CÁLCULO VECTORIAL
PRIMERA EVALUACIÓN – SOLUCIÓN Y RÚBRICA
PAO2 - 2022

PRIMER TEMA (21 puntos)

1.b) Dadas las funciones $f(x,y)=\sqrt{1+x^2+y^2}$ y $g(x,y)=x^2-y^2$, entonces los valores reales de a y b que provocan que las curvas de nivel $S_a(f)$ y $S_b(g)$ sean ortogonales son $a>0$ y $b=0$

Solución: La proposición es **FALSA.**

Si $a=\frac{1}{2} \Rightarrow S_{\frac{1}{2}}(f)=\left\{(x,y)\in dom(f): \frac{1}{2}=\sqrt{1+x^2+y^2}\right\}$. Note que:

$$\frac{1}{2}=\sqrt{1+x^2+y^2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{4}-1=x^2+y^2 \;\Rightarrow\; -\frac{3}{4}=x^2+y^2$$

y por tanto $S_{\frac{1}{2}}(f)=\emptyset$, con lo cual no se puede establecer ortogonalidad entre curvas dado que no hay curva.

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
El estudiante domina la definición de curvas de nivel y el concepto de ortogonalidad entre curvas.	No conoce la definición de curva de nivel y solo posee ideas vagas de cómo proceder sin escribir algo completamente correcto.	Escribe la condición de ortogonalidad con los vectores gradientes, pero no hace algo con ello o escribe la definición de curva de nivel sin concluir.	Prueba que existe ortogonalidad pero sin concluir para que valores de a y b ocurre o se percata que hay conjuntos de nivel de f para a>0 que son vacíos pero no concluye.	Presenta una justificación adecuada de que la ortogonalidad no se da para los a>0, ya sea usando el producto punto entre gradientes o la definición de conjunto de nivel con su conclusión respectiva.
	0-1	2-3	4-6	7

1.b) Si dos caras de un cubo se encuentran en los planos $3x - y + 2z = 5$ y $3x - y + 2z = 7$, entonces el volumen del cubo es $\frac{2\sqrt{14}}{49}\ u^3$

Solución: La proposición es **VERDADERA.**

- Llamemos $\pi_1: 3x - y + 2z - 5 = 0$ y $\pi_2: 3x - y + 2z - 7 = 0$.
- Si dos caras de un cubo se encuentran en dos planos paralelos, la arista a del cubo debe ser necesariamente la distancia entre ambos planos. Esta distancia es además la distancia de un punto de uno de los planos al otro, en este caso tomaremos el punto P con coordenadas $(x_0, y_0, z_0) = (1,0,1) \in \pi_1$ y calcularemos su distancia al plano $\pi_2: ax + by + c + d = 0$ con $a = 3, b = -1, c = 2, d = -7$ mediante la fórmula:

$$a = d_{P\pi_2} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|(3)(1) + (-1)(0) + (2)(1) + (-7)|}{\sqrt{(3)^2 + (-1)^2 + (2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

- Luego, el volumen del cubo es:

$$V = a^3 = \left(\frac{\sqrt{14}}{7}\right)^3 = \frac{\left(\sqrt{14}\right)^2(\sqrt{14})}{(7)^2(7)} = \frac{14\sqrt{14}}{(49)(7)} = \frac{2\sqrt{14}}{49}\ u^3$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
El estudiante sabe aplicar conceptos de geometría analítica tridimensional para obtener el volumen de un cubo.	No puede establecer que si las 2 caras del cubo están en planos paralelos, la medida del lado del cubo es la distancia entre los planos.	Interpreta correctamente la distancia entre planos como la medida del lado del cubo y la expresa, luego reemplaza el punto y los coeficientes del plano y calcula la distancia.	Una vez obtenida la distancia que es la longitud del lado del cubo, procede a calcular el volumen del cubo.	Calculado el volumen del cubo reconoce la necesidad de racionalizar la respuesta, concluyendo que la expresión es verdadera.
	0-1	2-3	4-6	7

1.c) La ecuación $z^2 = x^2 + xy^2 z$ define a z implícitamente como una función de x y y, entonces $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1,2) = \frac{3}{4}$

Solución: La proposición es **FALSA.**

- Sea $F(x,y,z) = x^2 + xy^2 z - z^2$. Podemos calcular la derivada parcial requerida como sigue:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2x + y^2 z}{xy^2 - 2z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1,2) = -\frac{2(1) + (1)^2(2)}{(1)(1)^2 - 2(2)} = \frac{4}{3}$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
El estudiante sabe derivar implícitamente una función que representa un lugar geométrico en R^3 y evaluarla en un punto dado.	No sabe como plantear la derivación implícita solicitada.	Interpreta bien la derivación implícita y procede con la aplicación de la regla de la potencia y la del producto.	Resuelve para la derivada parcial solicitada despejando correctamente de la expesión anterior.	Evalúa en el punto dado la derivada parcial solicitada, concluyendo que la expresión es falsa.
	0-1	2-3	4-6	7

SEGUNDO TEMA (24 puntos)

Dada la función $\emptyset(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,(1-\cos\,y)\,\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad , & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) **Calcule la derivada direccional de** $\emptyset(x,y)$, **en el origen, para una dirección cualquiera (15 puntos).**

b) **Es diferenciable** $\emptyset(x,y)$ **en el origen? Justifique su respuesta (9 puntos).**

Solución:

a) Sea $\hat{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$ el vector unitario en una dirección arbitraria. Por definición, la derivada direccional de ϕ en $(0,0)$ es, para $\sin\theta, \cos\theta \neq 0$,

$$\begin{aligned} D_{\hat{v}}\phi(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\phi(h\cos\theta, h\sin\theta) - \overbrace{\phi(0,0)}^{0}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h\cos\theta(1-\cos(h\sin\theta))|h|}{h^3(\cos^2\theta + h^2\sin^4\theta)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta + h^2\sin^4\theta} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos(h\sin\theta)}{h\sin\theta}\,\frac{|h|\sin\theta}{h} \end{aligned}$$

El primer límite es $1/\cos\theta$ –asumiendo que $\cos\theta \neq 0$–; en cuanto al segundo, si $y = h\sin\theta$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos(h\sin\theta)}{h\sin\theta} = \lim_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{y} = 0$$

por la regla de L'Hôpital y, como $\dfrac{|h|\sin\theta}{h}$ es acotado, llegamos a que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos(h\sin\theta)}{h\sin\theta}\,\frac{|h|\sin\theta}{h} = 0$$

Así, $D_{\hat{v}}\phi(0,0) = 0$ para todo $\theta \neq 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$, ya que dichos valores hacen que $\sin\theta = 0$ o $\cos\theta = 0$.

Ahora bien, en la dirección $\theta = 0, \pi$, el vector unitario es $\hat{v}_1 = (\pm 1, 0)$ y la correspondiente derivada es:

$$D_{\hat{v}_1}\phi(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{\phi(\pm h, 0)}^{0} - \overbrace{\phi(0,0)}^{0}}{h} = 0$$

mientras que en la direcciones $\theta = \pi/2, 3\pi/2$ el vector unitario es $\hat{v}_2 = (0, \pm 1)$ y la derivada es:

$$D_{\hat{v}_2}\phi(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{\phi(0,\pm h)}^{0} - \overbrace{\phi(0,0)}^{0}}{h} = 0$$

Por lo tanto,

$$D_{\hat{v}}\phi(0,0) = 0 \ , \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe determinar la derivada direccional de una función en un punto dado y para una dirección culaquiera.	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	No establece correctamente un vector unitario general ni el concepto de la derivada direccional de una función en un punto en la dirección de ese vector.	Define el vector unitario general, la derivada direccional solicitada y reemplaza en esta los datos requeridos, obteniendo el límite de un producto, resolviendo correctamente ambos límites de manera independiente.	Obtiene el resultado final de la derivada e intepreta este resultado en función del ángulo del vector unitario definido al inicio del ejercicio.	Con toda la información obtenida concluye que la derivada direccional en el origen existe en todas las direcciones y es igual a cero.
	0-3	4-9	10-14	15

b) Tenemos que ϕ es diferenciable en (0,0) si existen $\phi_x(0,0)$, $\phi_y(0,0)$ y, además:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\phi(h,k)-\phi(0,0)-\phi_x(0,0)h-\phi_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Ahora bien, sabemos que las parciales de primer orden son las derivadas direccionales para $\theta = 0$ –para ϕ_x– y $\theta = \pi/2$ –para ϕ_y–, es claro que ambas existen y son iguales a cero. Como, además, $\phi(0,0) = 0$, el límite anterior se convierte en:

$$\begin{aligned}\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\phi(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h(1-\cos k)\sqrt{h^2+k^2}}{(h^2+k^4)\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h(1-\cos k)}{h^2+k^4}\end{aligned}$$

el cual **no** es cero ya que, si nos acercamos al origen por la parábola $h = k^2$ la fracción anterior tiende a:

$$\lim_{k\to 0} \frac{k^2(1-\cos k)}{k^4+k^4} = \frac{1}{2}\lim_{k\to 0} \frac{1-\cos k}{k^2} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, ϕ **no es diferenciable** en el origen.

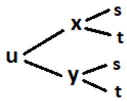
Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
El estudiante sabe aplicar la definición de difrenciabilidad de una función en un punto determinado.	No establece correctamente el concepto de diferenciabilidad de una función en un punto determinado.	Reduce la expresión del límite considerando que las derivadas direccionales en el origen existen y son cero, así como la evaluación de la función en el origen.	Resuelve correctamente el límite siguiendo alguna determinada trayectoria.	Con el resultado del límite que es diferente de cero, concluye que la función no es diferenciable en el origen.
	0-1	2-4	5-8	9

TERCER TEMA (15 puntos)

Sea $u = f(x,y)$ de clase C^2, con $x = e^s\cos(t)$ y $y = e^s\sin(t)$. Obtenga la expresión para $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$

<u>**Solución:**</u> Tenemos que:



$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}e^s\cos(t) + \frac{\partial u}{\partial y}e^s\sin(t)$$

así, aplicando regla de la cadena a la función $\frac{\partial u}{\partial s}(x,y)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}$$

$$= \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial s}\right]\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}$$
$$+ \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,\frac{\partial y}{\partial s}\right]\cdot\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}$$

$$= \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,e^s\cos(t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\,e^s\sin(t)\right]\cdot e^s\cos(t) + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot e^s\cos(t)$$
$$+ \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}\,e^s\cos(t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,e^s\sin(t)\right]\cdot e^s\sin(t) + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot e^s\sin(t)$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,e^{2s}\,cos^2(t) + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\,e^{2s}\cos(t)\sin(t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,e^{2s}\,sin^2(t) + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot e^s\cos(t) + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot e^s\sin(t)$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe cómo aplicar correctamente la regla de la cadena.	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	No sabe cómo aplicar la regla de la cadena.	Aplica la regla de la cadena para las primera derivada, pero tiene problemas para calcular la segunda derivada y no logra demostrar lo planteado.	Aplica la regla de la cadena para las primera y segunda derivadas, pero comete errores al sumar los términos y esto impide llegar al resultado planteado.	Aplica la regla de la cadena para las primera y segunda derivadas, llegando al resultado planteado de una manera correcta y sin cometer errores.
	0-2	3-6	7-14	15

CUARTO TEMA (22 puntos)

a) Dada la curva $r(t) = (3 - 2t^2, t^2 - 4t, 2t^2 - 1)$. Determine en $t = 1$:

a.1) El radio de curvatura (6 puntos)

a.2) La ecuaciones cartesianas del plano osculador y del del plano normal (8 puntos)

b) Obtenga una parametrización para la curva C: $(2y + x)^2 = -4y(2 - x) - 4(x + 1)$ (8 puntos)

Solución:

a) Calcularemos algunas magnitudes que serán de utilidad en este apartado:

- $r(1) = (1, -3, 1)$
- **Vector tangente unitario:**

$$r'(t) = (-4t, 2t - 4, 4t) \Rightarrow \|r'(t)\| = \sqrt{(-4t)^2 + (2t - 4)^2 + (4t)^2} = 2\sqrt{9t^2 - 4t + 4}$$

$$T(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} = \frac{(-4t, 2t - 4, 4t)}{2\sqrt{9t^2 - 4t + 4}} = \left(\frac{-2t}{\sqrt{9t^2 - 4t + 4}}, \frac{t - 2}{\sqrt{9t^2 - 4t + 4}}, \frac{2t}{\sqrt{9t^2 - 4t + 4}}\right)$$

Vea que en $t = 1$, se tiene que:

  - $r'(1) = (-4, -2, 4)$
  - $\|r'(1)\| = 6$
  - $T(1) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}(-2, -1, 2)$

- **Vector normal unitario:**

$$T'(t) = \left(\frac{-2\left(\sqrt{9t^2 - 4t + 4} - \frac{9t^2 - 2t}{\sqrt{9t^2 - 4t + 4}}\right)}{9t^2 - 4t + 4}, \frac{\sqrt{9t^2 - 4t + 4} - \frac{(9t - 2)(t - 2)}{\sqrt{9t^2 - 4t + 4}}}{9t^2 - 4t + 4}, \frac{2\left(\sqrt{9t^2 - 4t + 4} - \frac{9t^2 - 2t}{\sqrt{9t^2 - 4t + 4}}\right)}{9t^2 - 4t + 4}\right)$$

$$T'(t) = \left(\frac{4t - 8}{(9t^2 - 4t + 4)^{3/2}}, \frac{16t}{(9t^2 - 4t + 4)^{3/2}}, \frac{8 - 4t}{(9t^2 - 4t + 4)^{3/2}}\right) = 4\left(\frac{t - 2}{(9t^2 - 4t + 4)^{3/2}}, \frac{4t}{(9t^2 - 4t + 4)^{3/2}}, \frac{2 - t}{(9t^2 - 4t + 4)^{3/2}}\right)$$

$$\|T'(t)\| = 4\left(\sqrt{\frac{(t - 2)^2 + (4t)^2 + (2 - t)^2}{(9t^2 - 4t + 4)^3}}\right) = 4\left(\sqrt{\frac{2(9t^2 - 4t + 4)}{(9t^2 - 4t + 4)^3}}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{|9t^2 - 4t + 4|}$$

Vea que en $t = 1$, se tiene que:

  - $T'(1) = \left(-\frac{4}{27}, \frac{16}{27}, \frac{4}{27}\right)$
  - $\|T'(1)\| = \frac{4}{9}\sqrt{2}$
  - $N(1) = \frac{T'(1)}{\|T'(1)\|} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{4\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{6}(-1, 4, 1)$

- **Vector Binormal en $t = 1$:**

$$B(1) = T(1) \times N(1) = \frac{\sqrt{2}}{18}[(-2, -1, 2) \times (-1, 4, 1)] = \frac{\sqrt{2}}{18}(-9, 0, -9) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1, 01)$$

a.1) El radio de curvatura en $t = 1$ es:

$$r(1) = \frac{1}{k(1)} = \frac{\|r'(1)\|}{\|T'(1)\|} = \frac{6}{\frac{4}{9}\sqrt{2}} = \frac{27}{2\sqrt{2}} = \frac{27}{4}\sqrt{2}$$

Rúbrica a.1):

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe calcular la curvatura para una trayectoria en un punto dado.	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	Calcula la primera y segunda derivada de la trayectoria y las evalúa en el punto dado.	Expresa la curvatura en el punto dado y realiza las operaciones de módulo de producto cruz y módulo de la primera derivada al cubo, respectivas.	Resuelve correctamente la parte algebraica de la curvatura y obtiene el resultado.	Racionaliza correctamente el resultado de la curva obtenido.
	0-2	3-4	5	6

a.2) Con los valores calculados anteriormente se tiene:

- **Plano osculador:**

$$B(1)\cdot\big((x,y,z)-r(1)\big)=0$$
$$-\frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,1)\cdot(x-1,y+3,z-1)=0$$
$$x+z-2=0$$

- **Plano normal:**

$$T(1)\cdot\big((x,y,z)-r(1)\big)=0$$
$$\frac{1}{3}(-2,-1,2)\cdot(x-1,y+3,z-1)=0$$
$$-2x+2-y-3+2z-2=0$$
$$2x+y-2z+3=0$$

Rúbrica a.2):

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe determinar las ecuaciones cartesianas del plano osculador y plano normal para una trayectoria en un punto dado.	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	Calcula el vector tangente unitario en el valor de t dado.	Realiza el producto cruz de los vectores tangente y normal unitarios en el valor de t dado.	Resuelve para la ecuación del plano osculador, obteniendo la expresión solicitada.	Resuelve para la ecuación del plano normal, obteniendo la expresión solicitada.
	0-1	2-4	5-6	7-8

b)

$$(2y+x)^2=-4y(2-x)-4(x+1)\Rightarrow 4y^2+4yx+x^2=-8y+4yx-4x-4\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4y^2+x^2=-8y-4x-4\Rightarrow 4y^2+8y+x^2+4x+4=0\Rightarrow 4\left(y^2+2y+1\right)+x^2+4x+4=4$$
$$\Rightarrow 4(y+1)^2+(x+2)^2=4\Rightarrow (y+1)^2+\frac{(x+2)^2}{4}=1$$

Observe que se obtiene la ecuación de una elipse, y

$$\frac{x+2}{2}=\cos t \quad \text{y} \quad y+1=\operatorname{sen} t$$

satisfacen la ecuación:

$$\frac{(x+2)^2}{4}+(y+1)^2=\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t=1$$

En consecuencia, unas ecuaciones paramétricas de la curva C son:

$$x=-2+2\cos t,\quad y=-1+\operatorname{sen} t \quad \text{con} \quad 0\le t\le 2\pi$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe determinar las ecuaciones paramétricas de una curva expresada en coordenadas cartesianas.	**Inicial**	**En desarrollo**	**Desarrollado**	**Excelente**
	Realiza el trabajo algebráico respectivo a partir de la expresión cartesiana dada.	Observa que obtiene la ecuación de una elipse y determina las expresiones correctas para cos(t) y sen(t).	Comprueba que se satisface la ecuación original.	Expresa correctamente la parametrización solicitada.
	0-3	4-5	6-7	8

QUINTO TEMA (18 puntos)

Dadas las funciones $f: R^2 \to R$ **tal que** $f(x,y) = \left(cos(2y) + sen(xy)\right)$ **y** $g: R^2 \to R^2$ **tal que** $g(u,v) = \left(u\,v^2\,, v^2 + 3u^2\right)$**.**

a) **Determine la matriz diferencial** $D[(fog)\ (1,1)]$ **(10 puntos)**

b) **Explique y justifique el significado de cada columna de la matriz obtenida en a) (8 puntos)**

a)

$$D[(fog)\ (u,v)] = D[f]_{g(u,v)}\ D[g]_{(u,v)}$$

$$g(1,1) = \left(1(1)^2\,, (1)^2\ + 3(1)^2\right) = (1,4)$$

$$D[(fog)\ (u,v)]_{(1,1)} = \ (\ y\,cos(xy) \quad -2\ sen(2y) + x\ cos(xy)\ )_{(1,4)} \begin{pmatrix} v^2 & 2uv \\ 6u & 2v \end{pmatrix}_{(1,1)}$$

$$D[(fog)\ (u,v)]_{(1,1)} = (4\ cos(4) \quad -2\ sen(8) + 1\ cos(4)) \begin{pmatrix} (1)^2 & 2\ (1)(1) \\ 6(1) & 2(1) \end{pmatrix}$$

$$D[(fog)\ (u,v)]_{(1,1)} = (4\ cos(4) \qquad -2\ sen(8) + cos(4)) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \ (4\ \ cos(4) - 12\ sen(8) + 6\ cos(4) \qquad 8\ cos(4) - 4\ sen(8) + 2\ cos(4))$$

$$D[(fog)\ (1,1)] = \ (\ 10\ cos(4) - 12\ sen(8) \qquad 10\ cos(4) - 4\ sen(8))$$

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
El estudiante sabe obtener la matriz diferencial de una composición de funciones en un punto dado.	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
	Expresa la matriz solicitada como producto de las dos matrices respectivas relacionadas con ambas funciones f y g.	Evalúa la función g en el punto dado y obtiene las matrices diferenciales de f y g en el punto dado, realizando las derivadas respectivas.	Realiza los reemplazos necesarios en ambas matrices.	Obtiene la matriz diferencial de orden 1x2 solicitada.
	0-2	3-6	7-9	10

b) Cada columna de la matriz $\boldsymbol{D}[(\boldsymbol{fog})\ (\mathbf{1},\mathbf{1})]$ representa la derivada parcial de la función f con respecto a las variables u y v respectivamente en el punto dado $(u,v)=(1,1)$, ya que se trata de la misma regla de la cadena, es decir:

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\bigg|_{(x(u,v),y(u,v))} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\bigg|_{(x(u,v),y(u,v))}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}=(y\ cos(xy))\ (v^2)+(-2\ sen(2y)+x\ cos(xy))\ (6u\ )$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}=(4\ cos(4))\ (1^2)+(-2\ sen(8)+1\cos(4))(6)\ =10\ cos(4)-12\ sen(8)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}=(y\ cos(xy))\ (2uv)+(-2\ sen(2y)+x\ cos(xy))\ (2v\ )$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}=(4\ cos(4))\ (2)+(-2\ sen(8)+1\cos(4))(2)\ =10\ cos(4)-4\ sen(8)$$

Se obtienen los mismos resultados que los hallados en la parte a) del ejercicio ya que son dos formas distintas de aplicar la regla de la cadena.

Rúbrica:

Capacidades deseadas	Desempeño			
	Inicial	En desarrollo	Desarrollado	Excelente
El estudiante sabe interpretar que el hallar la matriz diferencial de la función compuesta es lo mismo que aplicar directamente la regla de la cadena.	Expresa que cada columna de la matriz obtenida representa la derivada parcial de la función f con respecto a las variables u y v respectivamente en el punto dado.	Expresa las derivadas parciales de la función f con respecto a las variables u y v.	Realiza las derivadas de f con respecto a u y v, y reemplaza ambas en el punto requerido.	Obtiene como resultado que las expresiones de las columnas de la matriz dan los mismos resultados que los aquí obtenidos.
	0-2	3	4-7	8