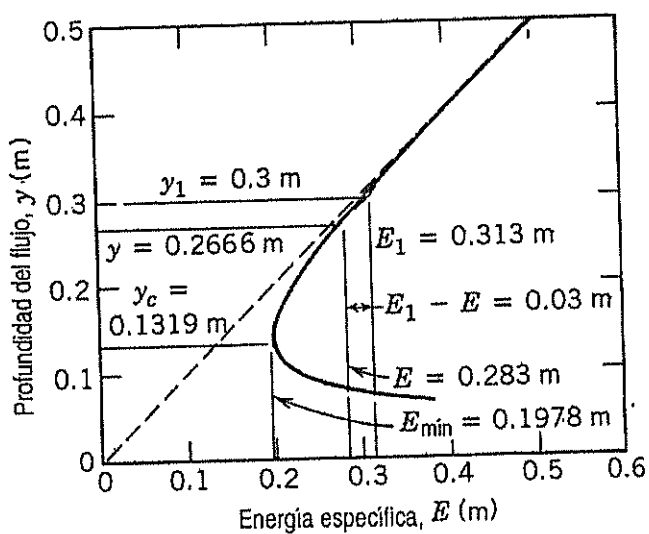


Figura 47
Diagrama de energía específica.
Fuente: Fox, [6], página 554.

4.4 Flujo viscoso laminar sobre un cuerpo sumergido con superficie libre

A continuación se va a resolver en forma numérica el ejemplo presentado en el libro de Fox y resumido en el subcapítulo anterior. El primer paso, fue determinar los números de Reynolds y Froude, para luego incluirlos en el archivo de datos previo a la realización de los cálculos. Al utilizar los datos indicados en el problema 10.2 de Fox, [6], se obtiene:

$$Fn = \frac{U}{\sqrt{gD}} = \frac{0.5 \left[\frac{m}{s} \right]}{\sqrt{9.8 \left[\frac{m}{s^2} \right] \times 0.3 [m]}} \approx 0.29,$$

$$Re = \frac{UL}{\nu} = \frac{0.5 \left[\frac{m}{s} \right] \times 0.3 [m]}{1.007 \times 10^{-6} \left[\frac{m^2}{s} \right]} \approx 1.5 \times 10^5$$

En las figuras 48 y 49 se presentan los dos dominios utilizados para la realización de la aproximación numérica. Según lo recomendado por Rausch, [17], se utilizó una longitud de 40 veces la profundidad, y se colocó un cuerpo senoidal en el fondo de 8 unidades de longitud, teniendo el primero (figura 48) una altura de 0.1 y el segundo (figura 49) una altura de 0.2.

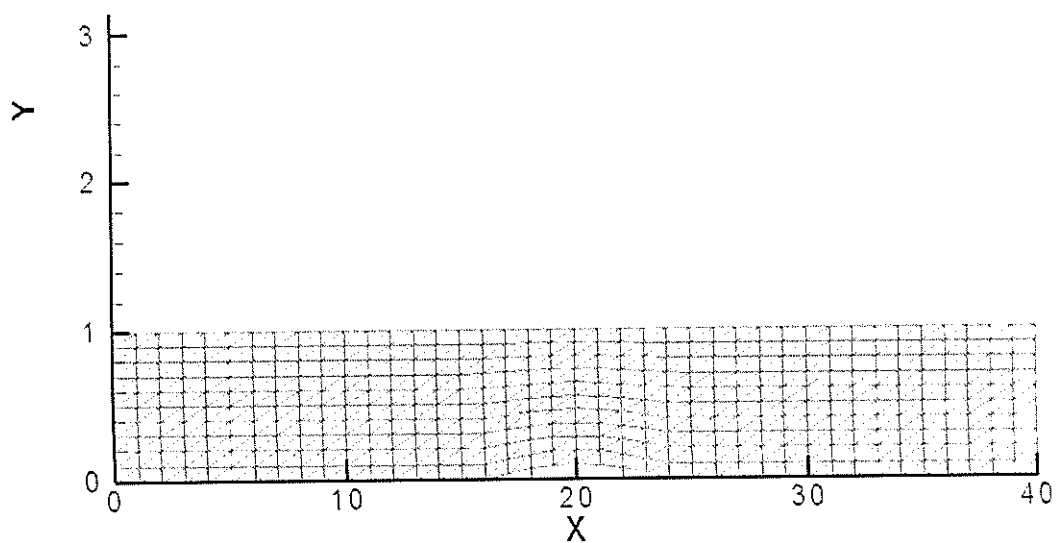


Figura 48
Malla utilizada para analizar el flujo sobre un cuerpo sumergido de 0.1 de altura

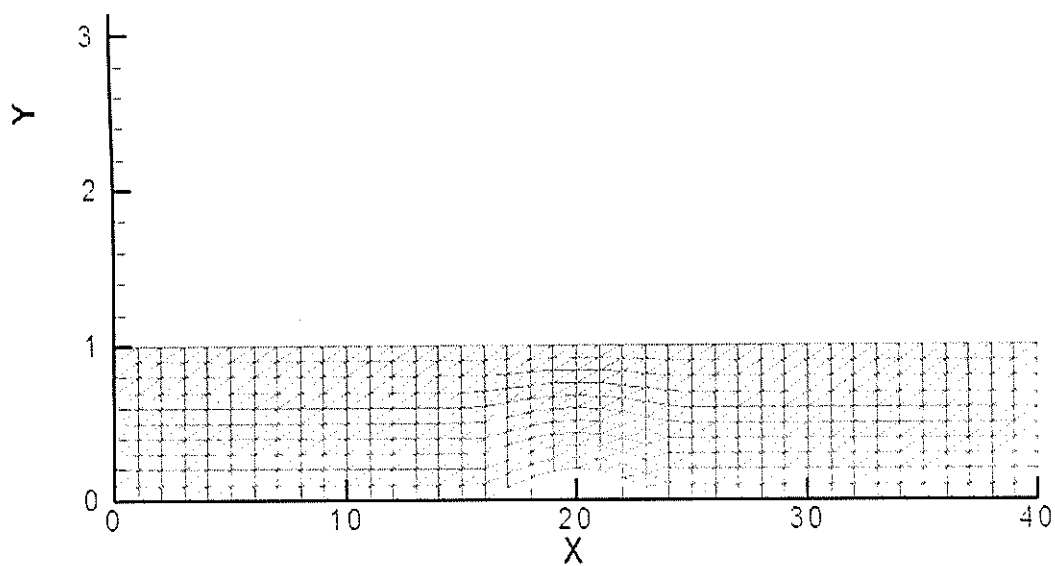


Figura 49
Malla utilizada para analizar el flujo sobre un cuerpo sumergido de 0.2 de altura

En las figuras 50 y 51, se presenta la variación de presiones en el dominio analizado inicialmente para cada caso, con la superficie libre asumida como horizontal. En ambas figuras se pueden distinguir dos zonas donde se concentran los mayores presiones, que corresponden a los puntos de estancamiento, en los que la velocidad es cero. Además, se distingue una zona de baja presión sobre el cuerpo senoidal, esto es debido al incremento en la velocidad.

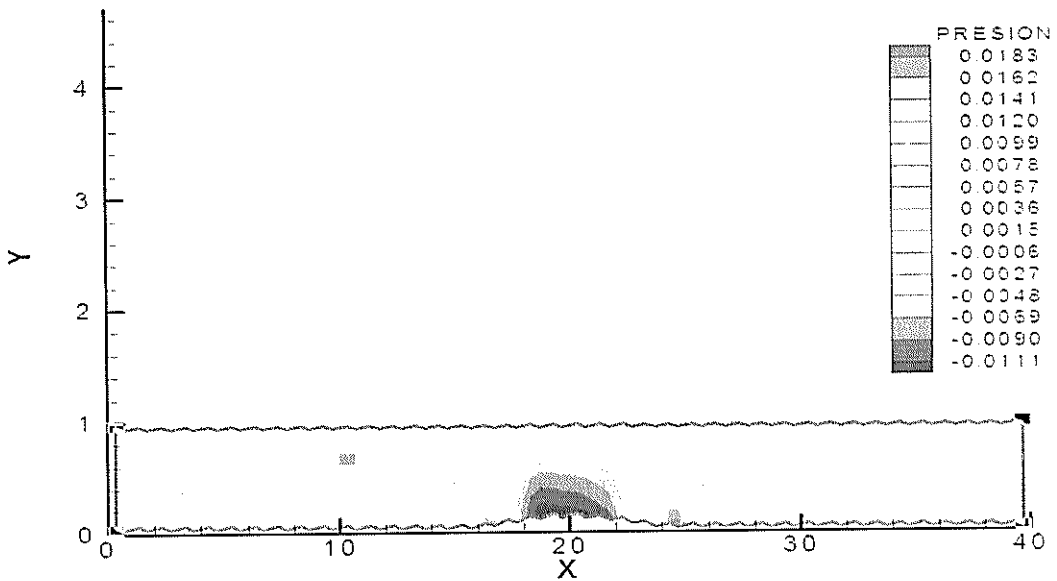


Figura 50
Contorno de Presiones para el cuerpo de 0.1 de altura luego de la primera iteración

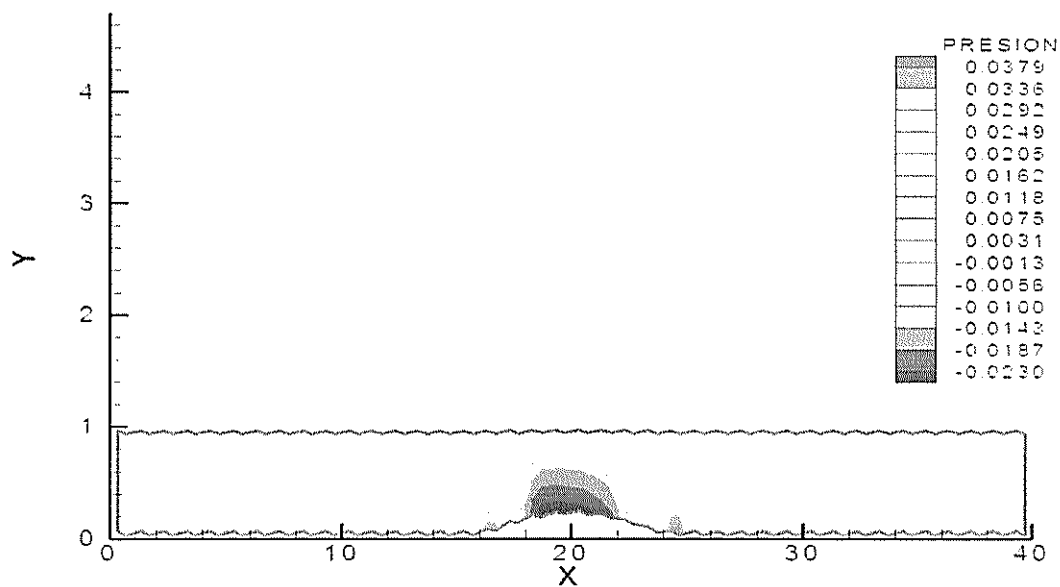


Figura 51
Contorno de Presiones para el cuerpo de 0.2 de altura luego de la primera iteración

En las figuras 52 y 53, se presenta la variación del flujo volumétrico promedio en la dirección x para cada caso analizado, luego de haber realizado la primera iteración. Aunque el valor adimensional teórico es de 1, tal como se dedujo en el subcapítulo 4.1, los valores calculados presentan una diferencia de 5% y 6% respectivamente.

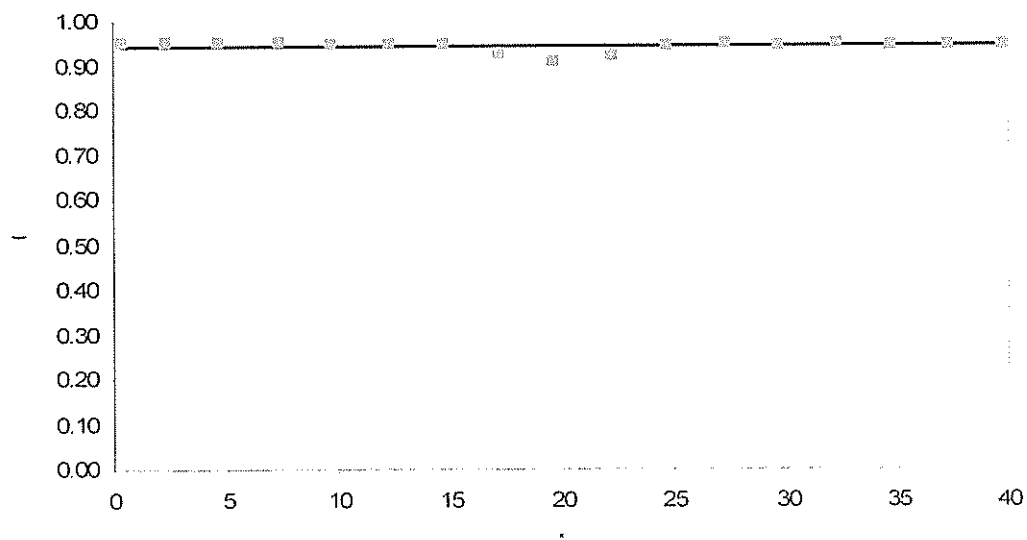


Figura 52

Caudal vs. X en la primera iteración del cuerpo sumergido con una altura de 0.1

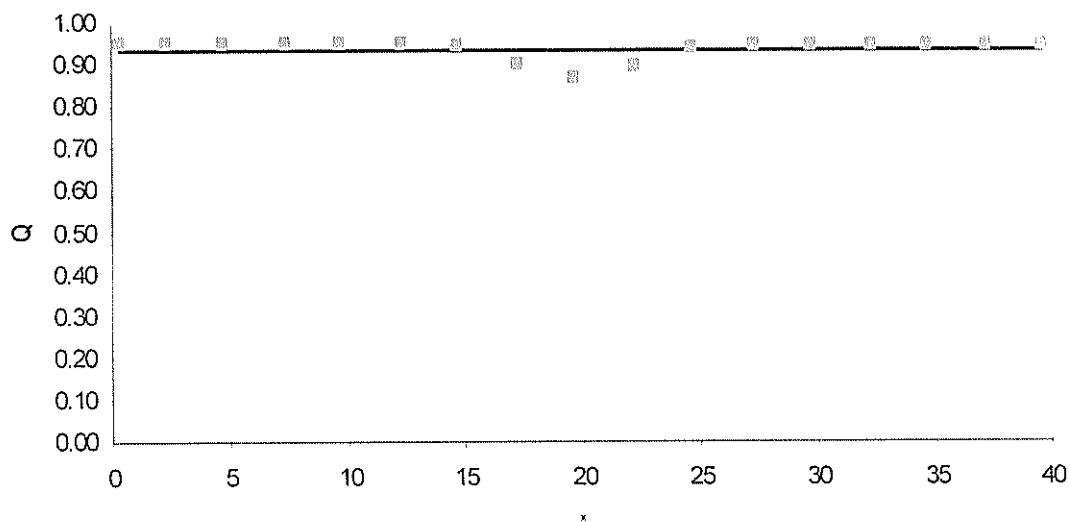


Figura 53

Caudal vs. X en la primera iteración del cuerpo sumergido con una altura de 0.2

En la figura 54 se presenta la evolución de la superficie libre en varias iteraciones del caso con el cuerpo sumergido de 0.1 de altura. Debido al comportamiento hiperbólico de la ecuación (96), utilizada para la actualización de la superficie libre, existe un límite de estabilidad para esta ecuación, por lo que no es posible utilizar pasos de tiempo relativamente grandes. Es por esto, que se utilizó un paso de tiempo de 10^{-4} . A pesar de ello, se puede distinguir una variación en la posición de la superficie libre en la zona por encima del cuerpo sumergido.

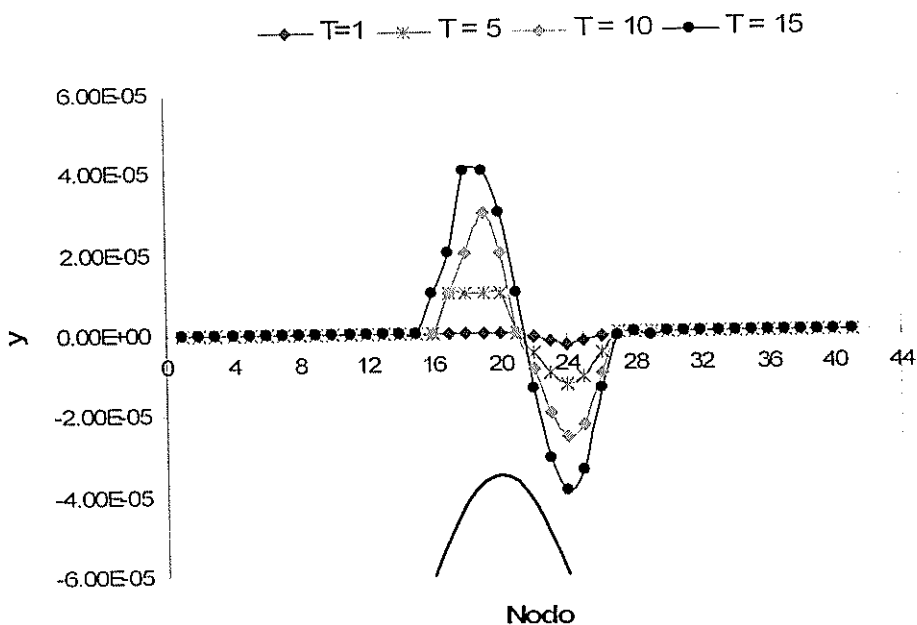


Figura 54 a)

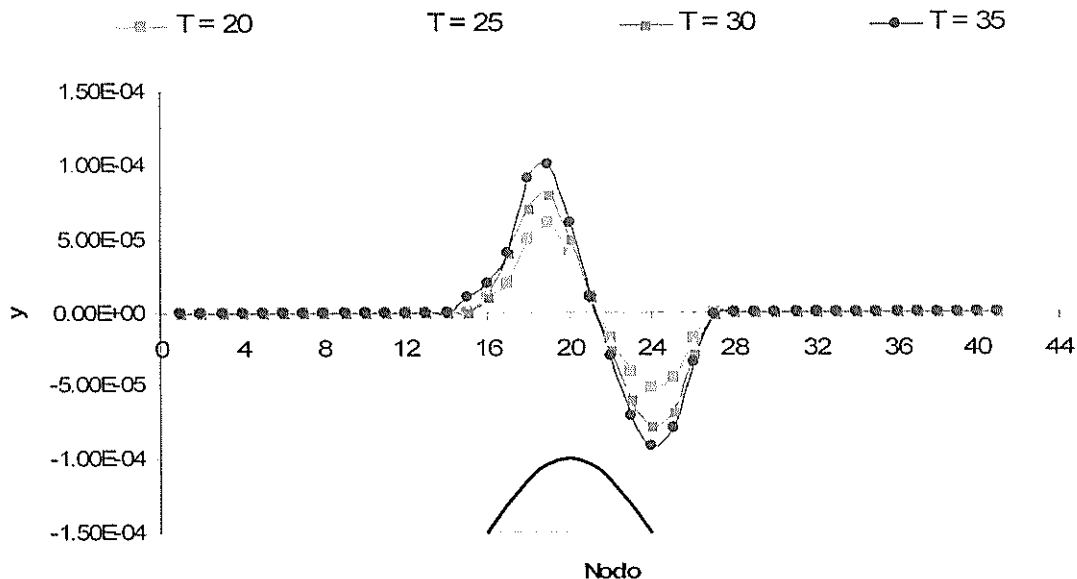


Figura 54 b)

Figura 54
Evolución de la Superficie Libre en varias iteraciones en el caso del cuerpo con una altura de 0.1

En la figura 55 se presenta la evolución de la superficie libre en varias iteraciones para el caso del cuerpo sumergido con 0.2 de altura. La secuencia en la variación es similar a la mostrada en el caso de 0.1 de altura, pero debido a la mayor altura del cuerpo, la influencia sobre la superficie libre es mayor, produciéndose una amplitud de casi dos veces la amplitud obtenida en la figura 54b.

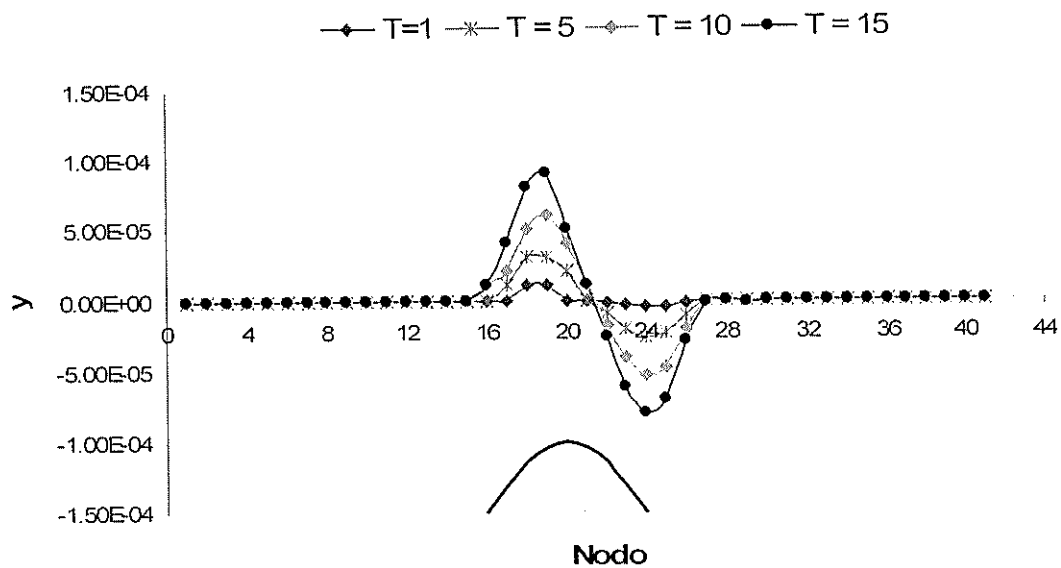


Figura 55 a)

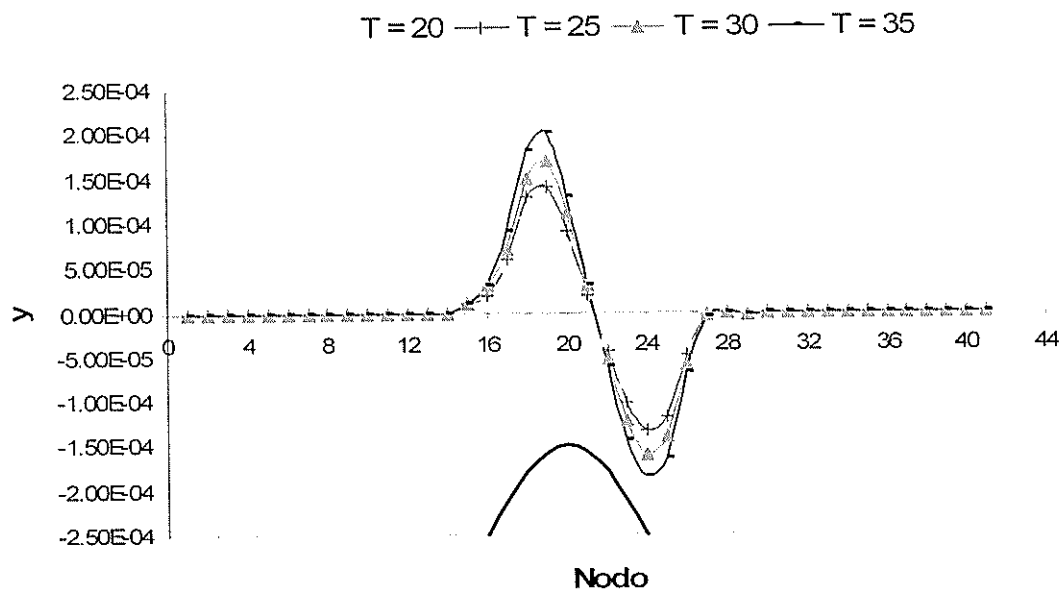


Figura 55 b)

Figura 55
 Evolución de la Superficie Libre en varias iteraciones en el caso del cuerpo con una altura de 0.2

En las figuras 56 y 57, se presenta el campo de presiones en el dominio analizado de cada uno de los casos analizados. Al comparar estos con el campo obtenido luego de la primera iteración, se puede apreciar un ligero aumento de presión en los extremos del cuerpo sumergido. Además, la reducción de presión sobre la zona central del cuerpo sumergido incrementa en magnitud.

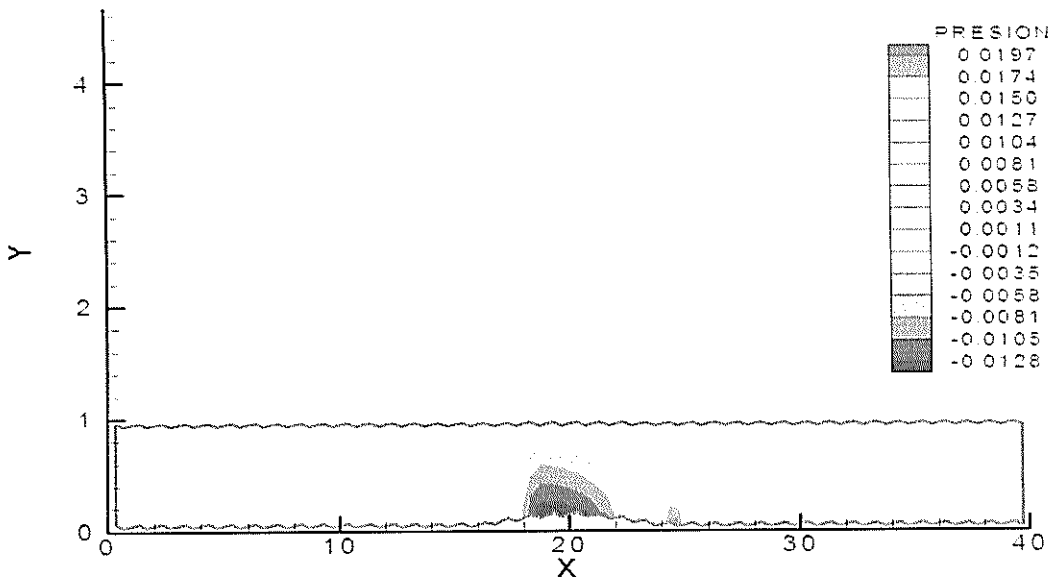


Figura 56
Contorno de presiones luego de la última iteración, cuerpo I

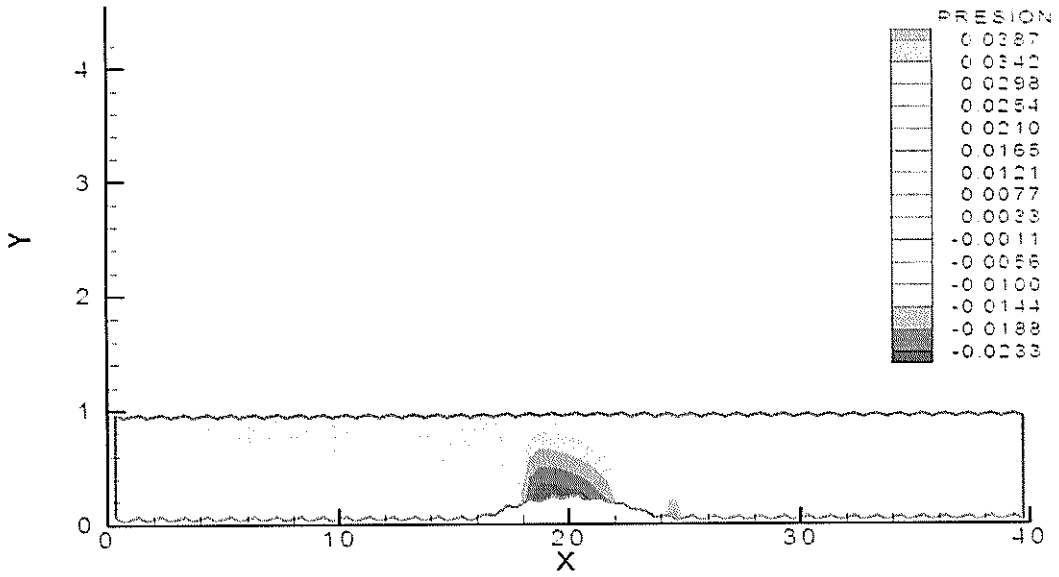


Figura 57
Contorno de presiones luego de la última iteración, cuerpo II

En la figura 58 se presenta la variación de presión sobre la línea de simetría, en función de su ubicación en la dirección x, para ambos casos. Los valores presentados fueron tomados de las celdas que comparten uno de sus lados con la frontera que representa al fondo. Ambos casos presentan la misma tendencia, una elevación de presión cerca de los puntos de estancamiento y una disminución de la misma entre estos puntos. Se puede confirmar además que el cuerpo más alto tiene mayor influencia.

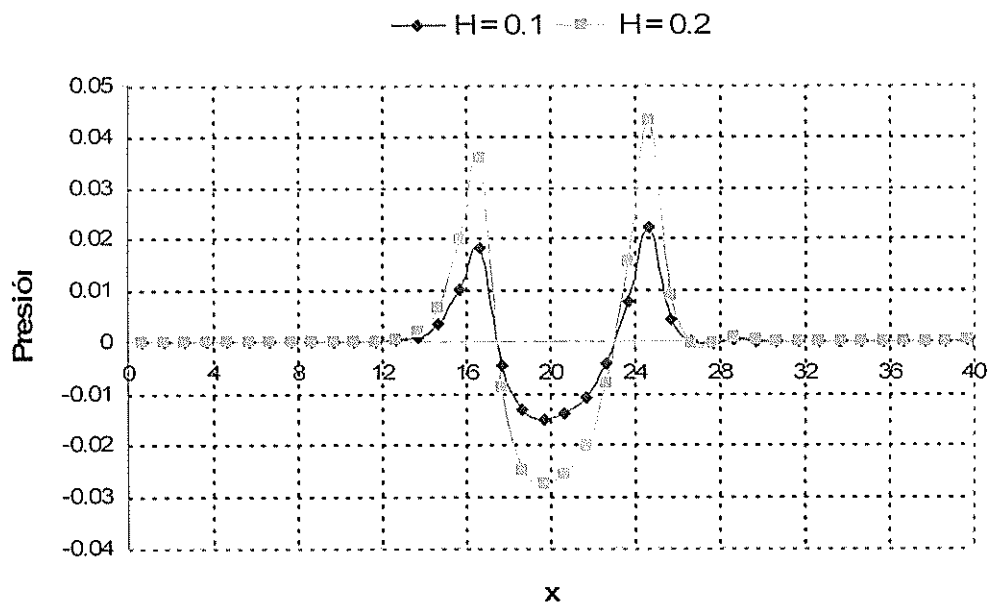


Figura 58
Variación de presión sobre el fondo en la dirección x

En la figura 59 se presenta la posición de la superficie libre a lo largo de la dirección x de ambos casos. Según Fox, [6], la pendiente de la superficie libre es definida por ecuación (107), y se produce sobre el cuerpo sumergido. A pesar de esto, como se muestra en la figura 59, la pendiente predicha por Fox, [6], se presenta pero desplazada 4 unidades a la derecha. Se recuerda que la solución presentada por Fox, [6], asume el fluido como ideal.

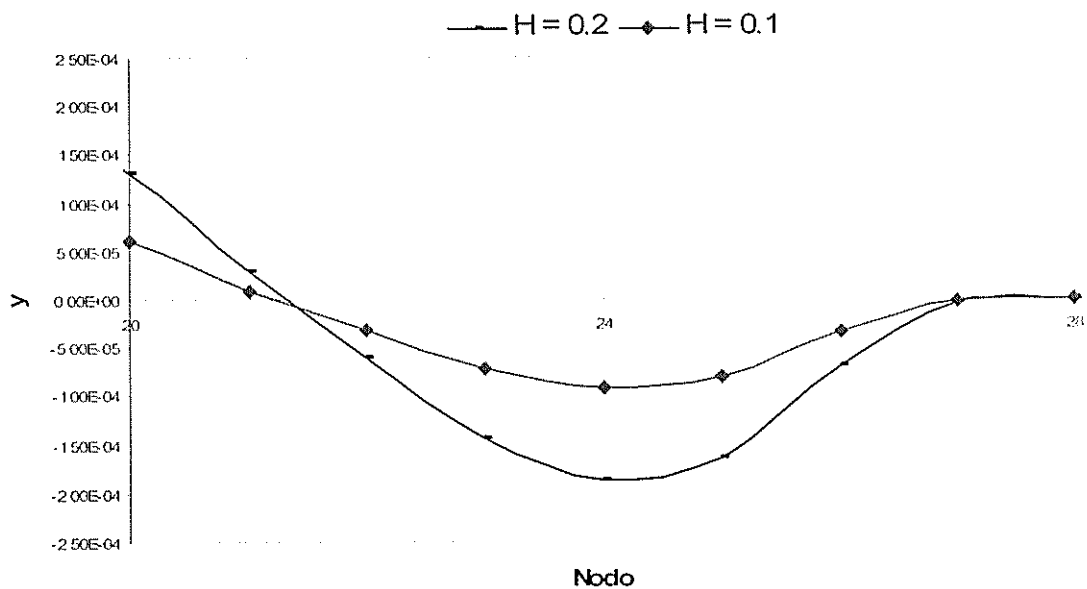


Figura 59
Variación de la superficie libre

Para la determinación de la longitud de transición se graficó en Excel el perfil de velocidades en función de la distancia y, para secciones transversales cercanas a las longitudes de transición determinadas visualmente utilizando la figura 29, y se escogió la posición en la dirección x de la sección con poca variación. En la siguiente tabla se muestran los valores determinados:

Re	Longitud de Transición	
	Langhaar	Aprox. Num.
100	5.8	4.17
500	29	15.8
1000	58	29.2
1500	87	41.7
2000	116	58.3
5000	290	96.7
10000	580	99.2

Tabla I
Longitud de transición vs. Número de Reynolds

En la figura 30 se presenta la variación de la longitud de transición obtenida de manera numérica en función del número de Reynolds, y se la compara con la formulación presentada en Streeter, [19]. Se puede confirmar la variación lineal de la misma, aunque con una pendiente menor, 0.028. Dicha diferencia puede ser atribuida a que la fórmula de Langhaar es calculada en una geometría tridimensional donde se presentan esfuerzos radiales, y, la aproximación numérica desarrollada en este trabajo es realizada en un dominio bidimensional, donde la

ausencia de estos esfuerzos radiales permite que la capa límite llegue a la línea central en una distancia más corta. Por otro lado, en los casos con un número de Reynolds de 5000 y 10000 la longitud de transición es mayor a la longitud empleada, por lo que la longitud aproximada se encuentra en la frontera de salida del flujo.

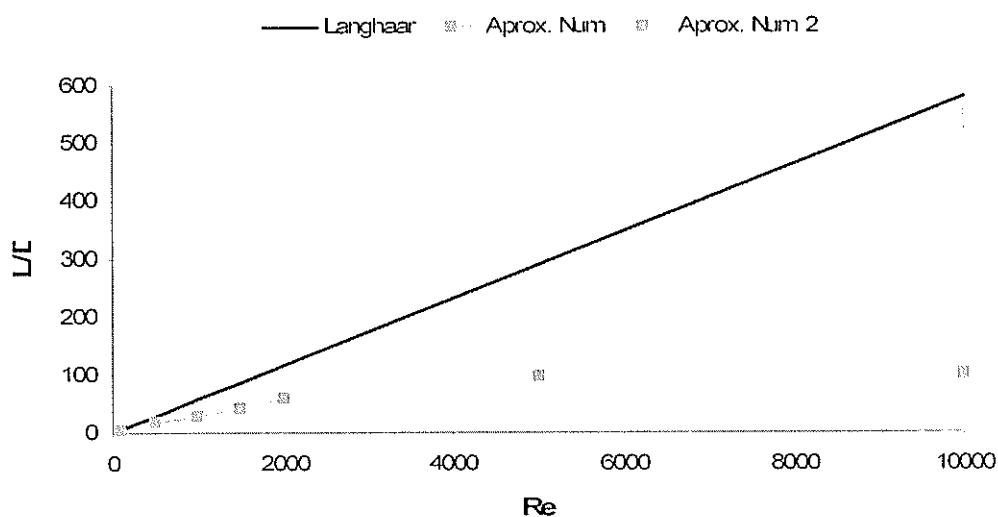


Figura 30
Formulación de Langhaar vs. Aprox. Num.

Caudal

El caudal entre dos placas de ancho infinito es calculado por:

$$Q = V_x A \quad (100)$$

Donde V_{∞} es la velocidad de entrada y A es el área transversal. Esta área puede ser expresado como el producto entre la separación entre placas, D , y un ancho finito, B . En la dirección B , el perfil de velocidades es constante por lo que el caudal puede ser expresado por unidad de ancho, como se muestra a continuación:

$$Q = V_{\infty} D * B$$

$$Q^* = \frac{Q}{B} = V_{\infty} D \quad (101)$$

Para comparar los resultados de manera numérica es necesario expresar el caudal por unidad de ancho, Q^* , ecuación (101), de manera adimensional para lo cual se emplearán las expresiones propuestas por Chorin, [5], por lo que el caudal por unidad de ancho en forma adimensional es:

$$\frac{Q^*}{U D} = \frac{V_{\infty}}{U} * \frac{D}{D} = 1$$

En la figura 31 se muestra el caudal adimensional promedio obtenido de manera numérica en función del número de Reynolds. Para la integración numérica de $\int u dy$, se empleó la segunda regla de Simpson.

Estos valores presentan una diferencia con respecto a la solución analítica, mostrando que dicha diferencia disminuye a medida que el número de Reynolds aumenta. Esto se debe a que la distribución de celdas es uniforme, y es necesario colocar un mayor número de celdas en las zonas cercanas a fronteras sólidas para representar con mayor exactitud el desarrollo de la capa límite, cuyo espesor disminuye al aumentar el número de Reynolds.

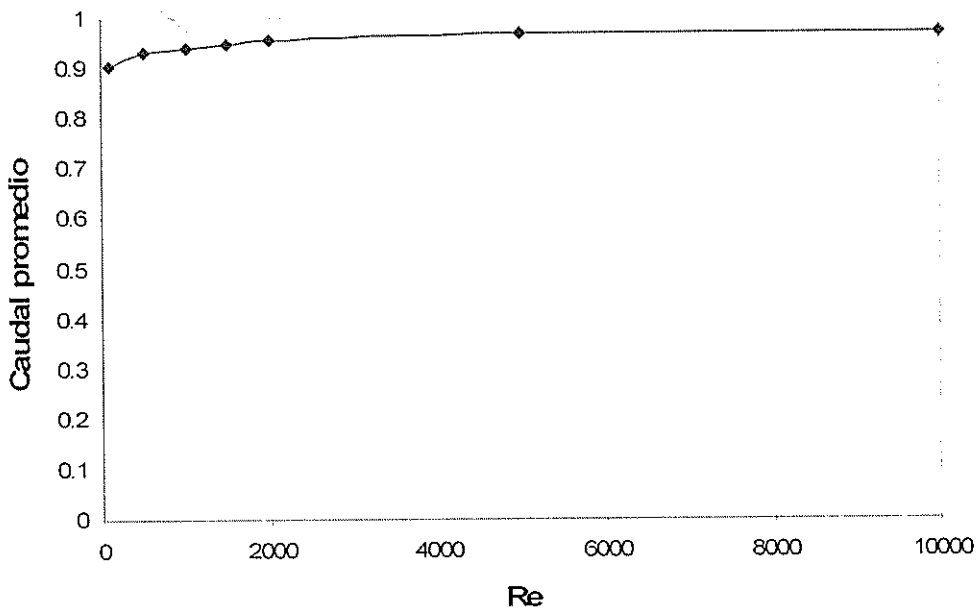


Figura 31
Caudal promedio adimensional vs. Número de Reynolds

Caída de presión

El análisis realizado en Fox, [6], al flujo laminar entre placas paralelas infinitas se lo realiza considerándolo como completamente desarrollado. Es decir todas las formulaciones presentadas por Fox son válidas únicamente luego de la longitud de transición, cuyos valores para los casos analizados se muestran en la tabla 1.

Como se muestra en la figura 32, la variación de la presión en la dirección x es lineal después de la longitud de transición. Por ejemplo, en la figura 32 a) se muestran las presiones obtenidas promediadas en la sección con un número de Reynolds de 100. En este caso la línea de tendencia coincide exactamente con los puntos calculados. La máxima diferencia ocurre con un número de Reynolds de 2000, en este caso el valor del factor de correlación, R^2 , que se obtuvo fue de 0.9988, véase la figura 32 e), este valor confirma la linealidad de la presión en la aproximación numérica obtenida.

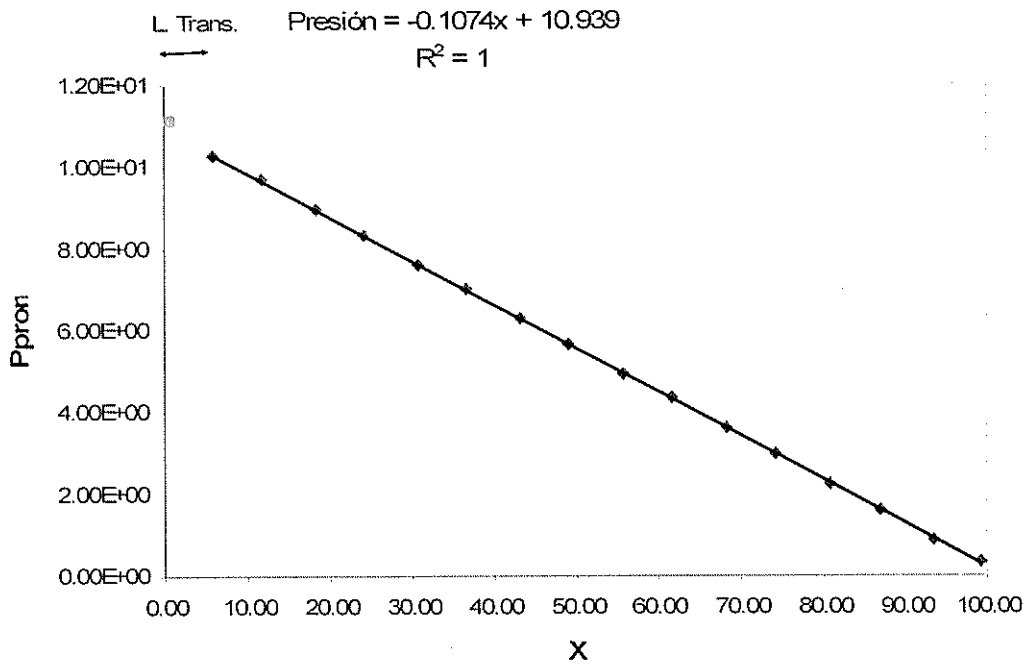


Figura 32 a) Re = 100

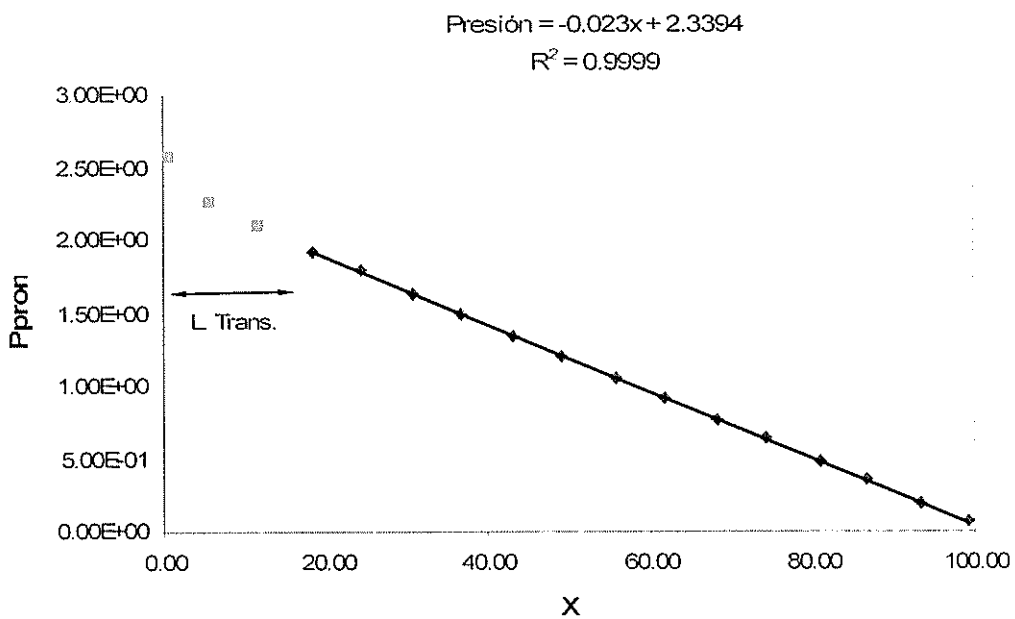


Figura 32 b) Re = 500

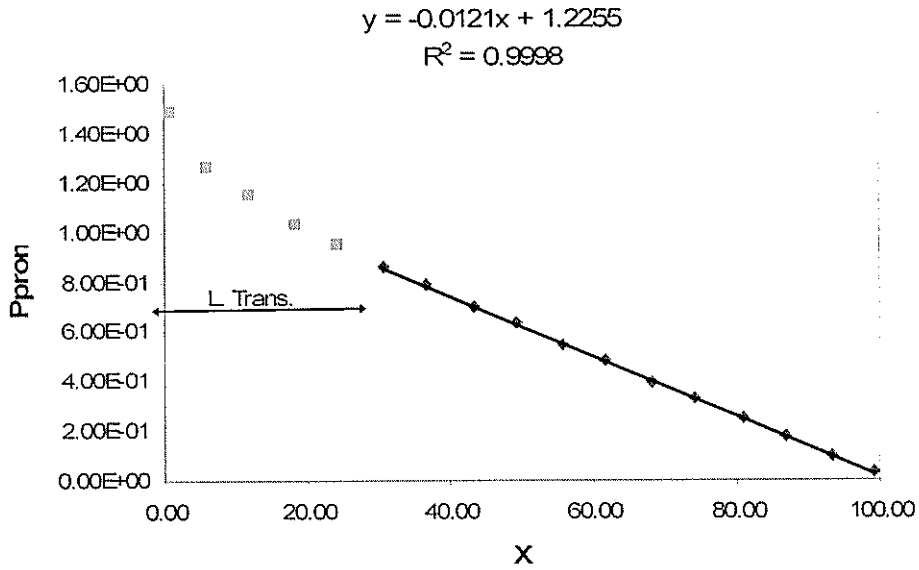


Figura 32 c) Re = 1000

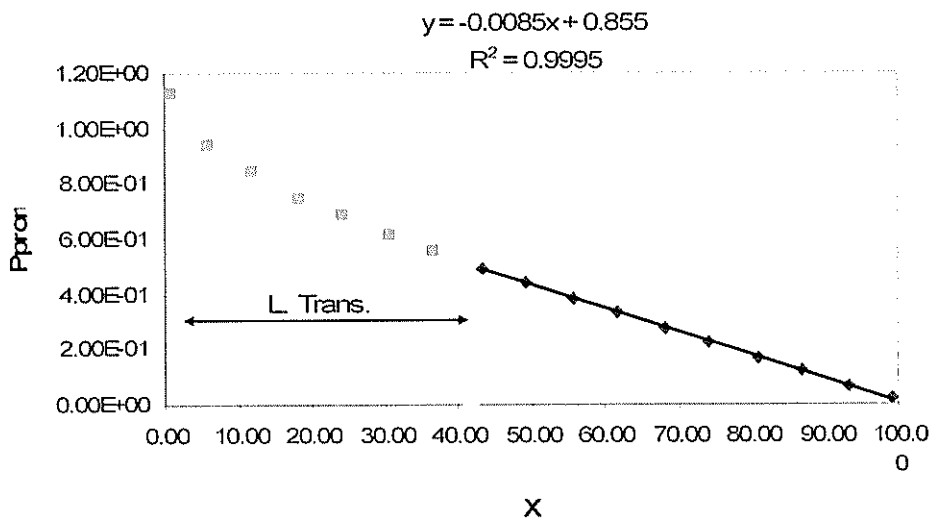


Figura 32 d) Re = 1500

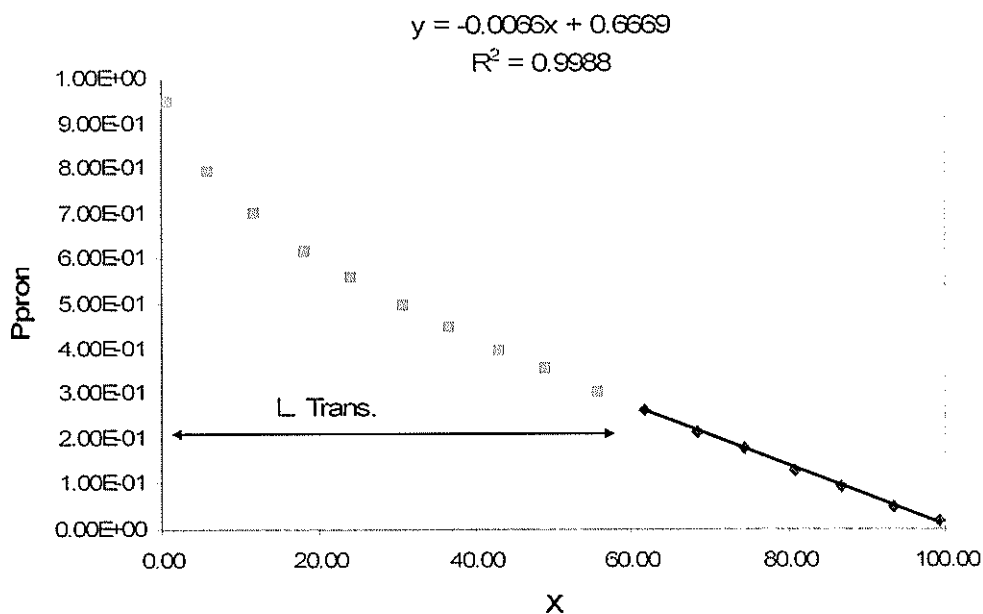


Figura 32 e) $Re = 2000$

Figura 32
Distribución de presión en un ducto de sección constante

4.2 Ducto con Expansión

Las tuberías difusoras similares a la mostrada en la figura 33 se utilizan comúnmente para recuperar la presión en sistemas de fluidos. Este caso fue escogido debido a la existencia de resultados experimentales obtenidos por varios autores y presentados por Fox, [6], y, Streeter, [18]. A pesar de que los casos estudiados experimentalmente son tridimensionales, los cálculos realizados utilizan una geometría bidimensional.

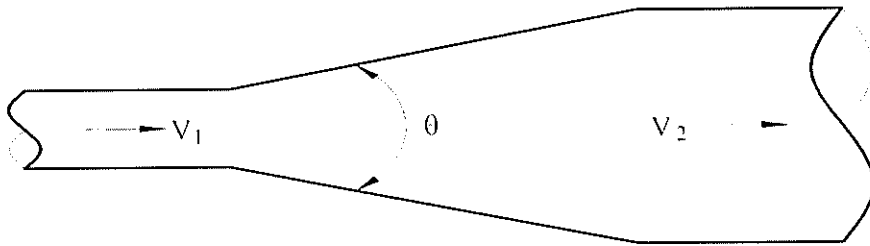
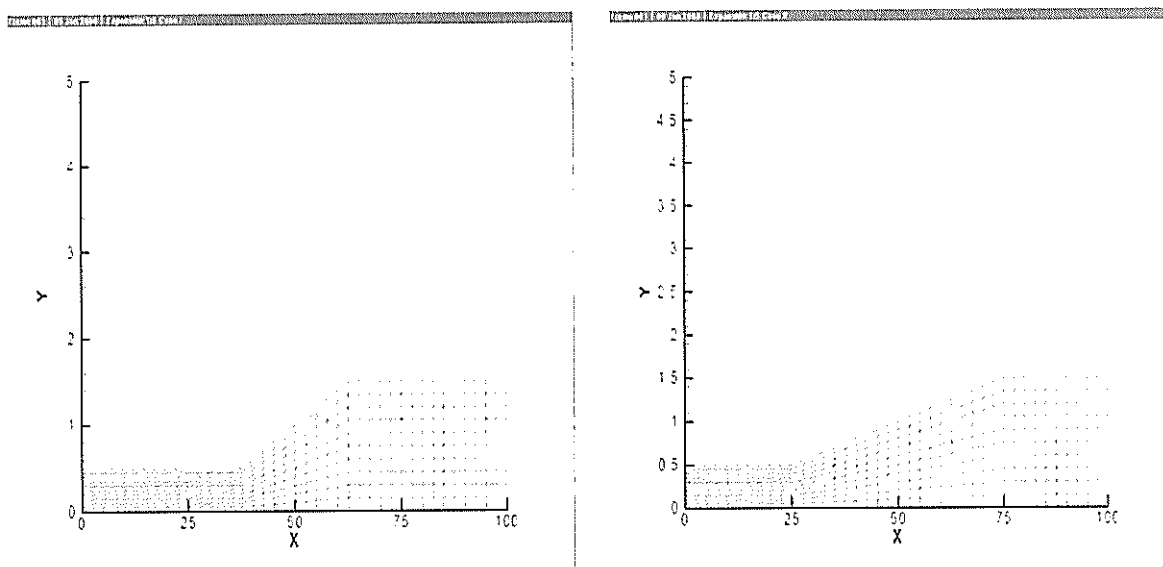


Figura 33
Tubería difusora

En el problema analizado se consideró la frontera de entrada como flujo libre. Además, aprovechando la simetría del flujo se simuló solo la mitad superior de la tubería implementando la condición de simetría de la frontera inferior, descrita en el capítulo anterior.

Según Fox, [6], el coeficiente de pérdida real y el aumento de presión en la dirección del flujo dependen principalmente de la relación de diámetros, del ángulo de la expansión, y, del número de Reynolds. A pesar de ello en este problema se escogió de entre los dos casos presentados por Gibson el de mayor expansión, siendo esta de 1:3. Para comprobar la influencia del ángulo de la expansión se utilizaron dos mallas con diferentes ángulos, el primer caso tiene una pendiente de 0.04 y el segundo de 0.02, como se muestra en la figura 34:



a) Expansión I

b) Expansión II

Figura 34

Alternativas empleadas en el análisis de una expansión 1:3

El número CFL utilizado en ambos casos fue de 1.0 y el número, ε , utilizado en el término de disipación, definido en la ecuación (60) del capítulo anterior, fue de 0.1. En la figura 35 se presenta el historial de convergencia de la expansión I, en el que se varió el número de Reynolds desde 100 hasta 2000. Tal como se demostró en el subcapítulo anterior, un aumento en el número de Reynolds implica una disminución en la estabilidad numérica del proceso iterativo, es así que en los casos con números de Reynolds de 1500 y 2000 fue necesario incrementar a 0.02 el valor del número, ε , utilizado en el término de disipación. Con esto el proceso iterativo convergió, a pesar de utilizar un mayor número de iteraciones que las utilizadas en el caso de las placas paralelas.

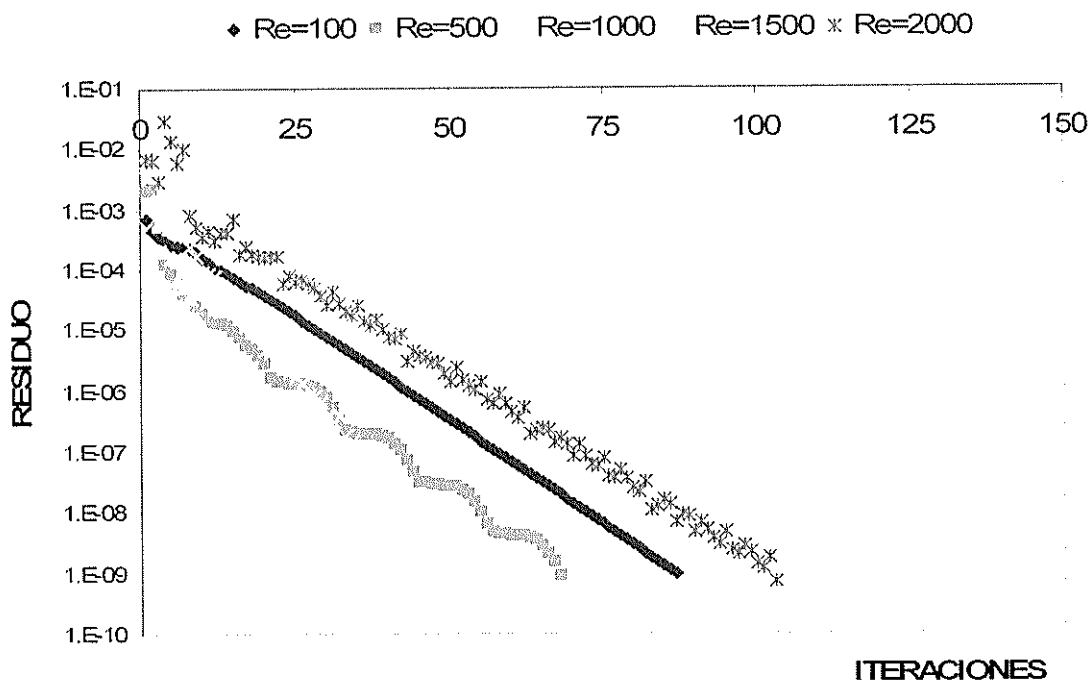


Figura 35
 Historia de Convergencia de la expansión I con varios números de Reynolds

En la figura 36 se presenta el historial de convergencia de la expansión II, donde de la misma forma que en el caso I se varió el número de Reynolds desde 100 hasta 2000. Otra vez se comprueba que, un aumento en el número de Reynolds implica una disminución en la estabilidad numérica del proceso iterativo. Aunque en este caso la inestabilidad no es tan fuerte, se pueden observar pequeñas discontinuidades en la variación del residuo, esta diferencia con respecto a la expansión I se debe posiblemente a la menor pendiente de la expansión.

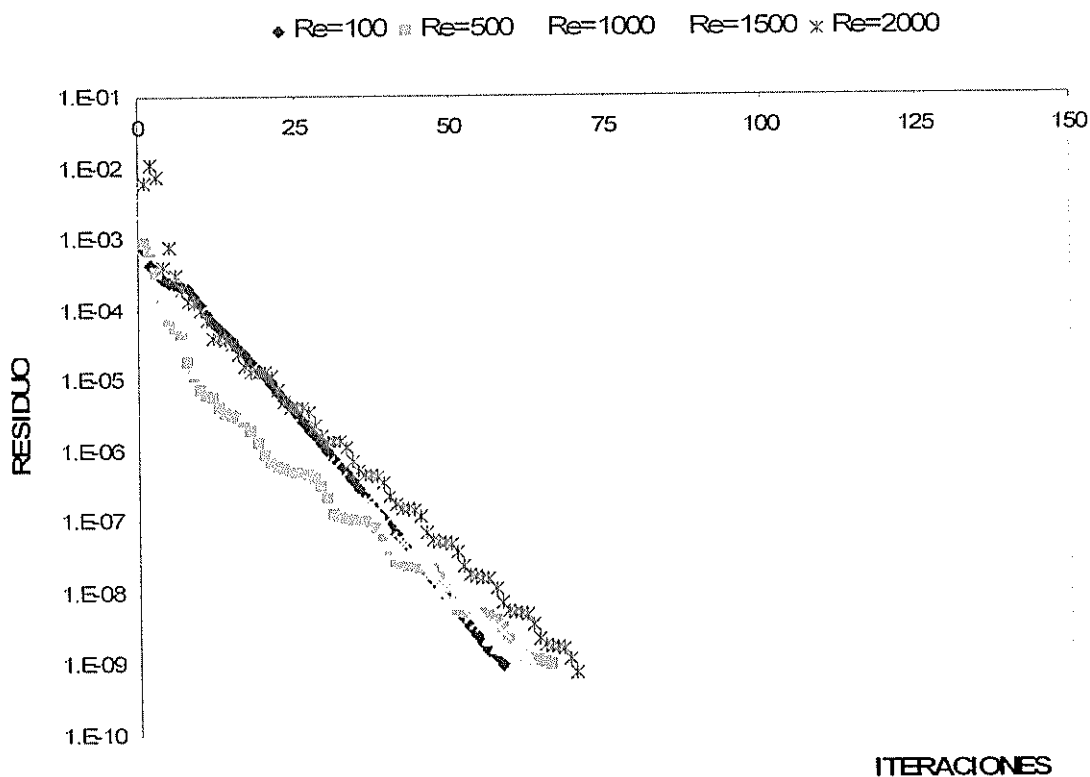


Figura 36
Historia de Convergencia de la expansión II con varios números de Reynolds

Influencia del Número de Reynolds

Según Fox, [6], el número de Reynolds de entrada tiene una influencia sobre la variación de la velocidad solo si este número es menor a 75000. En la figura 37 se presentan los contornos de velocidad para diferentes números de Reynolds de la expansión I. Se observa claramente la influencia de la expansión sobre el flujo: al pasar de un número de Reynolds de 100, figura 37 a, a un número de Reynolds de 500, figura 37

b, el contorno de velocidades varía fuertemente. Dicha influencia es menor al aumentar el número de Reynolds.

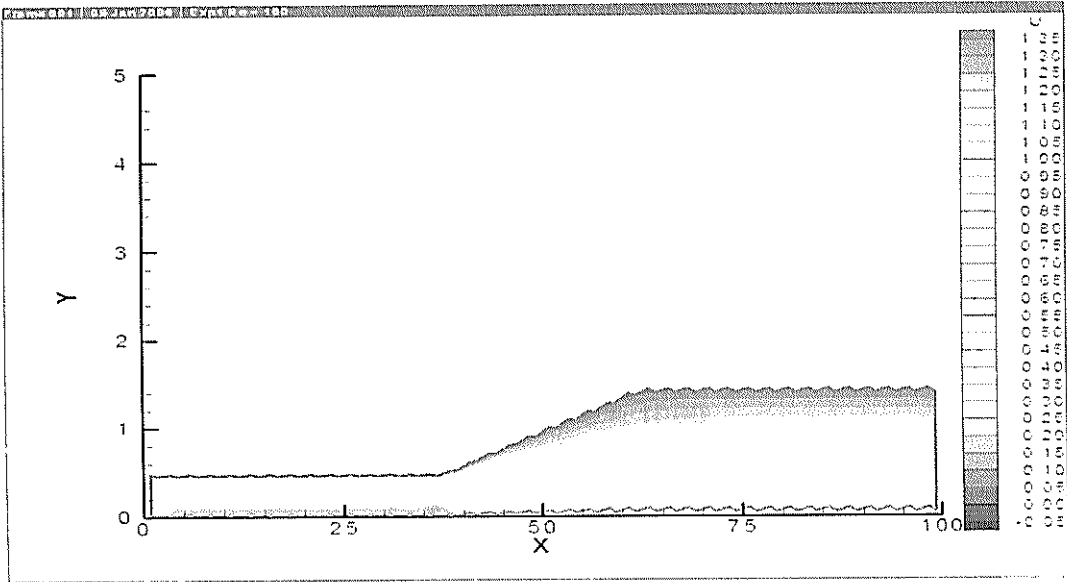


Figura 37 a) $Re = 100$

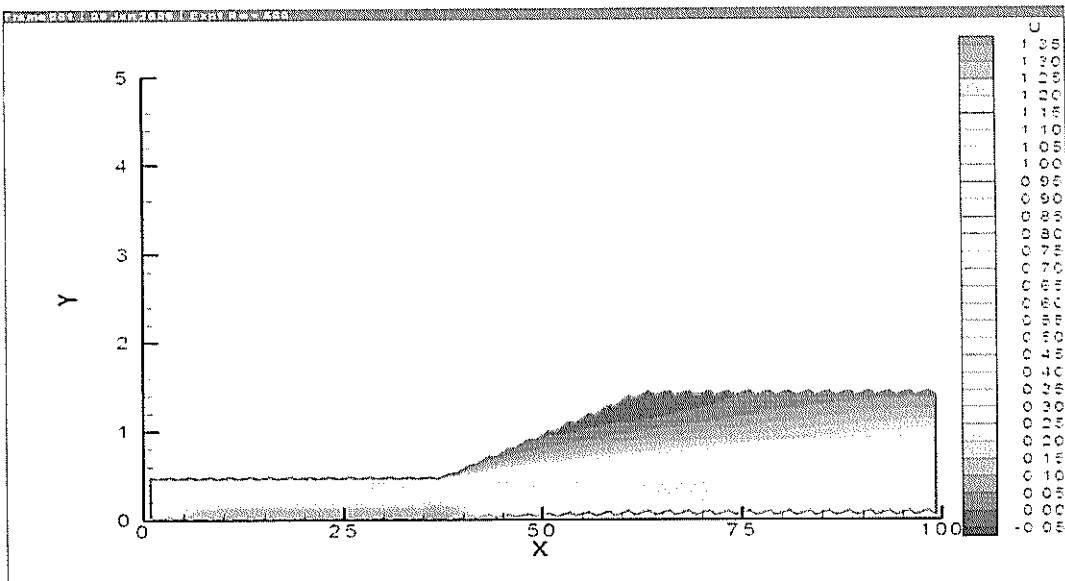


Figura 37 b) $Re = 500$

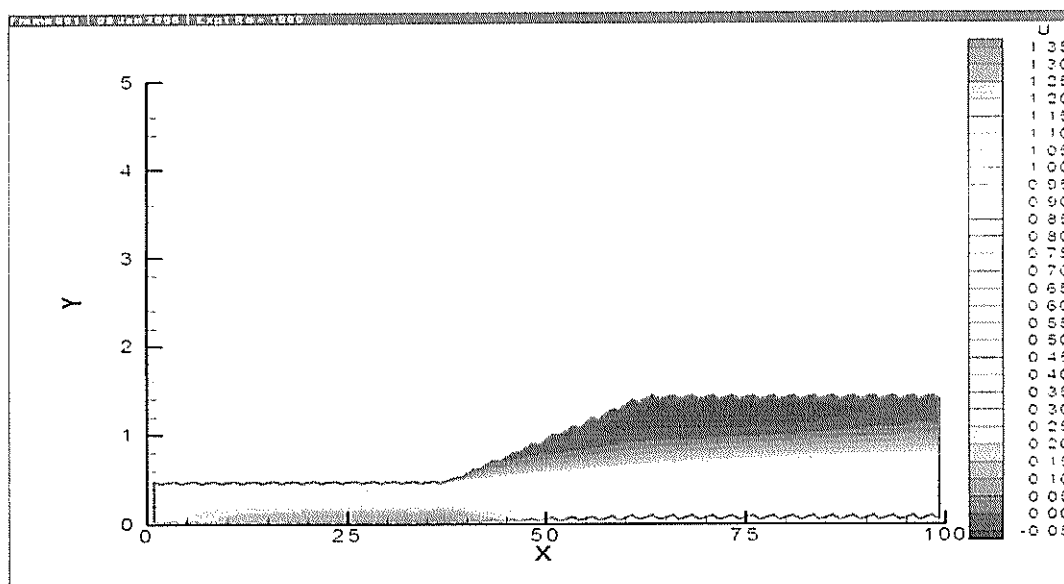


Figura 37 c) $Re = 1000$

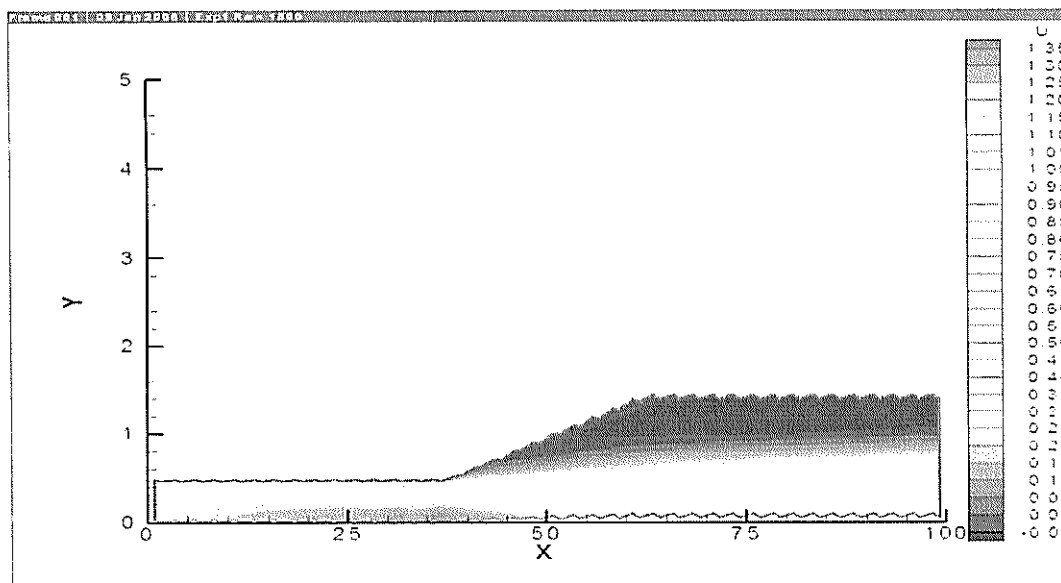


Figura 37 d) $Re = 1500$

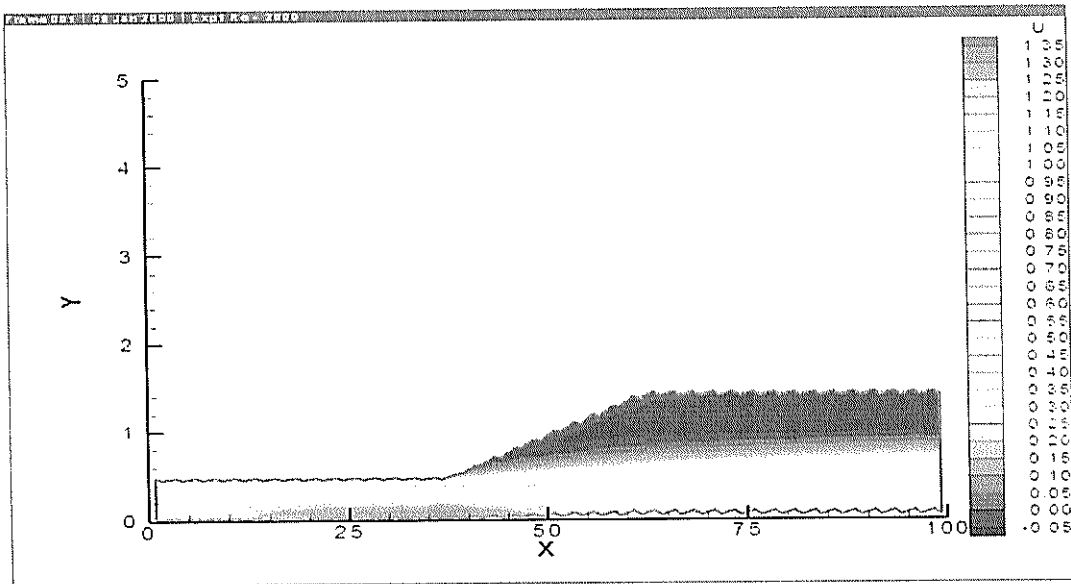


Figura 37 e) $Re = 2000$

Figura 37
Contorno de velocidades de la expansión I con diferente número de Reynolds

En la figura 38 se presentan los contornos de velocidad para diferentes números de Reynolds de la expansión II, el cual tiene una menor pendiente que la expansión I. Se confirma la influencia de la expansión, y, del número de Reynolds sobre el campo de velocidades. En esta ocasión, al pasar de un número de Reynolds de 100, figura 38 a, a uno de 500, la variación en el campo de velocidades no es tan marcada como en la expansión I, esto se debe posiblemente a la menor pendiente de este caso. Nuevamente, la influencia disminuye a medida que el número de Reynolds se acerca al límite señalado por Fox, [6]. En la figura 38 e, se

muestran los perfiles de velocidad en cinco secciones, en la zona de expansión se obtienen valores negativos cercanos a la pared.

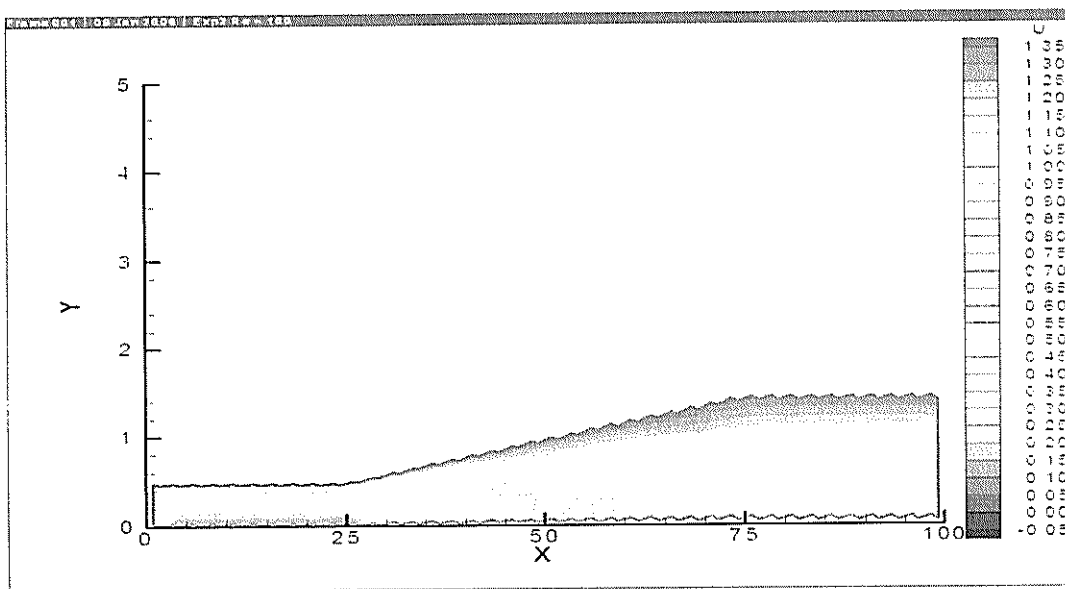


Figura 38 a) $Re = 100$

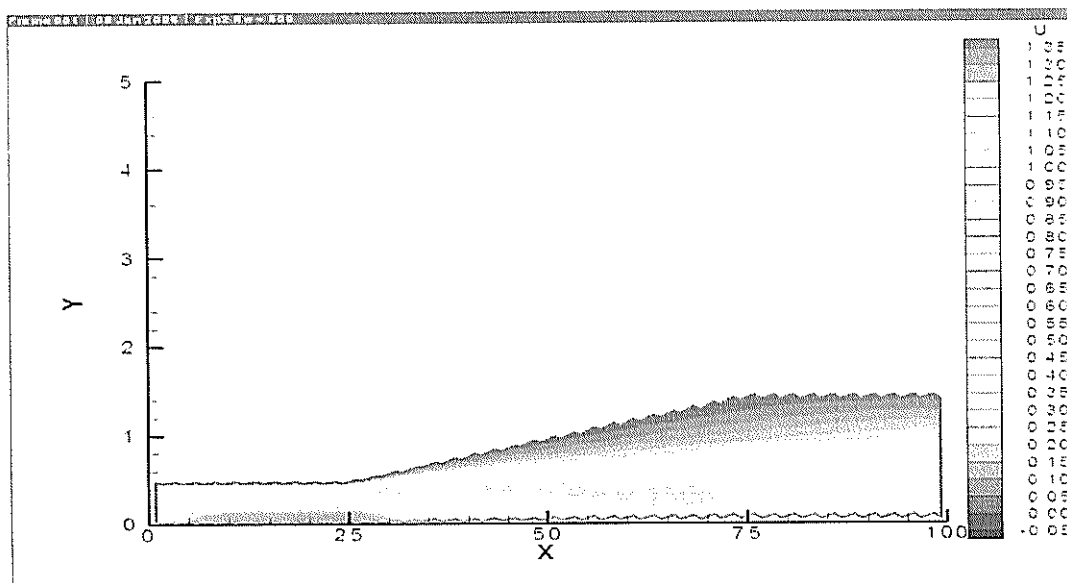


Figura 38 b) $Re = 500$

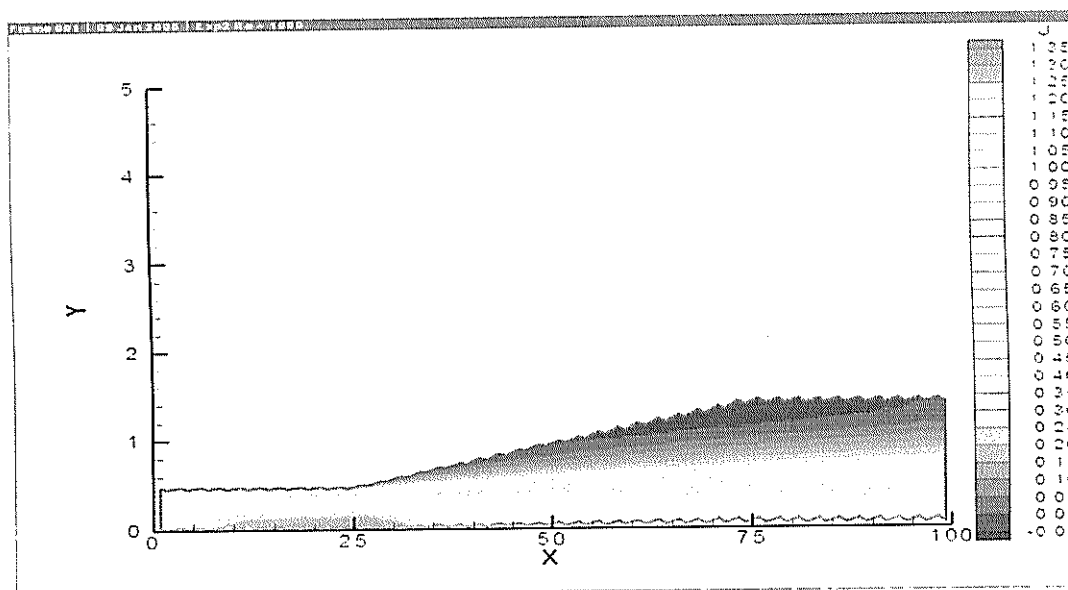


Figura 38 c) $Re = 1000$

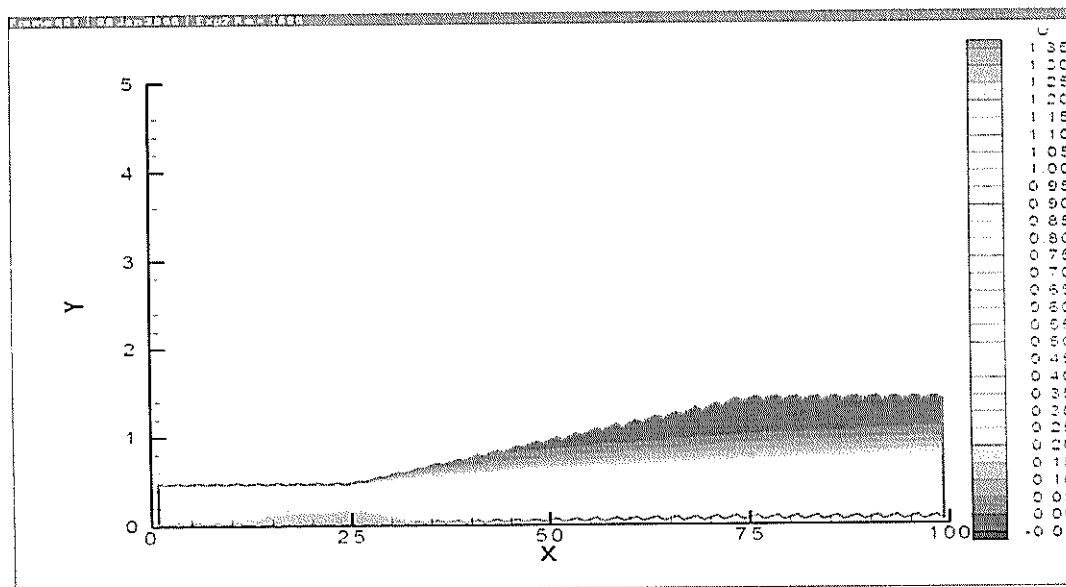


Figura 38 d) $Re = 1500$

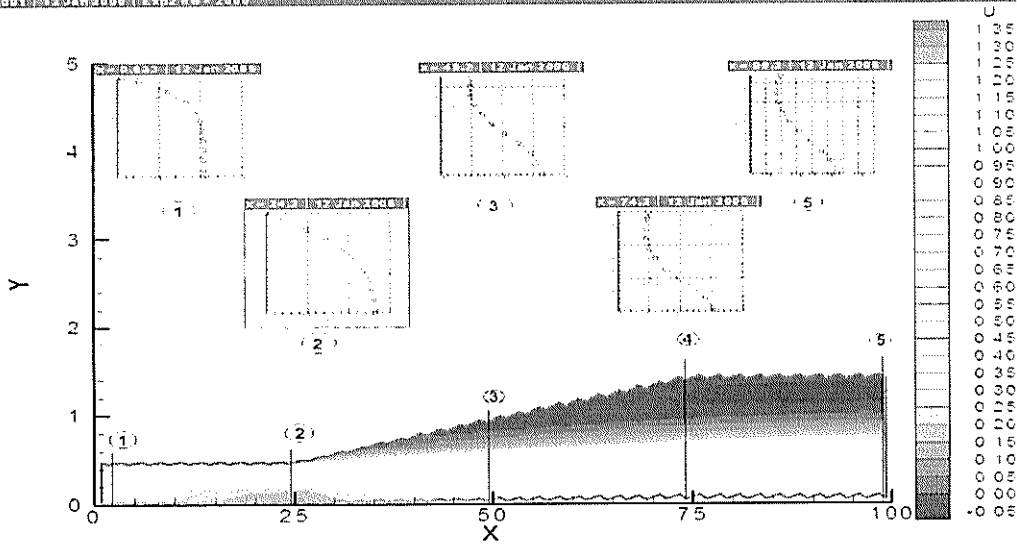


Figura 38 e) $Re = 2000$

Figura 38
Contorno de velocidades de la expansión II con diferente número de Reynolds

Caudal

De igual manera que en el subcapítulo anterior, el caudal es calculado por:

$$Q = V_x A \quad (100)$$

Donde V_x es la velocidad de entrada y A es el área transversal. Esta área puede ser expresado como el producto entre la separación entre placas, D , y un ancho finito, B . En la dirección B , el perfil de velocidades

es constante por lo que el caudal puede ser expresado por unidad de ancho, como se muestra a continuación:

$$Q = V_x D * B$$

$$Q^* = \frac{Q}{B} = V_x D \quad (101)$$

Para comparar los resultados de manera numérica es necesario expresar el caudal por unidad de ancho, ecuación (101), de manera adimensional para lo cual se emplearán las expresiones propuestas por Chorin, [5], por lo que el caudal por unidad de ancho en forma adimensional es:

$$\frac{Q^*}{UD} = \frac{V_x}{U} \frac{D}{D} = 1$$

Como se describió al comenzar este subcapítulo, debido a la simetría del flujo se modeló solo la parte superior del sistema, por lo que el caudal adimensional por unidad de ancho es de 0.5.

$$\frac{1}{2} \times \frac{Q^*}{B} = 0.5$$

En las figuras 39 y 40 se presenta la variación del caudal numérico en función de la posición x . Cerca de la frontera de entrada se presenta el menor valor, esto es atribuido a los grandes gradientes existentes en esta zona, combinado con la distribución uniforme de la malla. Además, se puede distinguir una zona, en ambos casos, ubicada en el extremo derecho, cuyos valores están por debajo de 0.45, esto se debe posiblemente a la menor densidad de celdas provocada por la expansión del ducto.

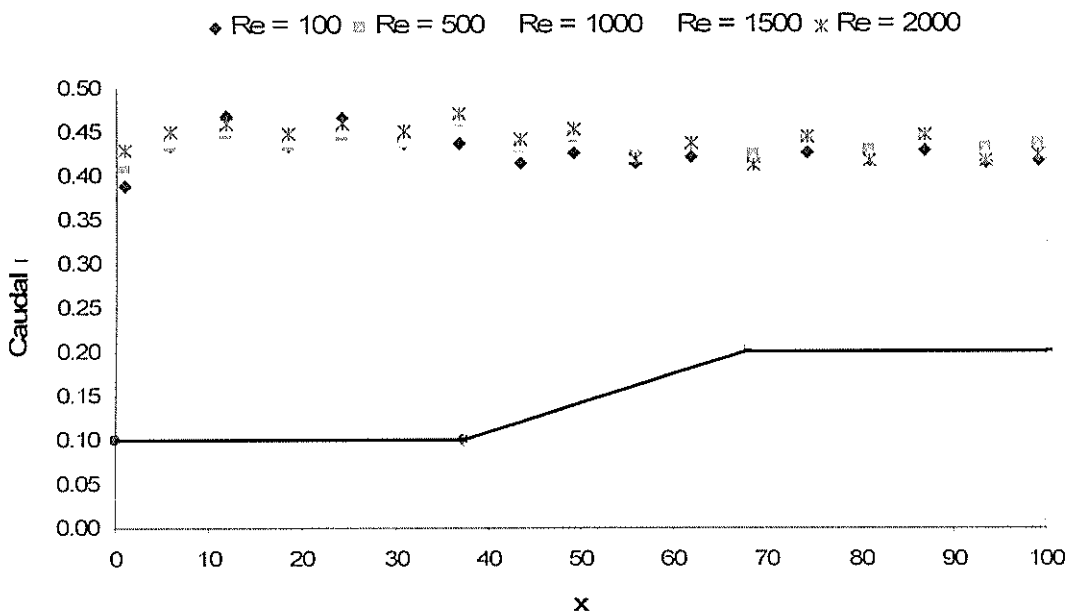


Figura 39
Variación del Caudal en función de la posición x , Expansión I

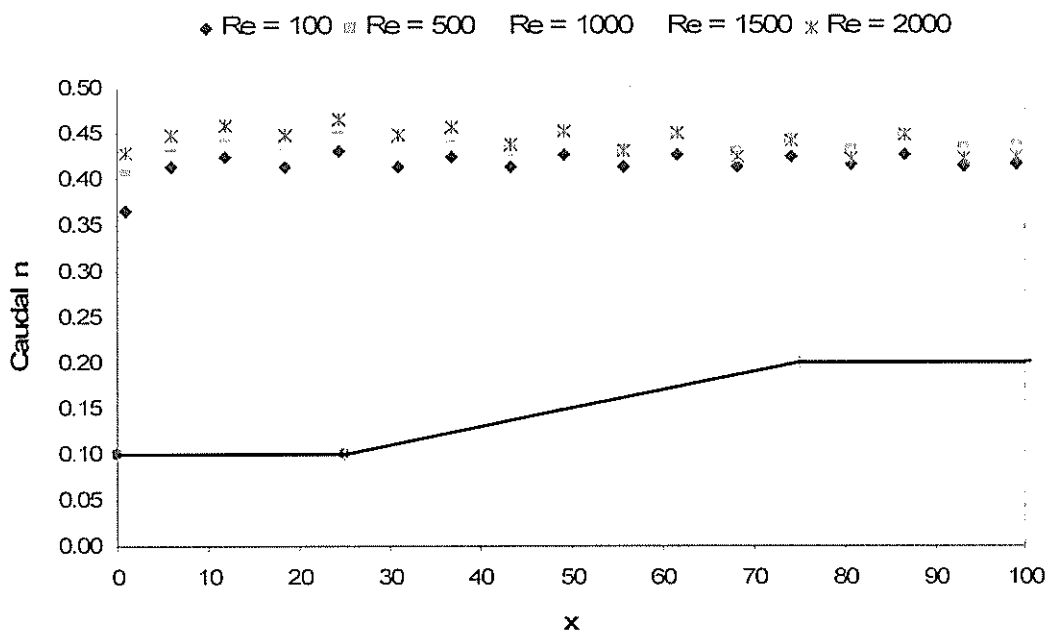


Figura 40
Variación del Caudal en función de la posición x, Expansión II

En la figura 41 se muestra el caudal adimensional promediado en todo el ducto, obtenido de manera numérica en función del número de Reynolds para las dos expansiones; nuevamente la diferencia con respecto a la solución analítica disminuye a medida que el número de Reynolds aumenta. La diferencia de la expansión II es ligeramente mayor, debido en parte a la disminución en la densidad de celdas provocado por la expansión del ducto en el eje y.

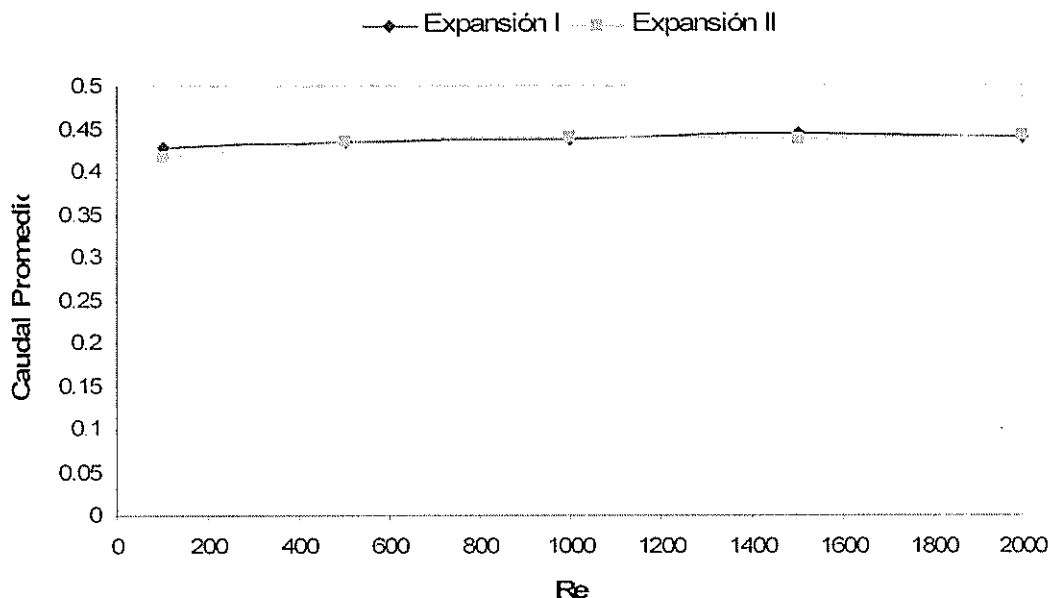


Figura 41
Caudal promedio vs. Numero de Reynolds para un ducto con expansión 1:3

Caída de presión

Como fue mencionado al comenzar este subcapítulo, las tuberías difusoras son empleadas para recuperar la presión en sistemas de fluidos. Como se muestra en la figura 42, la variación de la presión en la dirección x de la expansión I tiene el mismo comportamiento que en el caso de las placas infinitas hasta antes de la expansión. Después de este punto se confirma lo enunciado: esto es, en todos los casos se observa un aumento en la presión, inclusive con un número de Reynolds

de 100, figura 42 a, donde el aumento de presión no es lo suficientemente grande comparado con los casos restantes.

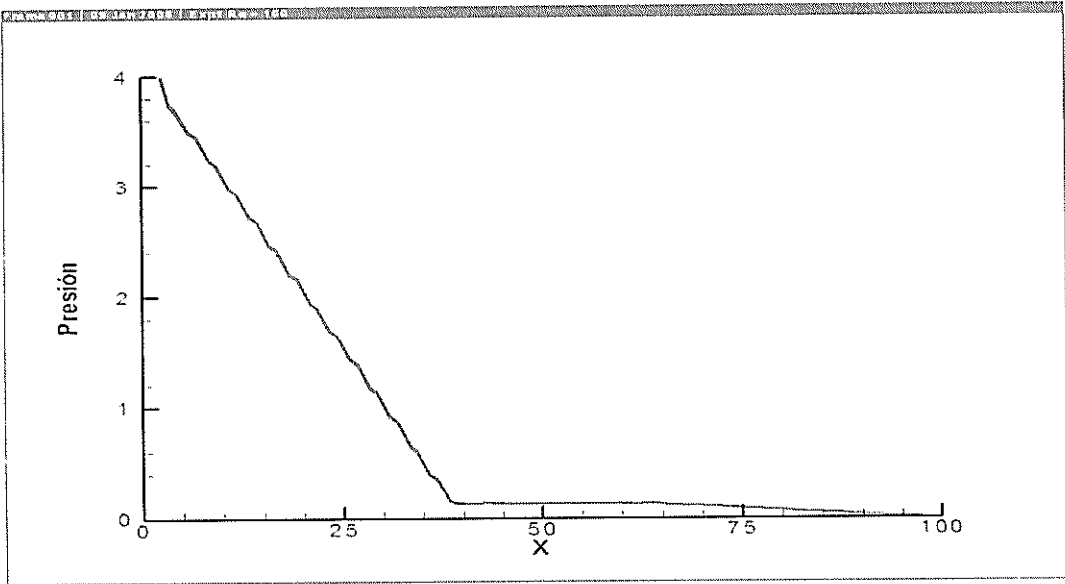


Figura 42 a) $Re = 100$

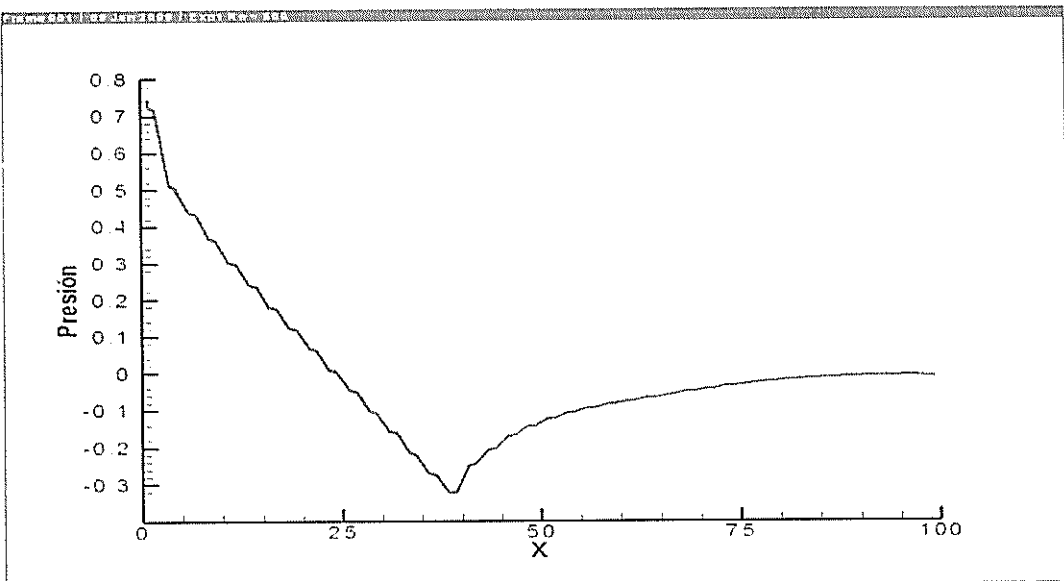
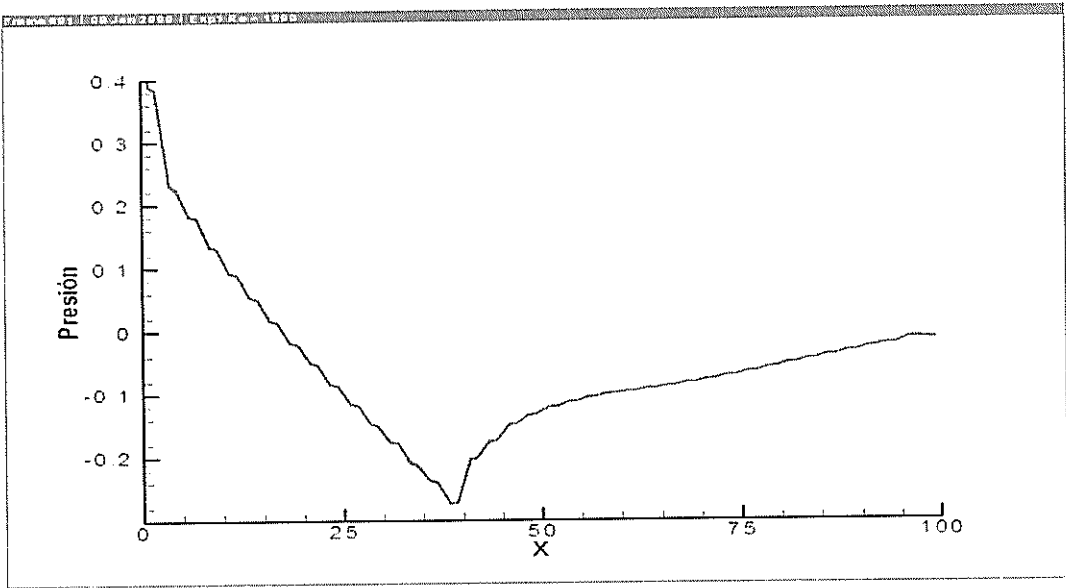
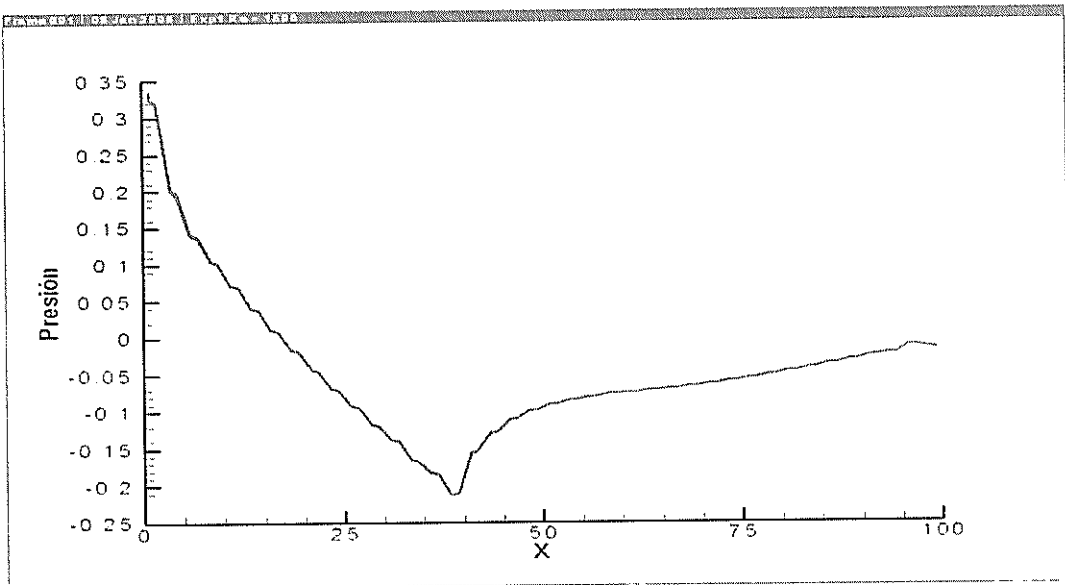


Figura 42 b) $Re = 500$

Figura 42 c) $Re = 1000$ Figura 42 d) $Re = 1500$

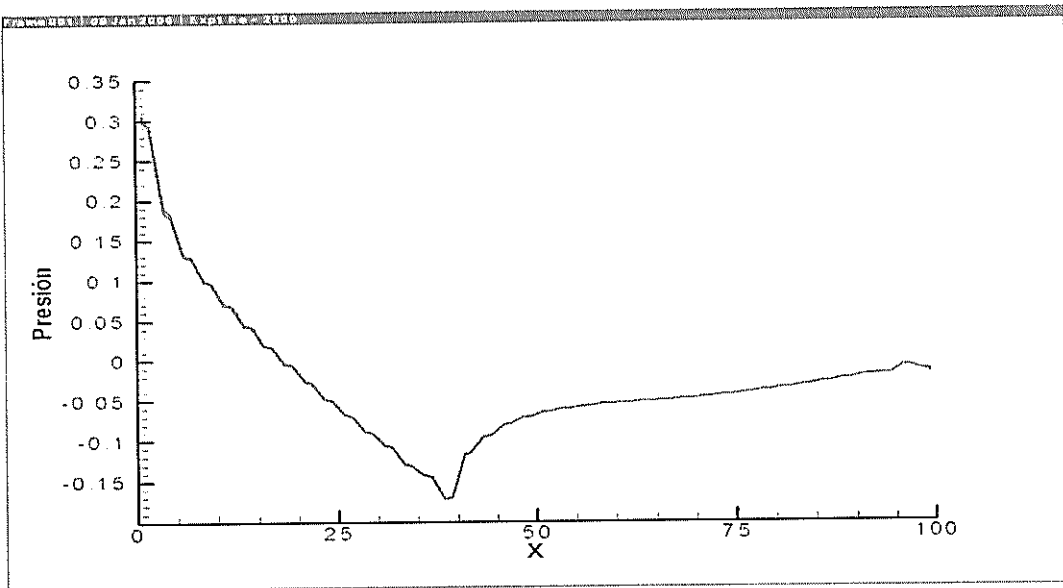


Figura 42 e) $Re = 2000$

Figura 42

Distribución de presión en la expansión I con diferente números de Reynolds

En la figura 43 se presenta la variación de la presión en la dirección x de la expansión II. Presenta un comportamiento similar al mostrado en la figura anterior, que corresponde al caso de las placas infinitas hasta antes de la expansión. Después de este punto en todos los casos se observa un aumento en la presión, tal como en el caso anterior. Debido a que este caso posee una pendiente de expansión menor, la caída de presión total, desde la entrada hasta 100 veces el diámetro, es menor que en el caso anterior. La diferencia de presión entre los extremos izquierdo y derecho constituyen el coeficiente de pérdidas adimensionales, h_{menor} laminar, véase la figura 43 e.

CONCLUSIONES

Se implementó un método numérico desarrollado por el Profesor Takanori Hino, Jefe de la Sección de Vehículos de Alta Velocidad en el Instituto de Investigación de Embarcaciones de Japón, para resolver el problema de flujo laminar viscoso 2D. Luego se comprobó la utilidad y limitaciones a través de la solución de casos simplificados: tubo horizontal y expansión. Por último, se analizó el flujo resultante sobre un obstáculo en el fondo con influencia de la superficie libre y se lo comparó con una solución analítica para fluidos ideales. Se puede concluir lo siguiente:

Debido al comportamiento matemático mixto, hiperbólico y parabólico, del sistema diferencial de ecuaciones, se comprobó que la estabilidad numérica de este método iterativo está gobernada por el tamaño del paso del tiempo, el valor del factor de compresibilidad, y la magnitud del término disipador. Esto hace muy importante el valor que se escoja para cada uno de ellos, lo que influye directamente en la razón de convergencia del proceso iterativo; por ejemplo el usar un factor de compresibilidad mayor a 1.0, provoca la divergencia del proceso iterativo.

En los casos analizados se mostró que al usar una malla con celdas distribuidas uniformemente, el número de Reynolds es un parámetro que afecta al porcentaje de error del proceso numérico, véase las figuras 31 y 41. Esto es debido a que el desarrollo de la capa límite no es descrito correctamente.

Se comprobaron ciertos resultados analíticos y experimentales disponibles en la literatura en lo referente a la variación de presión. En el caso del ducto de sección constante, la variación de este parámetro luego de la longitud de transición, es lineal, y, en el caso del ducto con expansión se obtiene un aumento de presión provocado por el incremento de sección.

En el caso del ducto de sección constante:

- La variación de la presión en la dirección y es prácticamente nula

($\frac{\partial p}{\partial y} \cong 0$), en concordancia con la teoría, véase la figura 24.

- El perfil de velocidades en la entrada es casi uniforme, y la velocidad en la zona central aumenta conforme avanza en la dirección x hasta alcanzar un valor de 1.5 veces la velocidad de entrada, véanse las figuras 29 y 30.
- Se comprobó la influencia del número de Reynolds sobre la longitud de transición, la cual fue estimada mediante la graficación de la

variación de la velocidad en la dirección y de varias secciones superpuestas, véase la figura 29, aunque los valores absolutos difieren de los teóricos. Además, se comprobó la relación lineal existente entre la longitud de transición y el número de Reynolds, véase la figura 30.

En el caso del ducto con expansión 1:3, se encontró:

- El valor máximo de la velocidad luego de la expansión depende del número de Reynolds. A bajas velocidades es aproximadamente de 0.5, concordando con la relación de áreas 1:3, pero con altas velocidades debido al reflujo existente este valor aumenta hasta en un 100%.
- Debido al diferencial de presión se produce un segundo flujo en la zona cercana a la superficie sólida con dirección contraria al flujo de entrada, véase la figura 38 e.
- La caída de presión del accesorio depende del ángulo de expansión y del número de Reynolds. Como se comprueba al comparar los resultados mostrados en las figuras 42 y 43, en los que la mayor diferencia de presión se produce en la expansión con mayor pendiente.

En el caso del flujo sobre un cuerpo sumergido, la variación de presiones por la presencia del cuerpo, produce una distorsión de la superficie libre cuando se tiene una profundidad limitada. En este caso no se alcanzó completamente la convergencia, debido a los elevados tiempos de ejecución, quedando por mejorar la eficiencia numérica de los procesos, para manejar flujos más complicados. Se encontró:

- La altura del cuerpo sumergido influye en la distribución de presiones y velocidades, como se muestra en las figuras 50 y 51. Además influye en la altura de la ola producida por la presencia del cuerpo sumergido, véanse las figuras 54 y 55.
- La variación de la presión en el fondo del canal es consistente con resultados teóricos y experimentales, véase la figura 58. En los extremos del cuerpo sumergido (puntos de estancamiento) se produce un aumento de presión y sobre la zona central una caída de presión producida por el aumento en la velocidad.
- Se comprobó también que en el contorno de la superficie libre, se produce un seno provocado por el cuerpo sumergido, véase la figura 59. Dicha depresión se encuentra desplazada a la derecha de la posición señalada por Fox, [6], que desarrolla una solución para un fluido ideal.

RECOMENDACIONES

Debido a la complejidad de la simulación numérica de problemas con fluidos, aspectos como: la generación de la malla, el tipo de programación, y, el método numérico utilizado, influyen en la eficiencia y eficacia del proceso iterativo. Por lo que se recomienda:

1. **Generación de malla:** Implementar en la generación elíptica de malla un método que permita al usuario controlar la ubicación de las celdas, con el objetivo de colocar un mayor número en las zonas cercanas a las superficies sólidas.
2. **Tipo de programación:** Utilizar la programación paralela, el cual consiste en utilizar varios procesadores durante la ejecución del programa. Cada uno de estos procesadores es el encargado de una subregión del dominio analizado, con lo que se lograría disminuir el tiempo computacional necesario para obtener una respuesta.
3. **Actualización de superficie libre:** Una debilidad del método implementado, es el excesivo tiempo empleado en llegar a una respuesta, en cuanto a la actualización de la superficie libre, por lo que sería necesario la utilización de un término disipativo, que permita

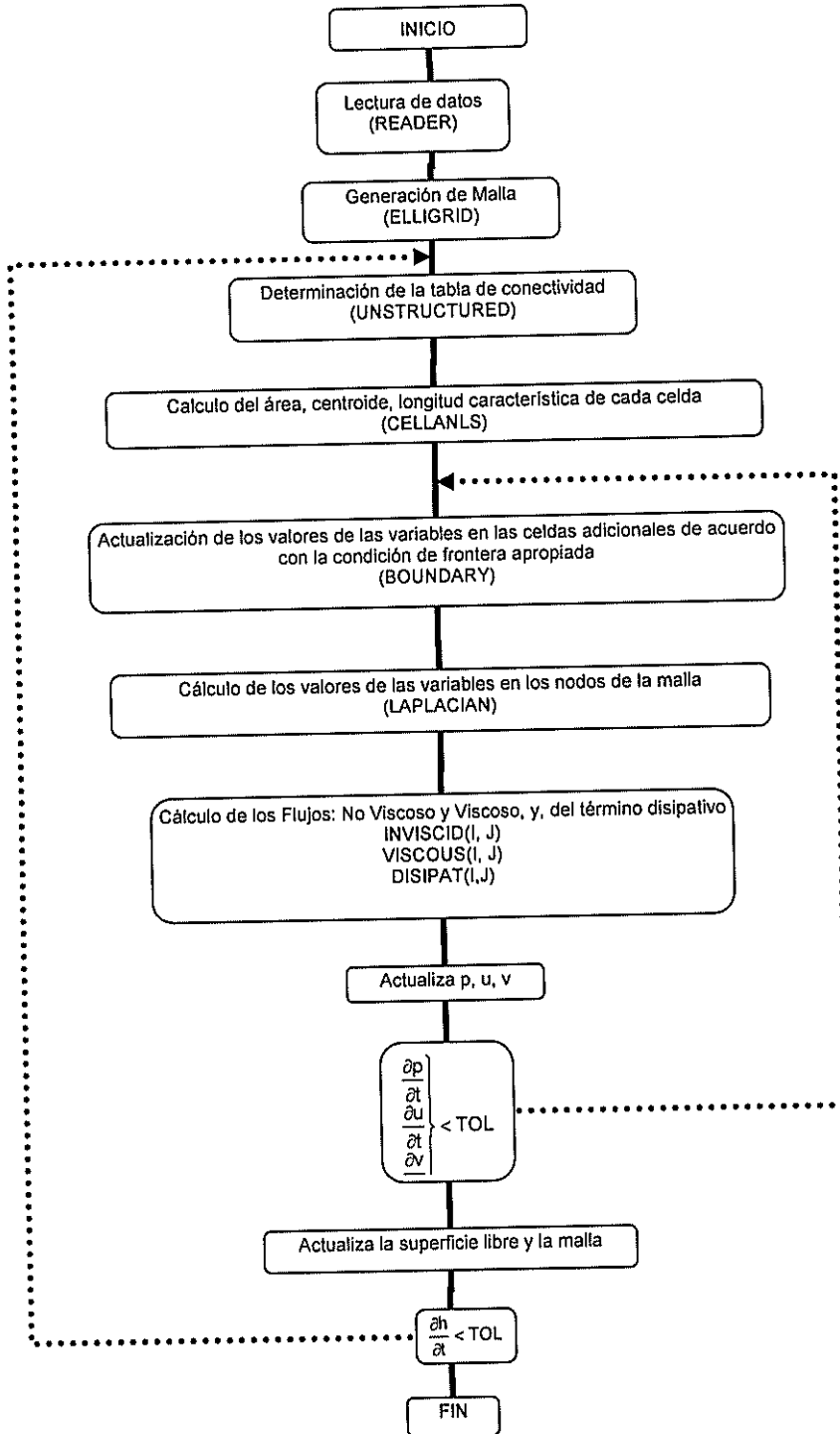
incrementar el tamaño del paso del tiempo con el que se realiza dicha actualización.

El desarrollo de la presente Tesis se lo realizó de manera progresiva, incrementando la complejidad de los problemas analizados paulatinamente. Primero se resolvió un problema con flujo potencial bidimensional con transformación del dominio. Luego, un flujo laminar bidimensional, ducto con sección constante y con expansión. Por último, un flujo con influencia de una superficie libre. Por lo que se recomienda en estudios posteriores continuar con la misma metodología de aprendizaje, pudiéndose seguir la siguiente secuencia de problemas con flujo:

1. 2D Turbulento,
2. 2D Turbulento con influencia de una superficie libre,
3. 3D Laminar,
4. 3D Laminar con superficie libre,
5. 3D Turbulento, y,
6. 3D Turbulento con influencia de una superficie libre.

APÉNDICE

FLUJOGRAMA DEL PROGRAMA IMPLEMENTADO



Los archivos implementados mostrados en la figura anterior son:

- **SlibreGrav.for:** Es el programa principal, y es de este archivo de donde se llaman todas las subrutinas, y se establecen las condiciones iniciales. Además es en donde se desarrolla el proceso iterativo, y se actualiza la posición de la superficie libre.
- **Reader.for:** Es la subrutina encargada de la lectura del archivo de datos, previamente creado por el usuario, y almacena los valores de las variables en el archivo de resultados.
- **Elligrid.for:** Es la subrutina encargada de la generación de la malla. Determina de manera numérica la posición de los puntos interiores de las fronteras leídas por reader.for.
- **Unstructured.for:** Determina los nodos que conforman cada celda, reales y adicionales, almacenándolas en el vector NINDEX(I). Además, determina las celdas vecinas para cada celda, almacenándolas en el vector NBINDEX(I). Por último determina la posición de un nodo necesario para la conformación de la celda adicional, junto con dos nodos que se encuentran sobre la frontera.
- **Area.for:** En este archivo se encuentra la subrutina CELLANLS, que calcula el área y las coordenadas del centroide de cada celda. Además, determina el valor de la longitud característica de cada celda, el cual es utilizado en el cálculo del tamaño del paso de tiempo.

- **Boundary.for:** Actualiza los valores de la presión y las componentes de la velocidad en las celdas adicionales. Se las clasifica como INFLOW (frontera izquierda), OUTFLOW (frontera derecha), LOWER WALL (frontera inferior), y UPPER WALL (frontera superior).
- **Laplacian.for:** En esta subrutina se aproximan los valores de la presión y las componentes de la velocidad en los nodos de la malla, para lo cual se utiliza el método de Promediación Laplaciana Ponderada descrito en el subcapítulo 3.2.
- **Inviscid.for:** En esta subrutina se calcula el flujo no viscoso para cada cara de una celda, ecuación (56). Donde el número de celda es I y el número de la cara es J.
- **Viscous.for:** En esta subrutina se calcula el flujo viscoso para cada cara de una celda, ecuación (77). Donde el número de celda es I y el número de la cara es J.
- **Kcelldedq.for:** En esta subrutina se calcula el término disipador para cada cara de una celda, ecuación (60). Donde el número de celda es I y el número de la cara es J.

Dependiendo del caso analizado es necesario realizar ciertas modificaciones en las subrutinas:

- 1. Ducto de sección constante:** En la subrutina Boundary.for es necesario que los valores de las celdas adicionales sean aproximados de la siguiente manera:

```

!LOWER WALL
DO I=1,N-1
  ICELL = NCELLS+I
  INDEX = 3*(ICELL-1)+1
  P(ICELL)= P(NBINDEX(INDEX))
  U(ICELL)= -U(NBINDEX(INDEX))
  V(ICELL)= -V(NBINDEX(INDEX))
ENDDO

!UPPER WALL
DO I=1,N-1
  ICELL = NTCELLS-(M-1)-I+1
  INDEX = 3*(ICELL-1)+1
  P(ICELL)= P(NBINDEX(INDEX))
  U(ICELL)= -U(NBINDEX(INDEX))
  V(ICELL)= -V(NBINDEX(INDEX))
ENDDO

```

- 2. Ducto con expansión:** En la subrutina Boundary.for es necesario que los valores de las celdas adicionales sean aproximados de la siguiente manera:

```

!LOWER WALL
DO I=1,N-1
  ICELL = NCELLS+I
  INDEX = 3*(ICELL-1)+1
  P(ICELL)= P(NBINDEX(INDEX))
  U(ICELL)= -U(NBINDEX(INDEX))
  V(ICELL)= -V(NBINDEX(INDEX))
ENDDO

!UPPER WALL
DO I=1,N-1
  ICELL = NTCELLS-(M-1)-I+1
  INDEX = 3*(ICELL-1)+1
  P(ICELL)= P(NBINDEX(INDEX))
  U(ICELL)= -U(NBINDEX(INDEX))
  V(ICELL)= -V(NBINDEX(INDEX))
ENDDO

```


3. **Cuerpo sumergido con influencia de superficie libre:** En la subrutina Boundary.for es necesario que los valores de las celdas adicionales sean aproximados de la siguiente manera:

```

!LOWER WALL
DO I=1,N-1
    ICELL = NCELLS+I
    INDEX = 3*(ICELL-1)+1
    P(ICELL)= P(NBINDEX(INDEX))
    U(ICELL)= -U(NBINDEX(INDEX))
    V(ICELL)= -V(NBINDEX(INDEX))

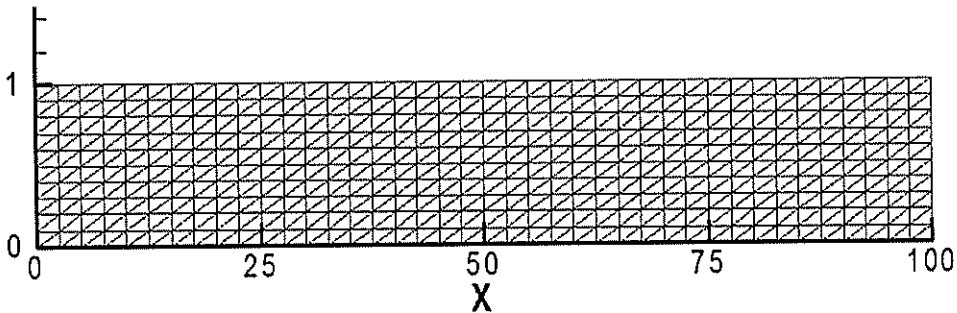
ENDDO

!UPPER WALL
DO I=1,N-1
    ICELL = NTCELLS-(M-1)-I+1
    INDEX = 3*(ICELL-1)+1
    INOD = N*M-I+1
    H = 0.5*(Y(INOD)+Y(INOD-1))-Y(N*(M-1)+1)
    P(ICELL)= H/(FR**2)
    U(ICELL)= U(NBINDEX(INDEX))
    V(ICELL)= V(NBINDEX(INDEX))
ENDDO

```

A continuación se presentan algunos de los archivos de datos empleados, uno por cada caso:

- **Ducto con Sección constante:** El siguiente archivo de datos representa a un flujo con un número de Reynolds de 10^4 . El dominio considerado es de 100 veces el diámetro, y se emplearon 41 nodos en la dirección x, y 11 en la dirección y. Luego de la generación elíptica se obtiene la siguiente figura:



ARCHIVO DE DATOS

DUCTO DE SECCION CONSTANTE

```

41,11          N      M
1000  1.00E-03, 9.81 DENS.(kg/m**3)KINEM.VISC.(m**2/s) GRAVITY(m/s**2)
1.0E+4 1000      Re,Fr
1.0E+0 0.5      CFL, BETHA
1.00E-15, 60000 MAX. VALUES FOR DMX1 AND KONT1 (ELLIPTIC GRID GENERATION)
1.00E-20, 1000  MAX. VALUES FOR DMX2 AND KONT2 (DELTA Q)
1.00E-9, 200    MAX. VALUES FOR DMX3 AND KONT3 (P' ON ALL INTERIOR POINTS)
11, 120

```

```

0.000 0.00  G1 FRONTERA INFERIOR
2.50  0.00
5.00  0.00
7.50  0.00
10.00 0.00
12.50 0.00
15.00 0.00

```

17.50	0.00
20.00	0.00
22.50	0.00
25.00	0.00
27.50	0.00
30.00	0.00
32.50	0.00
35.00	0.00
37.50	0.00
40.00	0.00
42.50	0.00
45.00	0.00
47.50	0.00
50.00	0.00
52.50	0.00
55.00	0.00
57.50	0.00
60.00	0.00
62.50	0.00
65.00	0.00
67.50	0.00
70.00	0.00
72.50	0.00
75.00	0.00
77.50	0.00
80.00	0.00
82.50	0.00
85.00	0.00
87.50	0.00
90.00	0.00
92.50	0.00
95.00	0.00
97.50	0.00
100.00	0.00

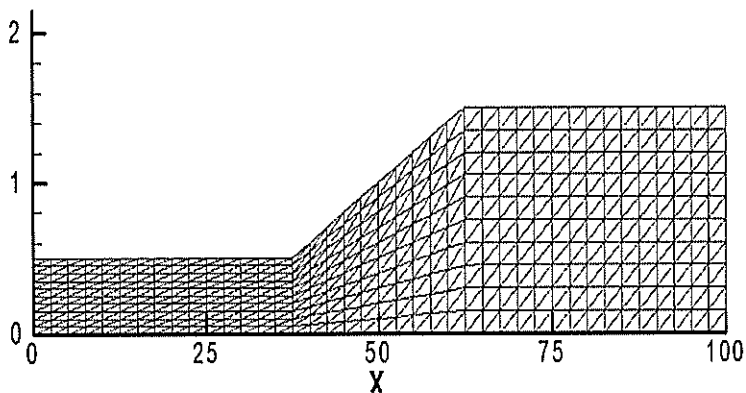
0.00	0.1	G2 FRONTERA IZQUIERDA
0.00	0.2	
0.00	0.3	
0.00	0.4	
0.00	0.5	
0.00	0.6	
0.00	0.7	
0.00	0.8	
0.00	0.9	

0.000	1.00	G3 FRONTERA SUPERIOR
2.50	1.00	
5.00	1.00	
7.50	1.00	
10.00	1.00	
12.50	1.00	
15.00	1.00	
17.50	1.00	

20.00	1.00
22.50	1.00
25.00	1.00
27.50	1.00
30.00	1.00
32.50	1.00
35.00	1.00
37.50	1.00
40.00	1.00
42.50	1.00
45.00	1.00
47.50	1.00
50.00	1.00
52.50	1.00
55.00	1.00
57.50	1.00
60.00	1.00
62.50	1.00
65.00	1.00
67.50	1.00
70.00	1.00
72.50	1.00
75.00	1.00
77.50	1.00
80.00	1.00
82.50	1.00
85.00	1.00
87.50	1.00
90.00	1.00
92.50	1.00
95.00	1.00
97.50	1.00
100.00	1.00

100.00	0.1	G4 FRONTERA IZQUIERDA
100.00	0.2	
100.00	0.3	
100.00	0.4	
100.00	0.5	
100.00	0.6	
100.00	0.7	
100.00	0.8	
100.00	0.9	

- **Ducto con Expansión 1:3:** El siguiente archivo de datos representa a un flujo con un número de Reynolds de 2000. El dominio considerado es de 100 veces el diámetro, y se emplearon 41 nodos en la dirección x, y 11 en la dirección y. Luego de la generación elíptica se obtiene la siguiente figura:



ARCHIVO DE DATOS

```

EXPANSION 1:3
41, 11
1000, 1.00E-03, 9.81 DENS.(kg/m**3) KINEM.VISC.(m**2/s) GRAVITY(m/s**2)
2.0E+3, 1000 Re,Fr
1.0E+0, 0.5 CFL, BETHA
1.00E-13, 60000 MAX. VALUES FOR DMX1 AND KONT1 (ELLIPTIC GRID GENERATION)
1.00E-20, 1000 MAX. VALUES FOR DMX2 AND KONT2 (DELTAQ)
1.00E-9, 200 MAX. VALUES FOR DMX3 AND KONT3 (P' ON ALL INTERIOR POINTS)
11, 120

0.000 0.00 G1 (FRONTERA INFERIOR)
2.50 0.00
5.00 0.00
7.50 0.00
10.00 0.00
12.50 0.00
15.00 0.00
17.50 0.00
20.00 0.00
22.50 0.00
25.00 0.00

```

27.50	0.00
30.00	0.00
32.50	0.00
35.00	0.00
37.50	0.00
40.00	0.00
42.50	0.00
45.00	0.00
47.50	0.00
50.00	0.00
52.50	0.00
55.00	0.00
57.50	0.00
60.00	0.00
62.50	0.00
65.00	0.00
67.50	0.00
70.00	0.00
72.50	0.00
75.00	0.00
77.50	0.00
80.00	0.00
82.50	0.00
85.00	0.00
87.50	0.00
90.00	0.00
92.50	0.00
95.00	0.00
97.50	0.00
100.00	0.00

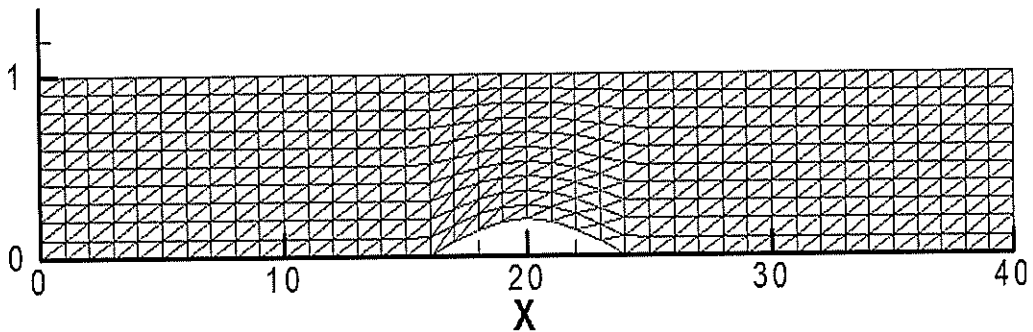
0.00	0.05	G2 (FRONTERA DERECHA)
0.00	0.1	
0.00	0.15	
0.00	0.2	
0.00	0.25	
0.00	0.3	
0.00	0.35	
0.00	0.4	
0.00	0.45	

0.000	0.50	G3 (FRONTERA SUPERIOR)
2.50	0.50	
5.00	0.50	
7.50	0.50	
10.00	0.50	
12.50	0.50	
15.00	0.50	
17.50	0.50	
20.00	0.50	
22.50	0.50	
25.00	0.50	
27.50	0.50	

30.00	0.50
32.50	0.50
35.00	0.50
37.50	0.50
40.00	0.60
42.50	0.70
45.00	0.80
47.50	0.90
50.00	1.00
52.50	1.10
55.00	1.20
57.50	1.30
60.00	1.40
62.50	1.50
65.00	1.50
67.50	1.50
70.00	1.50
72.50	1.50
75.00	1.50
77.50	1.50
80.00	1.50
82.50	1.50
85.00	1.50
87.50	1.50
90.00	1.50
92.50	1.50
95.00	1.50
97.50	1.50
100.00	1.50

100.00	0.15	G4 (FRONTERA IZQUIERDA)
100.00	0.3	
100.00	0.45	
100.00	0.6	
100.00	0.75	
100.00	0.9	
100.00	1.05	
100.00	1.2	
100.00	1.35	

- **Cuerpo sumergido:** El siguiente archivo de datos representa a un flujo con un número de Reynolds de $1.5 \cdot 10^5$ y un número de Froude de 0.29. El dominio considerado es de 40 veces la profundidad, y se emplearon 41 nodos en la dirección x, y 11 en la dirección y. Además, se ubica un cuerpo senoidal de 0.2 veces la profundidad. Luego de la generación elíptica se obtiene la siguiente figura:



ARCHIVO DE DATOS

```

H=0.2
41, 11          N      M
1000, 1.00E-03, 9.81  DENS.(kg/m**3)  KINEM.VISC.(m**2/s)  GRAVITY(m/s**2)
1.5E+05, 0.29      Re y Fr
5.0E-01, 0.25     CFL y Beta
1.0E-14, 60000  MAX. VALUES FOR DMX1 AND KONT1 (ELLIPTIC GRID GENERATION)
1.0E-06, 1000  MAX. VALUES FOR DMX2 AND KONT2 (DELTA Q)
1.0E-08, 2000  MAX. VALUES FOR DMX3 AND KONT3 (DELTA P ON ALL INTERIOR POINTS)
11      120

```

```

0.0  0.0  G1 (FRONTERA INFERIOR)
1.0  0.0
2.0  0.0
3.0  0.0
4.0  0.0
5.0  0.0
6.0  0.0

```


7.0	0.0
8.0	0.0
9.0	0.0
10.0	0.0
11.0	0.0
12.0	0.0
13.0	0.0
14.0	0.0
15.0	0.0
16.0	0.0
17.0	0.076536686
18.0	0.141421356
19.0	0.184775906
20.0	0.2
21.0	0.184775906
22.0	0.141421356
23.0	0.076536686
24.0	0.0
25.0	0.0
26.0	0.0
27.0	0.0
28.0	0.0
29.0	0.0
30.0	0.0
31.0	0.0
32.0	0.0
33.0	0.0
34.0	0.0
35.0	0.0
36.0	0.0
37.0	0.0
38.0	0.0
39.0	0.0
40.0	0.0

0.0	0.10	G2 (FRONTERA IZQUIERDA)
0.0	0.20	
0.0	0.30	
0.0	0.40	
0.0	0.50	
0.0	0.60	
0.0	0.70	
0.0	0.80	
0.0	0.90	

0.0	1.0	G3 (FRONTERA SUPERIOR)
1.0	1.0	
2.0	1.0	
3.0	1.0	
4.0	1.0	
5.0	1.0	
6.0	1.0	
7.0	1.0	

8.0	1.0
9.0	1.0
10.0	1.0
11.0	1.0
12.0	1.0
13.0	1.0
14.0	1.0
15.0	1.0
16.0	1.0
17.0	1.0
18.0	1.0
19.0	1.0
20.0	1.0
21.0	1.0
22.0	1.0
23.0	1.0
24.0	1.0
25.0	1.0
26.0	1.0
27.0	1.0
28.0	1.0
29.0	1.0
30.0	1.0
31.0	1.0
32.0	1.0
33.0	1.0
34.0	1.0
35.0	1.0
36.0	1.0
37.0	1.0
38.0	1.0
39.0	1.0
40.0	1.0

40.0	0.10	(FRONTERA DERECHA)
40.0	0.20	
40.0	0.30	
40.0	0.40	
40.0	0.50	
40.0	0.60	
40.0	0.70	
40.0	0.80	
40.0	0.90	

BIBLIOGRAFÍA

1. Anders, Östman, Mesh Generation and Simulation of Two-Dimensional Free-Surface Flow, Norway, 1999.
2. Anderson, John Jr., Computational Fluid Dynamics, First Edition, USA, 1995.
3. Anderson, W. Kyle, et al, Implicit/Multigrid Algorithms for Incompressible Turbulent Flows on Unstructured Grids, AIAA Paper 95-1740, USA, 1995.
4. Bet F. et al, Numerical Simulation of Ship flow in Restricted Water, Proyecto del Instituto de Combustión y Dinámica del Gas, Universidad de Duisburg, Dinamarca, 1999.

5. Chorin, Alexandre, A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems, Journal of Computational Physics Volume 2 Number 1, pages 12-26, August 1967.
6. Fox R. y McDonald A., Introducción a la Mecánica de Fluidos, IV Edición, USA, 1995.
7. Hino, Takanori, et al, A Finite Method with Unstructured Grid for Free Surface Flow Simulations, Proceedings of the Sixth International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics, Pages 173-193, 1994.
8. Hino, Takanori, An Unstructured Grid Method for Incompressible Viscous Flows with a Free Surface, AIAA Paper 97-0862, USA, 1997.
9. Jameson, Antony, Numerical Solution Of The Euler Equation By Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time-Stepping Schemes, AIAA Paper 81-1259, USA, 1981.
10. Maciel, Edison, Solution of Aerospace Problems using Structured and Unstructured Strategies, Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences Volume 23 No. 2 page 155-178, Rio de Janeiro, Brazil, 2001.

11. Moreno J., Notas de Clases de Programación Aplicada I, FIMCM, ESPOL, ECUADOR, 2005.
12. Murthy J. y Mathur S., Numerical Methods in Heat, Mass, and Momentum Transfer, USA, 2002.
13. Newman J., Marine Hydrodynamics, MIT Press, USA, 1980.
14. Pacheco J., Numerical Solution of Liquid Film and Jet Flows, USA, 1999.
15. Pacheco J. y Peck E., No staggered Boundary Fitted Coordinate Method for Free Surface Flow, USA, 1999.
16. Patankar, Suhas, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, USA, 1980.
17. Rausch, Russ D., Spatial Adaptation of Unstructured Meshes for Unsteady Aerodynamic Flow Computations, AIAA Journal Volume 30 N 5 pages 1243-1251, USA, May 1992.
18. Streeter, Víctor, Mecánica de Fluidos, Novena Edición, USA, 2000.

19. Swanson R. y Turkel E., Multistage schemes with Multigrid for Euler and Navier-Stokes Equations, NASA Technical paper 3631, USA, 1997.

20. Thompson J. y Warsi C., Numerical Grid Generation, USA, 1985.