ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL

Instituto de Ciencias Matemáticas

"Uso de Técnicas de Programación Lineal y Entera en Estimaciones Estadísticas”

TESIS DE GRADO

Previa la obtención del título de:

INGENIERO EN ESTADÍSTICA INFORMÁTICA

Presentada por:

Rinna Mariana López Aguirre

GUAYAQUIL – ECUADOR

AÑO

2004

AGRADECIMIENTO

A Dios por haberme dado la fortaleza para poder culminar esta tesis y a mis padres por su cariño.

Al MSc. Fernando Sandoya Director de Tesis por su guía y orientación en el desarrollo de este trabajo y a los profesores de la Universidad Politécnica del Litoral que durante mi paso por los diferentes niveles, me transmitieron los conocimientos.

A Betzy, Sandra, María Elena y Dunnis por su amistad incondicional.

A la Dra. María Enireb por su ayuda en el proceso de graduación.

Y en especial al Dr. Leonardo Vargas.

Gracias por todo.

DEDICATORIA

Dedico este trabajo especialmente a mis padres Grecia y Gonzalo por su cariño y paciencia. A mi hermana Siomara por su motivación y compañía. A mi hermano Gonzalito por su cariño.

TRIBUNAL DE GRADUACIÓN

Ing. Washintong Armas

DIRECTOR DEL ICM

MSc. Fernando Sandoya

DIRECTOR DE TESIS

Ing. Juan Alvarado

VOCAL

Mat. Johni Bustamante

VOCAL

DECLARACIÓN EXPRESA

"La responsabilidad del contenido de esta Tesis de Grado, me corresponden exclusivamente; y el patrimonio intelectual de la misma a la ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL"

Rinna Mariana López Aguirre

RESUMEN

El propósito de esta investigación es demostrar que las técnicas de optimización como la programación lineal constituyen un método alternativo para encontrar estimadores lineales, similares al método de mínimos cuadrados ordinarios. Para probar los resultados se utilizó los datos del pib y las exportaciones del primer trimestre de 1990 hasta el cuarto trimestre del 2000, y se hizo uso del software Lindo.

En el primer capítulo se explica acerca de las técnicas de optimización su clasificación, además los orígenes de la Programación Lineal, en el segundo capítulo se presentan algunos conceptos básicos de estadística, además se muestra información de de temas relacionados con la regresión lineal y las limitaciones que hay que considerar para su uso, estos conceptos son necesarios para el desarrollo del presente trabajo.

En el tercer capítulo se provee de un sencillo manual de usuario para el uso del software Lindo; en el cuarto capítulo se hace la aplicación de las técnicas de optimización, que son el objeto de estudio, y a partir de los resultados obtenidos se procede a realizar las respectivas conclusiones y recomendaciones.

ÍNDICE GENERAL

ABREVIATURAS

MAX: Maximizar

MIN: Minimizar

PIB Producto Interno Bruto

LAD: Mínimas desviaciones absolutas (Least Absolute Deviations)

LMAX: Mínima de la máxima desviación (Least Maximun Desviation)

SIMBOLOGIA

Z: Función Objetivo

$\leq$: Menor o igual que

$\geq$: Mayor o igual que

$\overline{\boldsymbol{Y}}$: Media Poblacional

X: Eje Horizontal

Y: Eje Vertical

$\boldsymbol{H}_0$ **:** Hipótesis Nula

$\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{A}}$ **:** Hipótesis Alternativa

$\hat{Y}_i$: Y estimado cuando x = i

$\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{i}}$:Y cuando x=i

$\hat{\beta}_0$:Estimador de regresión

$\hat{\beta}_1$: Estimador de regresión

LINDO: Linear INteractive and Discrete Optimizer

r: Rango de las observaciones

R^2 : Coeficiente de determinación

INDICE DE GRÁFICOS

PAG

INDICE DE TABLAS

Pág.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo utiliza las técnicas como son el método Simplex, el método simplex dual para resolver problemas de optimización que aparecen en la estimación estadística.

Para realizar el estudio, se emplearon datos proporcionados por el Banco Central del Ecuador, tomando como año base el Año 1975, estas variables que son: Producto Interno Bruto, y Exportaciones

Actualmente el Banco Central del Ecuador utiliza los precios de 1975 para calcular el PIB real. Sin embargo, a partir de ese año se han registrado cambios significativos en la estructura productiva. La economía que entonces basaba su funcionamiento en la agro exportación se transformó en petrolera y se registraron cambios en el aparato productivo con la incorporación de nuevas tecnologías para el consumo interno y la exportación.

El producto interno bruto, es el valor total de la producción corriente de bienes y servicios finales dentro del territorio nacional durante un período de tiempo que generalmente es un trimestre o un año. Ya que una economía produce gran número de bienes, el PIB es la suma de tales elementos en una sola estadística de la producción global de los bienes y servicios mencionados. Esta magnitud puede ser calculada sumando el consumo, la inversión y las exportaciones y restando las Importaciones.

La Exportación se define como la venta o salida de bienes, capitales o mano de obra, etc. Del territorio nacional hacia terceros países. El valor monetario de las exportaciones se registra en la Balanza de Pagos, las exportaciones requieren de una simple declaración. En la actualidad no existen restricciones al comercio exterior; tampoco existen restricciones para la comercialización de divisas ni para las importaciones y exportaciones. Es necesario dar a conocer que los valores monetarios de estas variables que se encuentran registradas en la balanza de pago, la cual contabiliza las obligaciones y derechos del país.

La programación lineal puede ser aplicada como un procedimiento para resolver problemas de regresión lineal en los mismos casos en los que se usa el método de los mínimos cuadrados. La estimación clásica de mínimos cuadrados encuentra la fórmula de predicción que minimiza la suma cuadrática entre la observación y la predicción. De esta manera se pueden encontrar varios “modelos de regresión lineal”, la programación lineal es aplicable porque además de minimizar la suma cuadrática del error se realiza lo siguiente:

- La Minimización de la suma de los errores absolutos,
- La Minimización del máximo error absoluto o
- La Minimización del error en la predicción al ordenar los datos. Llamado también Regresión Ordinal.

La Programación lineal es una técnica de modelado matemático, diseñada para optimizar el uso de recursos limitados, trata acerca de la planeación de las actividades para obtener un resultado óptimo; esto es el resultado que mejor alcance la meta especificada entre todas las alternativas de solución. El método simplex se utiliza para resolver estos problemas.

Los elementos básicos para construir un modelo de programación lineal son: variables de decisión, función objetivo y restricciones

CAPITULO I

1. TÉCNICAS DE OPTIMIZACION

1.1 Teoría de la optimización

Los problemas de optimización, de acuerdo a su estructura se clasifican principalmente en lineales y no lineales. Los problemas lineales son aquellos en los cuales la función objetivo y las restricciones son de tipo lineal, entre los cuales tenemos la Programación Lineal y la Programación Entera.

Los problemas no lineales se caracterizan por tener en la función objetivo o en las restricciones funciones no lineales, así tenemos la Programación Cuadrática, la Programación Convexa, la Programación Determinística, la Programación Estocástica, la Programación Estática, la Programación Discreta, la Programación Contínua.

1.2 Técnicas de optimización lineal

La programación lineal y la programación entera, son las herramientas de optimización que se utilizarán para el desarrollo de este trabajo.

1.3 Programación Lineal

La Programación lineal es una técnica de modelado matemático, diseñada para optimizar el uso de recursos limitados, La palabra programación no se refiere a programación en computadoras, en esencia es un sinónimo de planeación, la programación lineal trata la planeación de las actividades para obtener un resultado óptimo; esto es el resultado que mejor alcance la meta especificada entre todas las alternativas de solución El método simplex se utiliza para resolver estos problemas.

El principal objetivo de la Programación lineal, es de ayudar a los responsables en las decisiones sobre asuntos en los que interviene un gran número de variables. Se aplica exitosamente en la industria, la agricultura, la economía, la transportación, el ejército, los sistemas de salud, etc.

Si utilizamos programas, esta técnica tiene un mejor desempeño y su aplicación es altamente eficiente.

El gran avance de la Programación Lineal, está ligado a los problemas logísticos que se dieron durante la Segunda Guerra Mundial, época en la cual existía la necesidad urgente de asignar recursos que eran escasos a las distintas operaciones militares, por lo cual se formo un equipo de científicos en el que participo George Dantzig.

En el año de 1947, George Dantzig da a conocer una formula, en términos matemáticos muy precisos, el enunciado estándar al que se puede reducir todo problema de programación lineal. Dantzig junto con una serie de investigadores del United States Departament of Air Force, formó el grupo que se denominó SCOOP (Scientific Computation of Optimum Programs). El método simplex, fue desarrollado por Dantzig en el United States Bureau of Standards SEAC COMPUTER, ayudándose de varios modelos de ordenador de la firma International Business Machines (IBM).

1.4 Construcción del modelo de programación lineal

Los elementos básicos para construir un modelo de programación lineal son:

- **Variables de decisión** que se determina con la aplicación del modelo. Es esencial la definición apropiada de las variables de decisión, es el primer paso para la construcción del modelo.

- **Función Objetivo** de maximización o de minimización, es la función que se trata de optimizar

- **Restricciones y decisiones** son ecuaciones o inecuaciones que expresan las restricciones de los recursos.

1.5 Forma estándar del modelo

El modelo consiste en elegir valores de x_1, x_2, ... x_n para maximizar Z(x) sujeta a ciertas restricciones Ax $\leq$ b donde Z $: \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{R}^n \rightarrow \boldsymbol{R}$ es la función objetivo, A es una matriz de dimensión mxn de los coeficientes del sistema, b es un vector $\in \boldsymbol{R}^n$ de las restricciones.

$$Z(x) = c_1x_1 + c_2\, x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + c_nx_n$$

Sujeta a las restricciones:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ a_{3n}x_n \leq b_3$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ a_{12}x_n \leq b_m$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ x_n \geq 0$$

La forma estándar incluye m ecuaciones con n incógnitas (m<n), el número máximo de posibles soluciones básicas para las m, ecuaciones con n incógnitas está dado por:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

Tabla 1.1

Datos necesarios para un modelo de programación lineal de asignación de recursos a actividades

Recursos	Consumo de recursos por unidad de actividad					Cantidad de recursos disponibles
	Actividad					
	1	2	3	j	n	
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}..........	a_{1j}...........	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}..........	a_{2j}...........	a_{2n}	b_2
.	.	.	. ...	. ...	.	.
.	.	.	. ...	. ...	.	.
.	.	.	. ...	. ...	.	.
M	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}..........	a_{mj}...........	a_{mn}	b_m
Contribución a Z por unidad de actividad	c_1	c_2	c_3	c_j	c_n	

1.6 Supuestos del modelo.

Proporcionalidad: Requiere que la contribución de cada variable de decisión, tanto en la función objetivo como en las restricciones sean directamente proporcionales al valor de la variable.

Aditividad: Estipula que la contribución total de todas las variables en la función del objetivo y en las restricciones, sea la suma directa de la contribución individual de cada variable.

1.7 Pasos del método simplex

Paso 1

- **Convertir las desigualdades a ecuaciones**

  Una desigualdad del tipo $\leq$, se convierte en una ecuación aumentando en su lado izquierdo una variable de holgura. En caso de que la desigualdad sea $\geq$ se aumenta una variable de superávit

- **Conversión de una variable no restringida a variables no negativas**

  Una variable x_j no restringida se puede expresar en términos de dos variables no negativas utilizando la sustitución.

$$x_j = x_j^+ - x_j^-, \quad x_j^+, x_j^- \geq 0$$

  La sustitución se efectúa en todas las restricciones y en la función objetivo.

Paso 2

Se construye una tabla en donde se desarrolla el modelo. Determine una solución básica factible inicial

Tabla 1.2
Tabla Simplex

Solución Básica Factible	**z**	**x_1 x_2 ………x_n s_1 s_2 s_3…………s_n**							Solución
z		$-c_1$	$-c_2$	…$-c_n$	0	0	.....	0	0
S_1		a_{11}	A_{12}	…a_{1n}	1	.	…..	0	b_1
S_2		a_{21}	A_{22}	…a_{2n}	0	1	…..	0	b_2
.		.	.	.	.	.	1..	0	.
.		.	.	.	.	.	.	0	.
.		.	.	.	.	.	.	0	.
s_n		a_{m1}	a_{m2}	…a_{mn}	0	0	0	1	b_m

Paso 3: Seleccione una variable de entrada, empleando la condición de optimalidad. Detenerse si no hay una variable de entrada.

Condición de optimalidad: La variable de entrada, en un problema es la variable no básica que tiene el coeficiente más negativo si es un problema de maximización, o el más positivo en un problema de minimización en el renglón z., los empates se rompen arbitrariamente. Se llega al valor óptimo cuando todos los coeficientes de los reglones z de las variables no básicas son no negativos o no positivos ya sea el caso de maximización o minimización.

Paso4

Seleccionar una variable de salida, utilizando la condición de factibilidad

Condición de factibilidad: Tanto para los problemas de maximización como para los problemas de minimización, la variable de salida es la variable básica asociada con la razón no negativa más pequeña. Los empates se rompen arbitrariamente.

Paso 5: Determinar las nuevas soluciones básicas empleando los cálculos apropiados de Gauss-Jordan. Ir al paso 1.

1.8 Casos especiales en la aplicación del método simplex

Existen cuatro casos especiales que hay que considerar en la aplicación del método simplex. A continuación se detalla cada uno de los casos.

1.8.1 Degeneración

Cuando se aplican las condiciones factibles del método simplex, un empate de la razón mínima debe romperse arbitrariamente con el propósito de determinar la variable de salida. En este caso más de una de las variables básicas, serán cero en la siguiente iteración, esto se debe a que existe por lo menos una restricción redundante.

1.8.2 Optimas alternativas

Este caso suele darse, cuando la función objetivo es paralela a una restricción no acotada, la función objetivo puede tener más de un valor óptimo en más de un punto de la solución, se obtienen infinitas soluciones.

1.8.3 Solución no acotada

Las variables se incrementan indefinidamente sin infringir ninguna de las restricciones, el espacio de solución es no acotado, por lo menos en una dirección. El valor objetivo aumentará o disminuirá indefinidamente, si fuese un caso de maximización o minimización. Tanto el espacio solución como el valor objetivo son no acotados. Esto nos da un indicio que el modelo está mal construido debido a que no se han tomado en cuenta una o más restricciones redundantes.

1.8.4 Solución no factible

Esto implica que el modelo no se haya formulado correctamente. Solo puede darse cuando las soluciones no se satisfagan entre si, esto no puede ocurrir si se tiene restricciones de tipo “menor o igual”, debido a que las variables de holgura proveen una solución factible.

1.9 Análisis de Dualidad

Las variables y las restricciones del problema dual se pueden construir simétricamente a partir del problema primal. Hay que tener las siguientes consideraciones:

1.- Una variable dual se define para cada una de las m ecuaciones de la restricción primal.

2.- Una restricción dual se define para cada primal de las n variables primales.

3.- Los coeficientes del lado izquierdo de la restricción dual, son iguales a los coeficientes de la restricción (columna) de la variable primal asociada. Su lado derecho es igual al coeficiente del objetivo de la misma variable primal.

4.- Los coeficientes de la función objetivo de la dual son iguales al lado derecho de las ecuaciones de la restricción primal.

La tabla 1.3 representa gráficamente esta información donde y_1, y_2 ....y_m representan las variables duales.

Tabla 1.3
Descripción de la Construcción del modelo Dual a partir del Primal

Variables Duales	**Variables Primales**					
	X_1	x_2	x_3...........	a_{1j}...........	x_n	
	C_1	c_2	c_3...........	c_j............	c_n	
Y_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}..........	a_{1j}...........	a_{1n}	b_1
Y_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}..........	a_{2j}...........	a_{2n}	b_2
	.	.	. ...	. ...	.	.
.	.	.	. ...	. ...	.	.
.	.	.	. ...	. ...	.	.
y_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}..........	a_{mj}...........	a_{mn}	b_m
				Restricción Dual a la j		Objetivo Dual

Dada la siguiente función objetivo con sus respectivas restricciones

Maximizar: $F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + c_nx_n$

Sujeta a las restricciones:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{2n}x_n = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{3n}x_n = b_3$$

.

.

.

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, a_{mn}x_n = b_m$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_n \geq 0$

Aplicando el método dual se obtiene lo siguiente:

Minimizar $w = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots\ldots b_my_m$

Sujeta a:

$a_{11}y_1 + a_{21}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, a_{m1}y_m \geq c_1$

$a_{12}y_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, a_{m2}y_m \geq c_2$

$a_{13}y_1 + a_{23}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, a_{m3}y_m \geq c_3$

. . . .

. . . .

. . . .

$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mn}y_m \geq c_n$

1.10 Análisis de sensibilidad

Este análisis se realiza después de obtener la solución óptima de un problema de programación lineal. La finalidad es determinar si los cambios en los coeficientes del modelo producen variaciones a la solución actual.

Existen cuatro casos posibles que se producen cuando se hacen cambios en el modelo:

1.- La solución actual permanece inalterada

2.- La solución actual se vuelve no factible

3.- La solución actual se vuelve no óptima

4.- La solución actual se vuelve no óptima y no factible a la vez

La factibilidad de la solución óptima puede verse afectada, cuando se cambia el lado derecho de las restricciones o si se añade una nueva restricción al modelo, puede darse el caso que estos cambios produzcan soluciones no factibles.

Al añadir en el modelo una nueva restricción, se produce que la nueva restricción es redundante, lo que implica que se satisface por la solución óptima actual o la nueva restricción se infringe, en este caso se utiliza el método simplex dual para tratar de recuperar la factibilidad.

La solución actual deja de ser óptima, solo si los coeficientes de la función objetivo quebrantan la condición de optimalidad.

1.11 Programación Entera

En muchos problemas es necesario, que las soluciones obtenidas sean enteras, solo así tendrían un sentido real, por ejemplo cuando se asigna máquinas, vehículos, personas a las actividades; surgen los problemas de programación entera, la programación entera mixta aparece cuando solo es necesario que algunas de las variables tengan valores enteros en el modelo.

El modelo matemático que se utiliza para la programación entera, es el mismo que se utiliza para la programación lineal, aumentando la restricción de que las variables deben tener valores enteros

Para resolver los problemas de programación entera se utilizan los algoritmos de ramificación y acotamiento, a partir de la década de 1980, los estudios en está área se mejoraron, surgió otro enfoque algorítmico que involucra la combinación de reprocesado automático del problema, la generación de cortaduras, y las técnicas de ramificación y acotamiento.

A veces sucede que los problemas de Programación entera son tan grandes que no se pueden resolver con las últimas técnicas encontradas, en estos casos lo que se hace es encontrar la solución por el método simplex y después se redondea la solución a una solución entera factible. Muchas veces esta solución encontrada no suele ser satisfactoria, porque puede ser muy difícil de encontrar y aún encontrándola puede estar muy alejada del óptimo.

1.12 Algoritmos de solución de la programación entera

La estrategia de programación lineal entera se basa en tres pasos:

Paso 1

Se disminuye el espacio solución de la programación lineal entera, reemplazando cualquier variable binaria con la gama contínua $0 \leq y \leq 1$, además relegando las restricciones enteras en todas las variables enteras.

Paso2

Se resuelve el problema y se identifica una solución óptima.

Paso3

Empezando desde el punto óptimo contínuo, se añaden restricciones especiales que modifican el espacio solución de la programación lineal de tal forma que la solución sea entera.

A continuación se presenta un ejemplo de programación entera resuelto por el método de Ramificación y Acotamiento

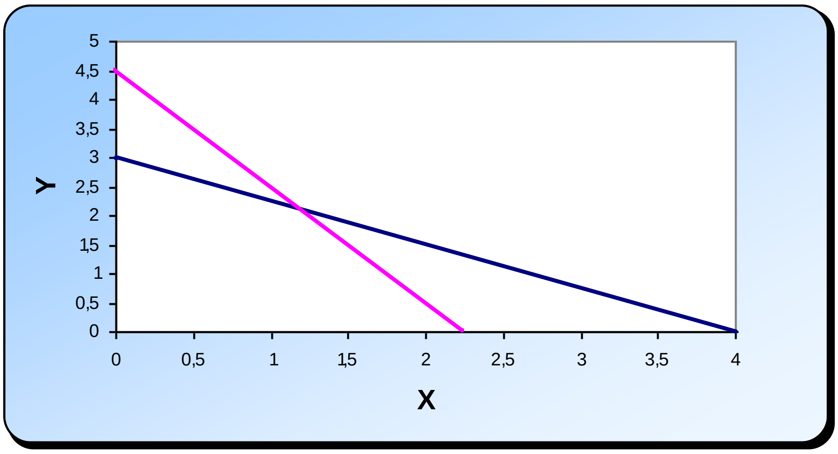
Maximizar $f(x,y) = 4x + 3y$

Sujeta a: $3x + 4y \leq 12$

$4x + 2y \leq 9$

$x,y \geq 0$ x, y enteros

Gráfico 1.1
Representación de la Región Factible



Aplicando el método simplex obtenemos la siguiente solución:

$x^* = 1.2$ $y^* = 2.1$ **f (x_1,x_2)** = 11.1

<u>Problema I</u>

Maximizar f (x,y) = 4x+ 3y

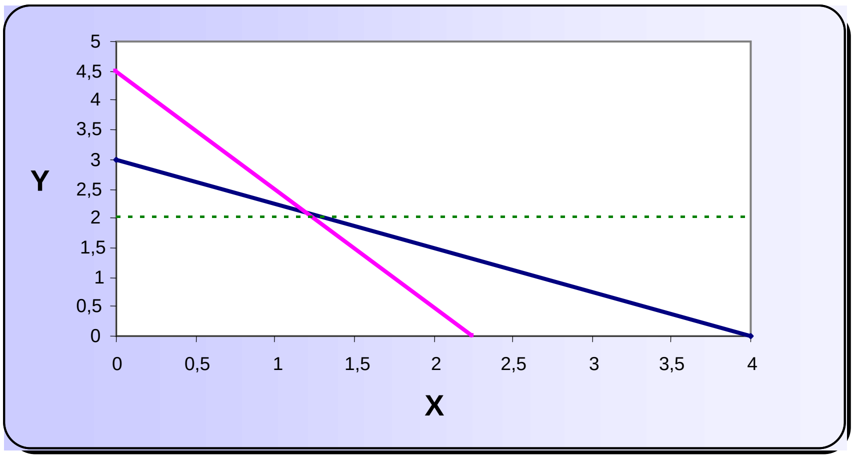
Sujeta a : 3x + 4y ≤ 12

4x + 2y ≤ 9

y ≤ 2

x_1,x_2 ≥ 0 x_1, x_2 enteros.

Gráfico 1.2
Representación de la Región Factible



Aplicando el método simplex, obtenemos el siguiente resultado.

x = 1.25   x= 2   f (x_1,x_2) = 11

Problema II

Maximizar f (x,y) = 4x+ 3y

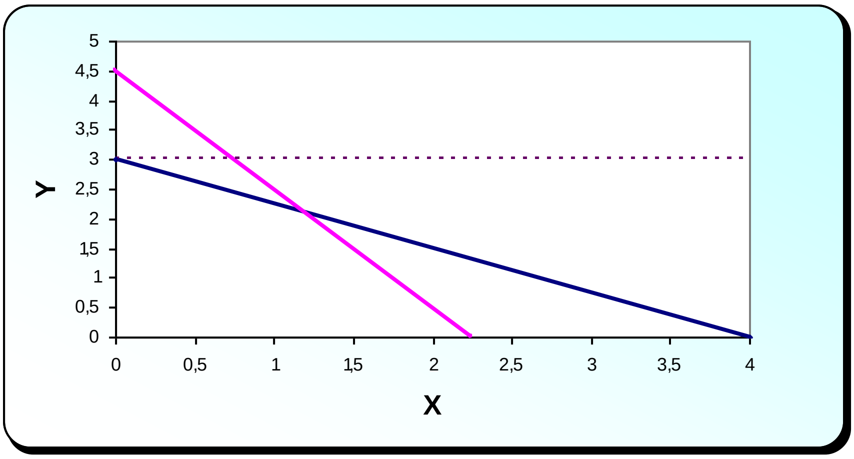
Sujeta a : $3x + 4y \leq 12$

$4x + 2y \leq 9$

$y \geq 3$

$x,y \geq 0$ x, y enteros.

Gráfico 1.3
Representación de la Región Factible



Aplicando el método simplex se obtiene el siguiente resultado:

x=0   x=3 f(x,y)=9

Problema III

Maximizar f (x,y) = 4x+ 3y

Sujeta a :   3x + 4y ≤ 12

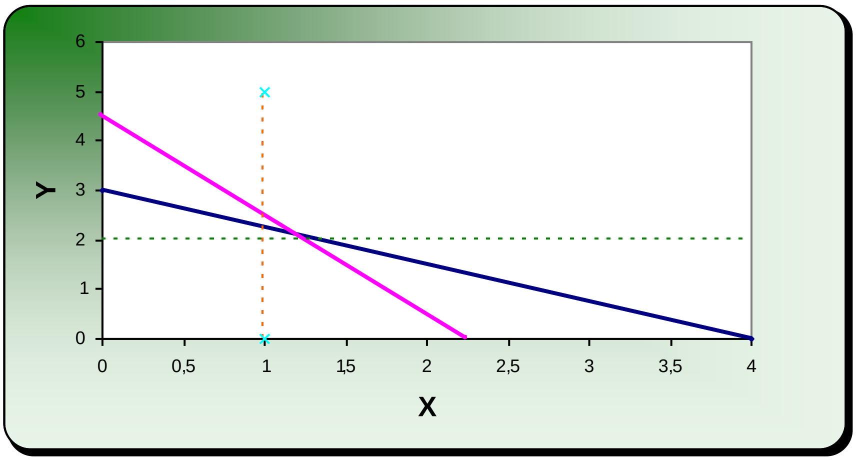
4x + 2y ≤ 9

y ≤ 2

x ≤ 1

x,y ≥ 0 x, y enteros.

Gráfico 1.4
Representación de la Región Factible



Aplicando el método simplex, se obtiene el siguiente resultado:

x = 1   y= 2   f (x,y) = 10

Problema IV

Maximizar f (x,y) = 4x+ 3y

Sujeta a :   3x + 4y ≤ 12

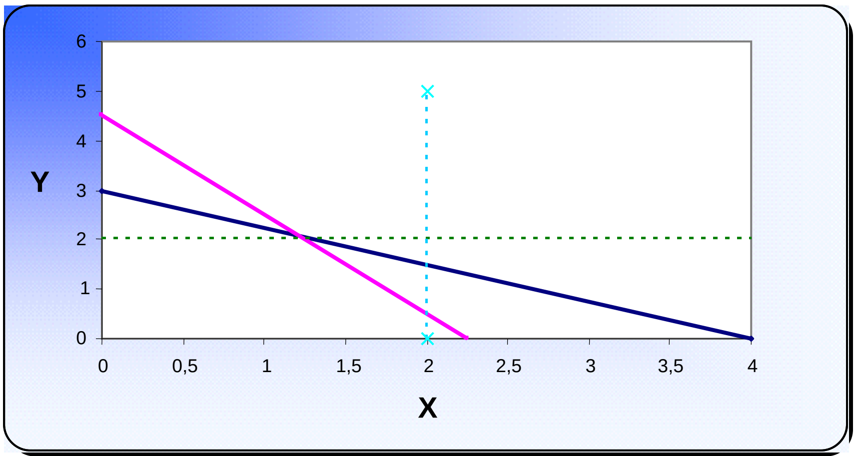
4x + 2y ≤ 9

y ≤ 2

x ≥ 2

x,y ≥ 0 x, y enteros.

Gráfico 1.5
Representación de la Región Factible



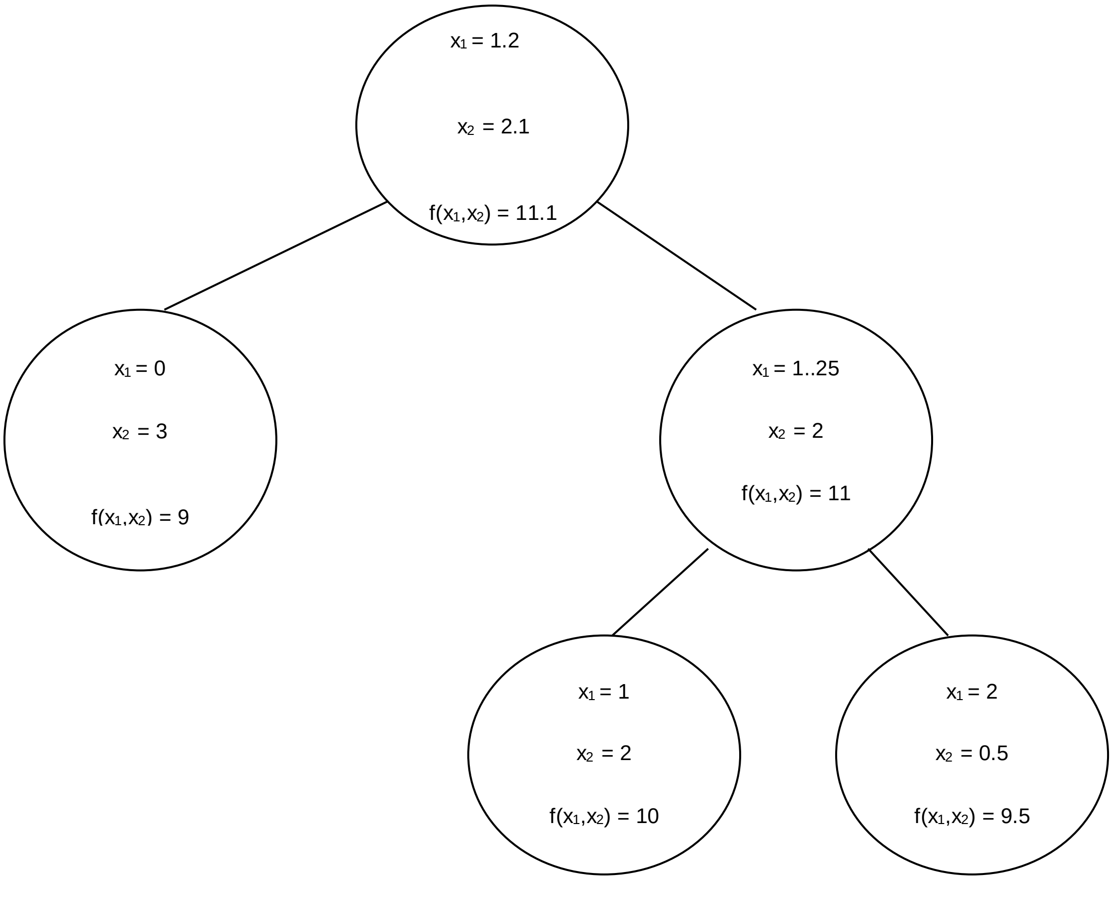
Aplicando el método simplex se obtiene la solución

$x_1 = 2 \quad x_2 = 0.5 \quad f(x_1,x_2) = 9.5$

La solución óptima aplicando el método de ramificación es:

$$x_1^* = 1 \qquad x_2^* = 2 \qquad f(x_1^*, x_2^*) = 10$$

Gráfico 1.6
Representación Gráfica del Método de Ramificación



1.13 Programación no lineal

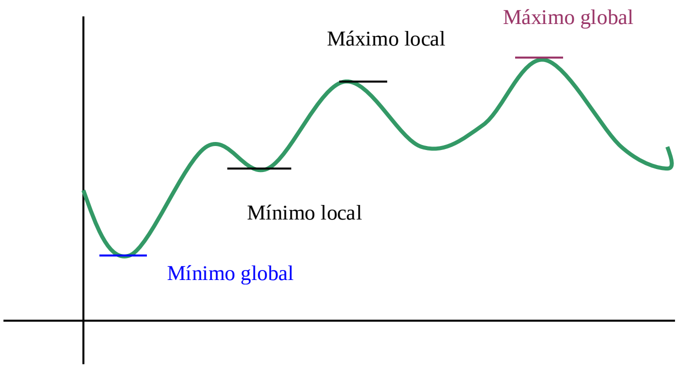
Los problemas de programación no lineal consisten en encontrar

$x = (x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$ para maximizar f(x) sujeta a $g_i(x) \leq b_i$ *para* $i = 1,2,3 \ldots m$ y $x \geq 0$, donde f(x) y las $g_i(x)$ son funciones dadas de n variables de decisión.

1.14 Tipos de problemas de programación no lineal

Los problemas de optimización no restringida no tienen restricciones por lo que el modelo es maximizar o minimizar f(x) para todos los valores $(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) \in R^n$.

Gráfico 1.7
Representación de Máximos y Mínimos de una función F(x)



- **Cuando se tiene una sola variable se requiere maximizar 0 minimizar f(x) cuando x $\in$ R.**

Una condición necesaria para que una solución particular $x = x^*$, sea un mínimo o un máximo es que $\frac{df(x)}{dx} = 0$ en $x = x^*$

En este gráfico existen cuatro soluciones que satisfacen esta condición, utilizando la segunda derivada $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} > 0$ en $x = x^*$, entonces x* es un mínimo local si $f(x^*) \leq f(x)$ para toda x suficientemente cercana a x, es decir x es un mínimo local si f(x) es estrictamente convexa. De igual manera una condición suficiente para que x* sea un máximo local es que f(x) sea estrictamente cóncava dentro de una vecindad de x*, es decir que $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} < 0$ en $x = x^*$. Si la segunda derivada es cero no se puede concluir nada y se denomina punto de inflexión.

Para encontrar un mínimo global es necesario comparar los mínimos locales e identificar el que proporcione el mínimo valor de f(x) cuando $x \to -\infty$ y $x \to +\infty$.

- **Optimización no restringida de una función de varias variables**

Se tiene una función f(x), donde $x = (x_1, x_2, ...x_n)$, identificamos los puntos críticos como en el caso de una sola variable, una condición necesaria para que $x = x^*$ sea un mínimo o un máximo es que:

$$\frac{df(x)}{dx_j} = 0 \text{ en } x = x^*, \text{ para j= 1,2,3........n}$$

Después de identificar los puntos críticos, que satisfacen esta condición, cada uno de estos puntos se clasifican como un mínimo o un máximo local, si la función es estrictamente convexa o estrictamente cóncava respectivamente. El mínimo y el máximo global se encuentran mediante la comparación de los mínimos y máximos relativos.

- **Optimización restringida con restricciones de igualdad**

En este caso se considera una función f(x), puede ser encontrar el mínimo o el máximo sujeta a las restricciones de que x debe satisfacer todas las ecuaciones

$$g_1(x) = b_1$$

$$g_2(x) = b_2$$

.
.
.

$$g_m(x) = b_m$$ en donde m < n

Para resolver estos problemas se utiliza el método de los multiplicadores de Lagrange. El primer paso es encontrar la función lagrangiana

$$h(x,\lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left[g_i(x) - b_i \right]$$

en donde la nuevas variables $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots \lambda_m)$ se llaman multiplicadores de Lagrange

$$\frac{\partial h}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0$$ para j = 1,2.........n

$$\frac{\partial h}{\partial \lambda_i} = -g_i + b_i = 0$$ para i = 1,2........m

A partir de estas ecuaciones se obtienen los puntos críticos.

Ejemplo: Maximizar $f(x_{1,}x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$

Sujeta a $g(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 1$

$$h(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

$$\frac{\partial h}{x_1} = 2x_1 - 2\lambda x_1 = 0$$

$$\frac{\partial h}{x_2} = 2 - 2\lambda x_2 = 0$$

$$\frac{\partial h}{\lambda} = -(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0$$

Los puntos críticos que se encuentran al resolver las ecuaciones son:

(x_1,x_2) = (0, 1) y (0, -1) Son respectivamente el máximo y el mínimo globales.

- **Optimización linealmente restringida**

Estos problemas se caracterizan por restricciones lineales, pero la función objetivo es no lineal. Se han desarrollado varios algoritmos especiales basados en la extensión del método simplex para la resolución de estos problemas. La programación cuadrática es un caso especial que se detalla a continuación

En el caso de la programación cuadrática la función objetivo f(x) es cuadrática, puede incluir el cuadrado de las variables o el producto de una variable con otra, las restricciones son lineales.

Se han desarrollado muchos algoritmos para este problema, con la suposición adicional de que f(x) es cóncava, existe una extensión del método simplex para resolver estos problemas.

Para la resolución de programación convexa en donde la función objetivo f(x) es cóncava, para maximizar o minimizar y las restricciones son convexas se utiliza el algoritmo del gradiente, algoritmos secuenciales no restringidos: como los métodos de la función de penalización y de función barrera.

CAPÍTULO II

2. ESTIMACIÓN ESTADÍSTICA

2.1 INTRODUCCIÓN

El objetivo de la Estadística, es obtener una inferencia con respecto a la población, basándose en la información contenida en una muestra, el procedimiento consiste en deducir una inferencia con respecto a uno o más parámetros de la población.

Un parámetro poblacional es una constante, que caracteriza a una población. Los parámetros poblacionales más importantes son la media, la varianza y la desviación estándar de la población.

La estimación estadística se puede dar de dos maneras:

- ❖ La estimación puntual, es un procedimiento que utiliza información de la muestra, para obtener un solo punto o número, con el cual se estima el parámetro objetivo.

- La Estimación por intervalo, hace uso de la información de la muestra, para obtener dos números que van a incluir el parámetro de estudio con cierto nivel de confianza, también es conocido con el nombre de intervalo de confianza estimado.

Un estimador, es una regla, que establece como calcular una estimación basada en las mediciones contenidas en una muestra. Por ejemplo la media muestral, es un estimador de la medida poblacional que se calcula con la siguiente fórmula:

$$\overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_1}{n}$$

Está fórmula, nos indica de que deben sumarse las observaciones de la muestra y dividirse entre el tamaño de la muestra n.

2.2 Propiedades de los estimadores puntuales

2.2.1 Estimadores insesgados

Sea $\hat{\theta}$ un estimador puntual de un parámetro θ. Entonces $\hat{\theta}$ es un estimador insesgado si E ($\hat{\theta}$) = θ. De lo contrario se dice que es sesgado. El sesgo de un estimador puntual $\hat{\theta}$ se representa con la letra B y es igual a:

$$B = E(\hat{\theta}) - \theta$$

El error cuadrático medio de un estimador puntual $\hat{\theta}$ se define como:

$$ECM = E(\hat{\theta} - \theta)^2$$

$$ECM = E(\hat{\theta}^2 - 2\hat{\theta}\theta + \theta^2)$$

$$= E(\hat{\theta}^2) - 2\theta E(\hat{\theta}) + \hat{\theta}^2$$

$$= VAR(\hat{\theta}) + [E(\hat{\theta})]^2 - 2\theta E(\hat{\theta}) + \hat{\theta}^2$$

$$= VAR(\hat{\theta}) + [\hat{\theta} - E(\hat{\theta})]$$

$$= VAR(\hat{\theta}) + B^2$$

Podemos observar que, el **Error Cuadrático Medio** de cualquier estimador, es la suma de dos cantidades no negativas; una es la varianza del estimador y la otra es el cuadrado del sesgo del estimador.

Se puede evaluar la bondad de cualquier procedimiento de estimación puntual, esto es lo que se denomina error de estimación, obviamente, nos gustaría que el error de estimación sea lo más pequeño posible.

El error de estimación, es la distancia entre un estimador y su parámetro objetivo. Es decir $\varepsilon = |\hat{\theta} - \theta|$.

2.2.2 Estimadores eficientes

Dado dos estimadores isesgados $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ de un parámetro $\hat{\theta}$, con varianza V ($\hat{\theta}_1$) y V ($\hat{\theta}_2$) respectivamente, entonces la eficiencia relativa de $\hat{\theta}_1$ con respecto a $\hat{\theta}_2$ se define como la razón.

$$\text{Eficiencia} = \frac{V(\hat{\theta}_2)}{V(\hat{\theta}_1)}$$

Si tenemos dos estimadores insesgados $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$, utilizaríamos el estimador con la menor varianza, la eficiencia relativa de $\hat{\theta}_1$ con respecto a $\hat{\theta}_2$ es mayor que uno solamente si V ($\hat{\theta}_1$) > V ($\hat{\theta}_2$) en este caso se da que $\hat{\theta}_1$ es mejor estimador insesgado que $\hat{\theta}_2$.

2.2.3 Estimadores consistentes

El estimador $\hat{\theta}_n$ es un estimador consistente de $\hat{\theta}$ si para cualquier número positivo ε_1. el $\lim_{n \to \infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| \leq \varepsilon) = 1$, o en forma equivalente

$$\lim_{n \to \infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon) = 0$$

donde $\hat{\theta}_n$ se calcula de una muestra de tamaño n.

Definición.- El estimador insesgado $\hat{\theta}_n$, es un estimador consistente de θ si $\lim_{n \to \infty} V(\hat{\theta}_n) = 0$

2.2.4 Estimadores suficientes

El criterio de suficiencia, nos permite encontrar estadísticos que resumen toda la información en una muestra, en relación al parámetro objetivo estudiado.

Sea $y_1.......y_n$ una muestra aleatoria de una distribución de probabilidad con un parámetro desconocido θ. Se dice que el estadístico $U = g(y_1.......y_n)$ es suficiente para θ si la distribución condicional $y_1.......y_n$ dado U no depende de θ.

2.2.5 Función de Verosimilitud

Sean $y_1,y_2.......y_n$ observaciones muestrales para variables aleatorias correspondientes $[y_1....y_r]$. Si $y_1.......y_n$ son variables aleatorias discretas, entonces la función de verosimilitud $L = L(y_1,y_2.......y_n)$ se define como la probabilidad conjunta de $y_1,y_2.......y_n$. En el caso que $y_1,y_2.......y_n$ sean variables aleatorias continuas, la verosimilitud $L(y_1,y_2.......y_n)$ se define como la densidad conjunta evaluada en $y_1,y_2.......y_n$.

Si el conjunto de observaciones $y_1,y_2.......y_n$ es una muestra aleatoria de una distribución discreta con la función de probabilidad p(y), entonces

$$L(y_1,y_2.......y_n) = P(y_1 = y_1.......y_n = y_n) = f(y_1)\, f(y_2) \ldots f(y_n)$$

Si se da el caso que $y_1,y_2.......y_n$ tienen una distribución continua con función de densidad f (y), entonces:

$$L(y_1,y_2.......y_n) = P(y_1 = y_1.......y_n = y_n) = f(y_1)\, f(y_2) \ldots f(y_n)$$

Teorema: Sea U es un estadístico basado en una muestra aleatoria $y_1,y_2.......y_n$. Entonces U es un estadístico suficiente para la estimación de un parámetro θ si y solo si L se puede factorar en dos funciones no negativas.

$$L(y_1,y_2.......y_n) = g(\mu,\theta)\, h(y_1,y2.......,y_n)$$

En donde $g(\mu,\theta)$ es una función solamente de μ y de θ y $h(y_1,y2.......,y_n)$ es una función que no depende de θ.

2.2.6 Robustez

La robustez es una propiedad estadística, que nos indica como los procedimientos de estimación estadística, son afectados adversamente por incumplimiento de las suposiciones que los sustentan. Es decir que un estimador es lo suficientemente robusto si su distribución muestral no se ve afectada por violaciones de los supuestos. Esto ocurre por puntos extremos, causados por errores directos, puede darse al registrar los datos, o en el momento en que se lee los instrumentos, o por errores de procedimientos experimentales.

2.3 Métodos para hallar estimadores

2.3.1 Método de los momentos

El método de los momentos consiste, en igualar unos pocos de los primeros momentos de una población con los momentos correspondientes de una muestra, obteniendo así tantas ecuaciones como sean necesarias para resolver los parámetros desconocidos de la población.

Definición.- El k-ésimo momento de la muestra de un conjunto de observaciones $y_1, y_2 .... y_n$ es la media de sus k-ésimas potencias y se denota por m_k, donde

$$m_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^k}{n}$$

Para una población que tiene r parámetros, el método de los momentos consiste, en resolver el sistema de ecuaciones.

$$m_k = n_k \qquad k = 1,2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1$$

2.3.2 Método de la máxima verosimilitud

R.A. Fisher propuso el método de máxima verosimilitud y expuso sus ventajas, al demostrar que producía estimadores suficientes siempre que estos existieran y que los estimadores de máxima verosimilitud son estimadores asintóticamente insesgados de mínima varianza.

El método de la máxima verosimilitud selecciona como estimaciones, a aquellos valores de los parámetros que maximizan la verosimilitud, es decir la función de densidad conjunta o la función de probabilidad.

2.3.3 Método de los mínimos cuadrados

El método de los mínimos cuadrados, es utilizado para estimar los parámetros de modelos lineales, consiste en ajustar un modelo lineal a un conjunto de puntos que representan los datos.

El procedimiento de los mínimos cuadrados, para ajustar una recta a través de un conjunto de n puntos es similar al método de ajustar una línea recta a simple vista; lo que se pretende es que la desviaciones estándar tomen valores pequeños, una forma de lograr esto es minimizando la suma de los cuadrados de las desviaciones verticales de la recta ajustada.

2.4 Regresión Lineal

El análisis de regresión, es una técnica estadística para modelar e investigar la relación entre dos o más variables. Puede usarse un análisis de regresión, para construir un modelo que sea óptimo y permita hacer predicciones.

El científico inglés Sir Francis Galton (1822-1911), fue quien desarrollo el análisis de regresión, sus primeros experimentos con regresión comenzaron con un intento de analizar los patrones de crecimiento hereditarios de los guisantes. Animado por los resultados Sir Francis

Galton extendió para incluir los patrones hereditarios de la estatura de las personas adultas. Descubrió que los niños que tienen padres altos o bajos tendían a regresar a la estatura promedio de la población adulta.

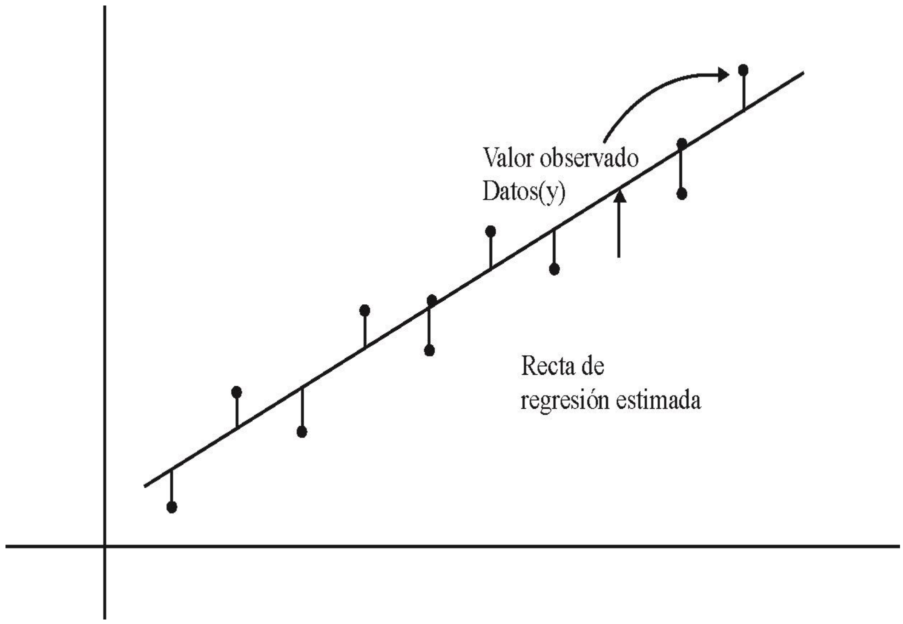
2.4.1 Regresión lineal simple

En la regresión lineal simple se establece que Y es una función de solo una variable independiente, con frecuencia se denomina regresión bivariada porque solo hay dos variables una dependiente y una independiente.

$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$, es conocido como modelo de regresión lineal simple, porque solo tiene una variable independiente, regresor o predictor x, y una variable dependiente o variable respuesta Y.

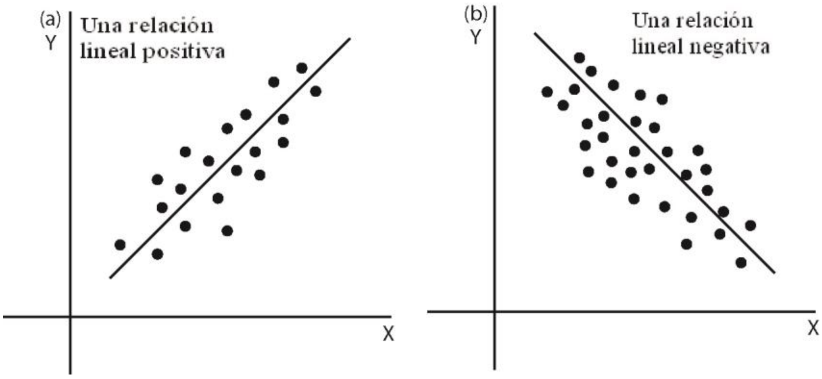
Las estimaciones de β_0 y β_1 deberán dar como resultado una recta que es "el mejor ajuste" para los datos. El científico alemán Kart Gauss propuso estimar los parámetros β_0 y β_1 a fin de minimizar la suma de los cuadrados de las desviaciones verticales, utilizando el método de mínimos cuadrados, como se observa en el gráfico 2.1.

Gráfico 2.1
Desviaciones de los datos del modelo de Regresión estimado



En la figura 2.2, se puede observar diagramas de dispersión, se representan los datos por pares, es habitual colocar la variable independiente en el eje horizontal, el literal a) sugiere una relación positiva y lineal entre X y Y, es positiva porque X y Y se mueven en la misma dirección, el literal b) muestra una relación lineal y negativa entre X y Y, las dos variables se mueven en direcciones opuestas.

Gráfico 2.2
Diagramas de Dispersión



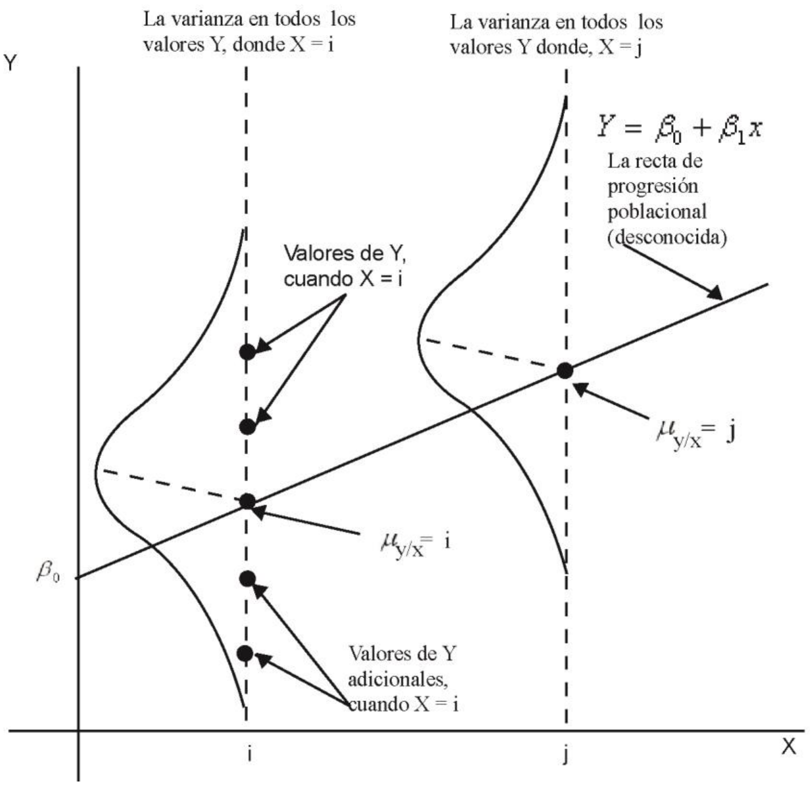
2.4.1.1 Supuestos del Modelo

- **<u>El término del error es una variable aleatoria distribuida normalmente:</u>** Puede ocurrir que para un valor de X haya más de un valor para Y, algunas veces Y esta por encima de la recta de regresión haciendo que el término del error sea positivo, mientras que se puede dar el caso que Y_i sea menor que $\hat{Y}_i$, creando un error negativo.

  Se asume que estos términos del error se distribuyen normal y aleatoriamente alrededor de la recta de regresión. Debido a Y_i es diferente cada vez, se estima el valor promedio de Y; por lo tanto la recta de regresión poblacional pasa por la media de aquellos valores Y en donde x=i.

En el grafico 2.2 podemos observar una distribución normal de los términos de error por encima y por debajo de la recta de regresión. Pasa por la media de los valores de Y.

Gráfico 2.2
La distribución normal de los valores y alrededor de la recta de regresión poblacional desconocida.



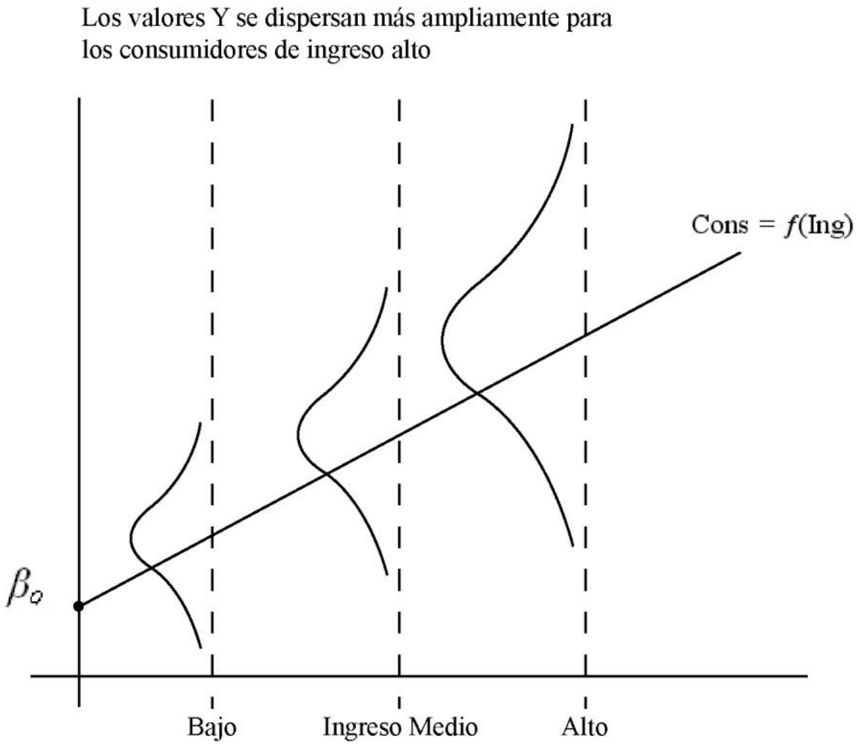
- ***<u>Varianzas iguales de los valores Y</u>:*** El modelo de Mínimos Cuadrados Ordinarios, asume que la varianza en los valores de Y es la misma en todos los valores de X, este supuesto se denomina homoscedasticidad. Desafortunadamente este supuesto no es válido con frecuencia cuando se trabaja con datos de corte seccional.

  Por ejemplo se asume que se desea desarrollar un modelo de regresión en el cual los ingresos de los consumidores se utilicen para predecir los gastos de consumo, Cons=f(Ing). Si se recolectaran datos sobre los consumidores en diferentes intervalos de ingreso durante un año dado se estarían utilizando datos de corte seccional, ya que se incluyeron las observaciones a través de diferentes secciones de estrato de ingresos: los pobres, el promedio y los más ricos.

  Como muestra la figura 2.3, se puede encontrar un rango muy estrecho en los valores para el consumo en los niveles bajos de ingreso, mientras que para los consumidores más ricos, la variación en sus gastos de consumo se mucho mayor.

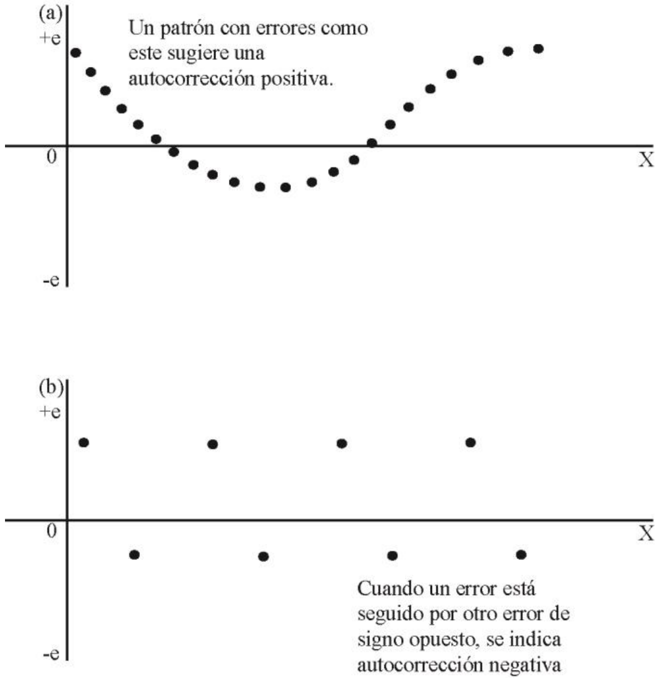
Los valores de Y_i se dispersan más ampliamente a medida que el ingreso incrementa. Es llamado heteroscedasticidad.

Gráfico 2.3
Heteroscedasticidad en la varianza de los valores Y.



- ***<u>Los términos del error son independientes uno del otro</u>:*** El método de mínimos cuadrados ordinarios se basa en el supuesto de que los términos del error son independientes uno del otro. El término del error encontrado para un valor de Y, no se relaciona para cualquier otro valor de Y. Está hipótesis puede probarse analizando un diagrama de los errores de los datos muestrales. Si no puede observarse ningún patrón se puede asumir que los términos del error se correlacionan, muchas veces resulta difícil encontrar algún patrón discernible.

Gráfico 2.4
Diagramas de Errores



Esto sugiere que los errores realmente son independientes. Se compara esto con un diagrama residual que puede aparecer como en la figura 2.4. Es evidente que los errores no son aleatorios y que están relacionados claramente. El patrón comienza con varios errores positivos, seguidos por varios errores negativos y luego nuevamente varios errores positivos, contradice el supuesto de independencia de errores; se denomina autocorrelación positiva porque los signos iguales se agrupan. La autocorrelación negativa se da cuando cada error es seguido de un error de signo opuesto. Este patrón de signos alternantes sugiere que los términos de error no son independientes. Los diagramas residuales nunca son tan obvios de leer, existe otra forma para detectar la autocorrelación con base en la prueba de Durbin-Watson.

<u>Prueba de Hipótesis</u>

$$H_0 : \rho_{e_t, e_{t-1}} = 0 \; (No\ existe\ autocorrelación)$$
$$H_A : \rho_{e_t, e_{t-1}} \neq 0 \; (Existe\ autocorrelación)$$

En donde ρ, es el coeficiente de correlación para errores sucesivos, el valor de Durbin-Watson se compara con los valores críticos de la tabla K(Tabla de Durbin-Watson), para un nivel de significancia del 1% o del 5%.

Estadístico de Durbin-Watson: $d = \dfrac{\sum (e_t - e_{t-1})^2}{\sum (e_t)^2}$

- ***<u>El supuesto de linealidad</u>:*** El supuesto uno dice para un mismo valor de x, pueden existir muchos valores diferentes de y, los que tienen una distribución normal, está distribución tiene una media, $\mu_{y/x}$. El método de Mínimos Cuadrados Ordinarios asume que estas medias quedan en una recta.

2.4.1.2 Determinación del modelo de Regresión Lineal Simple

Dada n observaciones de la muestra, se pueden expresar como:

$$Y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i + \varepsilon_i, \quad i = 1,2,3 \ldots n$$

Por lo tanto si tenemos que la ecuación $Y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1$ x_i predice el i-ésimo valor de y (Cuando x = x_i), la desviación del valor observado de Y a partir de la recta $\hat{Y}$, conocido también como error es (y_i - $\hat{y}_i$), la suma de los cuadrados de las desviaciones que deben minimizar es

SCE= $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i))^2$

donde SCE también es llamado la suma de los cuadrados de los errores. Por tanto, $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ son los valores que minimizan SCE, así, se debe resolver el problema de programación no lineal sin restricciones.

Para recalcar esto se deriva parcialmente y luego se iguala a cero.

$$\frac{\partial SCE}{\partial \beta_0} = \frac{\partial \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i \right) \right]^2 \right\}}{\partial \hat{\beta}_0}$$

$$\frac{\partial SCE}{\partial \beta_0} = -\sum_{i=1}^{n} 2\,\{y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i)\}$$

$$\frac{\partial SCE}{\partial \beta_0} = -2\left(\sum_{i=1}^{n} 2y_i - n\,\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i \right)$$

Igualando a cero obtenemos el siguiente resultado.

$$\beta_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})\,(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

Realizamos el mismo procedimiento para encontrar el valor de β_1

$$\frac{\partial SCE}{\partial \beta_0} = -\sum_{i=1}^{n} 2\left[y_i - \left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i \right) \right] x_i$$

$$\frac{\partial SCE}{\partial \beta_0} = -2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n} x_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)$$

Igualando a cero esta ecuación obtenemos el siguiente resultado de β_0.

$$\beta_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{x}$$

2.4.1.3 Limitaciones del análisis de regresión

Se debe poner atención en la selección de las variables, así como en la determinación de la forma del modelo, es posible desarrollar relaciones estadísticas entre variables que no tienen ninguna relación en un sentido práctico, es posible que se observe una fuerte asociación entre variables, eso no implica que exista una relación causal entre las mismas.

Las relaciones de regresión, son válidas para los valores de las variables de regresión que se encuentran en el rango de los datos originales, es decir cuando se usan valores de X fuera de ese rango, disminuye la certeza acerca de la validez del modelo supuesto.

2.4.1.4 Coeficiente de determinación R^2

El coeficiente de determinación R^2 es una medida muy importante de la bondad de ajuste, porque revela que porcentaje del cambio en la variable Y, se explica por un cambio en X. Se halla de la siguiente manera:

$$R^2 = \sqrt{\frac{Desviación \exp licada}{Desviación\,Total}}$$
$$= \sqrt{\frac{SCR}{SCT}}$$

2.5 Regresión lineal múltiple

El modelo de regresión lineal múltiple permite incorporar dos o más variables independientes. En donde β_n son los coeficientes de regresión y ε es el término del error aleatorio

Dado el siguiente modelo lineal

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \beta_n x_n + \varepsilon$$

Con n observaciones independientes y_1, y_2 ...... y_n de Y. Se puede escribir y_i como $Y = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + ... + \beta_n x_{in} + \varepsilon_i$ en donde x_y es el valor de la j-ésima variable independiente para la i-ésima observación, i = 1, ... n.

A continuación se detalla la representación matricial del modelo

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ y_n \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_0 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ x_0 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ x_0 & x_{n1} & x_{x1} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix} \qquad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \beta_k \end{bmatrix} \qquad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Por lo tanto las n ecuaciones que representan las y_i como función de las x, las β, las ε se puede escribir simultáneamente como:

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

Teorema.- Las estimaciones de Mínimos Cuadrados para los coeficientes de regresión múltiple están dadas por $\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$ donde X' es la transpuesta de X y $(X'X)^{-1}$ es la inversa de (X'X).

Para el modelo $y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$, una propiedad de los estimadores de mínimos cuadrados $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ es ser insesgado, por lo tanto $\hat{\beta}_0$ es un estimador insesgado de β_0 y $\hat{\beta}_1$ es un estimador insesgado de β_1.

2.6 PROPIEDADES DE LOS ESTIMADORES DE MÍNIMOS CUADRADOS PARA EL MODELO DE REGRESIÓN MÚLTIPLE.

Se pueden generalizar los resultados del modelo $Y = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$, para el modelo de regresión múltiple, $Y = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + ... + \beta_n x_{ik} + \varepsilon_i$ $i = 1... n$ Suponemos que son variables aleatorias independientes con $E(\varepsilon_i) = 0$ y $V(\varepsilon_i) = \sigma^2$.

Las propiedades de estos estimadores son:

1.- E (β_i) = β_i, i = 1, ……. k

2.- V ($\hat{\beta}_1$) = c_{ii} = σ^2, en donde c_{ii} es el elemento de la i-ésima fila y de la j-ésima columna de la matriz $(X'X)^{-1}$

3.- $\text{cov}(\hat{\beta}_i, \hat{\beta}_j)$ = c_{ii} σ^2. Si los ε_i tienen una distribución normal.

4.- Cada $\hat{\beta}_i$ tiene una distribución normal.

5.- Un estimador insesgado de σ^2 es S^2 = $\frac{SCE}{\left[n-(k+1)\right]}$, en donde SCE = Y'Y - $\beta' \hat{X}$ 'Y.

CAPITULO III

3. LINDO (Linear INteractive and Discrete Optimizer)

3.1 Introducción

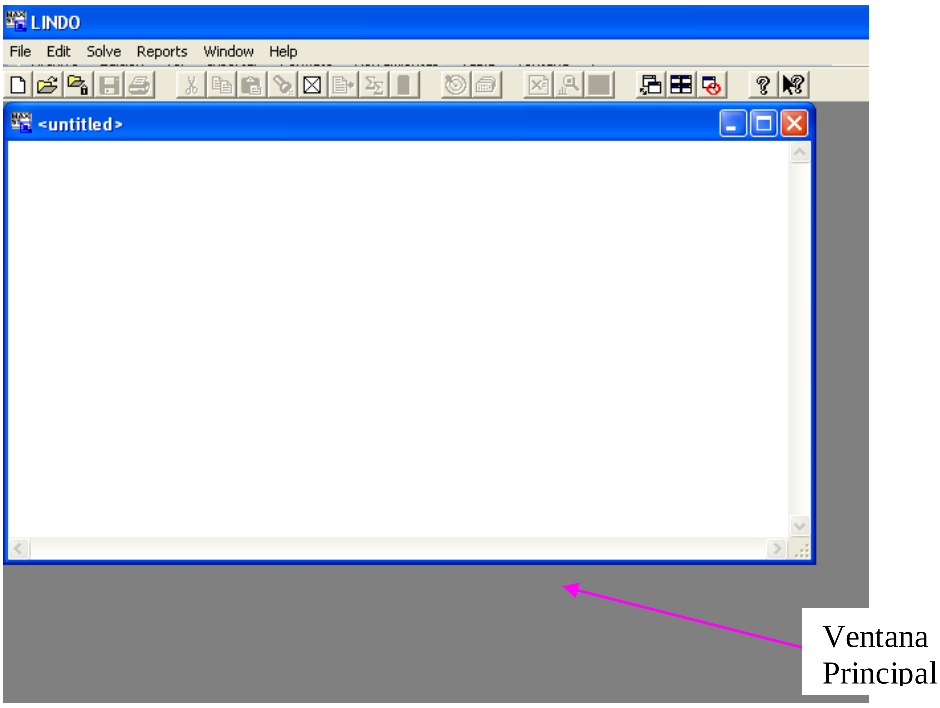
Lindo es un software que nos permite resolver problemas lineales, enteros, y cuadráticos, su uso es simple e interactivo, se utiliza el teclado para ingresar un modelo o es posible usar LINDO con archivos que contengan los datos de entrada. La mayoría las versiones de LINDO están disponibles de tal forma que permite unir sus propios programas directamente con LINDO. La estructura interior de LINDO se diseña, de tal manera que se puede combinar LINDO con su código para diseñar sistema personalizado. Las versiones de Windows de LINDO proporcionan las bibliotecas Dynamic Link Library (DLL). La ventaja de este formato es que tienen un compilador independiente. Así, es posible construir una aplicación en cualquier lenguaje que puede llamar un DLL Se puede utilizar la plataforma de Visual Basic, Visual C/C++, etc.

3.2 Ingreso al programa

Icono de Acceso Directo al Programa Lindo
Gráfico 3.1

Después de dar un click al icono de acceso directo de lindo en el gráfico 4.1, se presenta la siguiente pantalla.

Ventana de Lindo para escribir el modelo a resolver
Gráfico 3.2



En etiquetada como "<untitled>", se escribe el modelo a resolver.

3.3 Desarrollo de un problema lineal utilizando Lindo

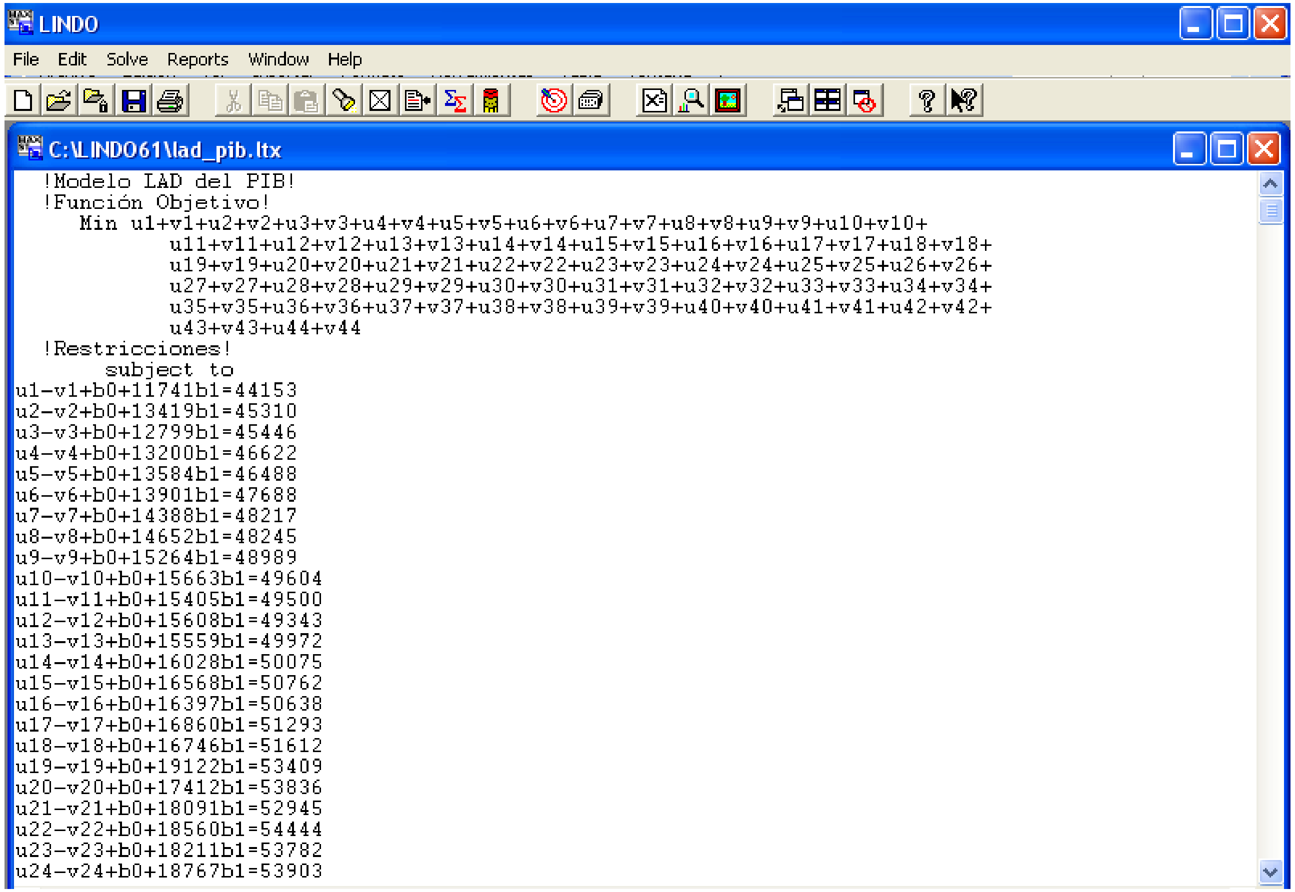
Un modelo de LINDO tiene un requisito mínimo de tres cosas: necesita una función objetivo, variables, y restricciones.

El primer requisito, consiste en la función objetivo, se tiene la opción de, maximizar o minimizar, por ejemplo, en una situación comercial típica, se desea aumentar al máximo las ganancias o minimizar costo. La primera palabra que se debe escribir en un modelo de LINDO debe ser MAX o MIN, a continuación se escribe la función objetivo.

En la siguiente línea se debe escribir ***subject to o st***, lo que permite escribir las restricciones. LINDO interpreta el símbolo “ < ” como "menor que o igual a" en lugar de "estrictamente menor que". Si usted prefiere, puede utilizar alternativamente “<= “en lugar del símbolo “< “. Para finalizar la instrucción se debe escribir la palabra reservada ***END,*** ver ejemplo grafico 3.3, se ilustra el modelo LAD con los datos del pib.

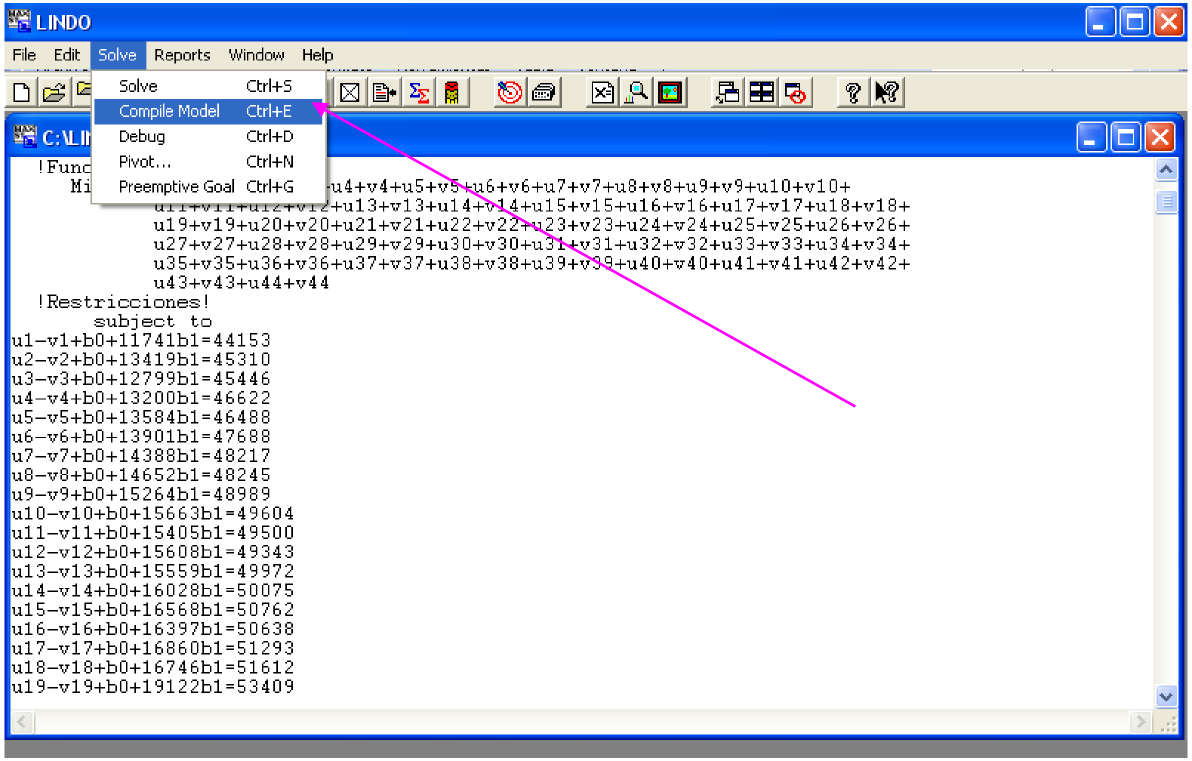
El signo de admiración permite escribir líneas de comentarios en el modelo (!), separadas por un punto y coma, a cada restricción se la puede renombrar utilizando un paréntesis.

Gráfico 3.3


LINDO
File Edit Solve Reports Window Help
C:\LINDO61\lad_pib.ltx
!Modelo LAD del PIB!
!Función Objetivo!
Min u1+v1+u2+v2+u3+v3+u4+v4+u5+v5+u6+v6+u7+v7+u8+v8+u9+v9+u10+v10+
u11+v11+u12+v12+u13+v13+u14+v14+u15+v15+u16+v16+u17+v17+u18+v18+
u19+v19+u20+v20+u21+v21+u22+v22+u23+v23+u24+v24+u25+v25+u26+v26+
u27+v27+u28+v28+u29+v29+u30+v30+u31+v31+u32+v32+u33+v33+u34+v34+
u35+v35+u36+v36+u37+v37+u38+v38+u39+v39+u40+v40+u41+v41+u42+v42+
u43+v43+u44+v44
!Restricciones!
subject to
u1-v1+b0+11741b1=44153
u2-v2+b0+13419b1=45310
u3-v3+b0+12799b1=45446
u4-v4+b0+13200b1=46622
u5-v5+b0+13584b1=46488
u6-v6+b0+13901b1=47688
u7-v7+b0+14388b1=48217
u8-v8+b0+14652b1=48245
u9-v9+b0+15264b1=48989
u10-v10+b0+15663b1=49604
u11-v11+b0+15405b1=49500
u12-v12+b0+15608b1=49343
u13-v13+b0+15559b1=49972
u14-v14+b0+16028b1=50075
u15-v15+b0+16568b1=50762
u16-v16+b0+16397b1=50638
u17-v17+b0+16860b1=51293
u18-v18+b0+16746b1=51612
u19-v19+b0+19122b1=53409
u20-v20+b0+17412b1=53836
u21-v21+b0+18091b1=52945
u22-v22+b0+18560b1=54444
u23-v23+b0+18211b1=53782
u24-v24+b0+18767b1=53903

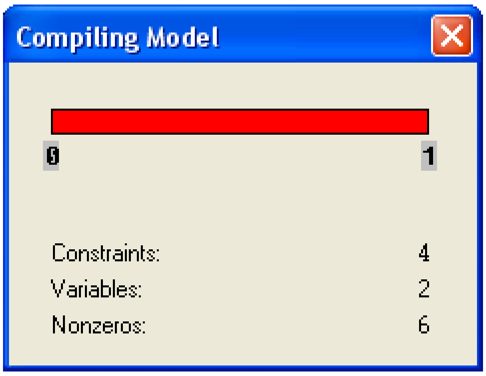
3.3.1 Compilar el modelo

Compilación del modelo
Gráfico 3.4



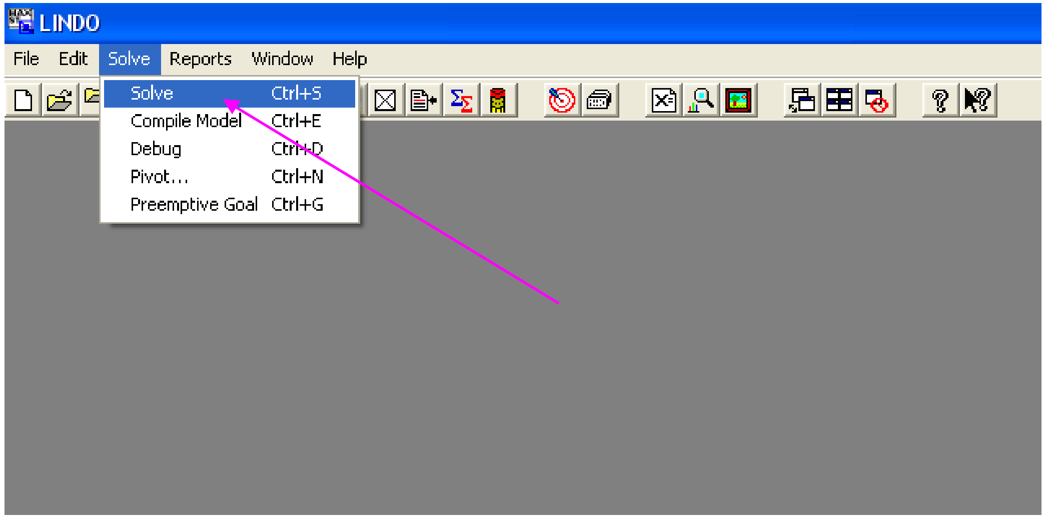
Lindo efectúa este procedimiento automáticamente con la opción ***compile model,*** con las teclas Ctrl+E o con el botón que indica la flecha que se presenta en la figura 3.4, mientras LINDO compila el modelo se muestra en la ventana siguiente, gráfico 3.5, la barra indica cuando ha terminado la compilación. En caso de encontrar un error se informará del número de la línea donde el error ocurrió y el cursor se ubica en esa línea.

Barra de Compilación del Modelo
Gráfico 3.5



3.3.2 Solución del modelo

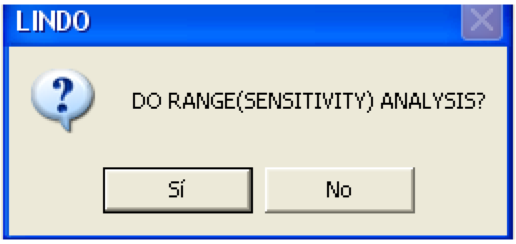
Solución del Modelo
Gráfico 3.6



Para empezar resolviendo al modelo, se selecciona Solve del menú, con un click en el botón que indica la flecha del grafico 3.6 ubicada en la barra de herramientas.

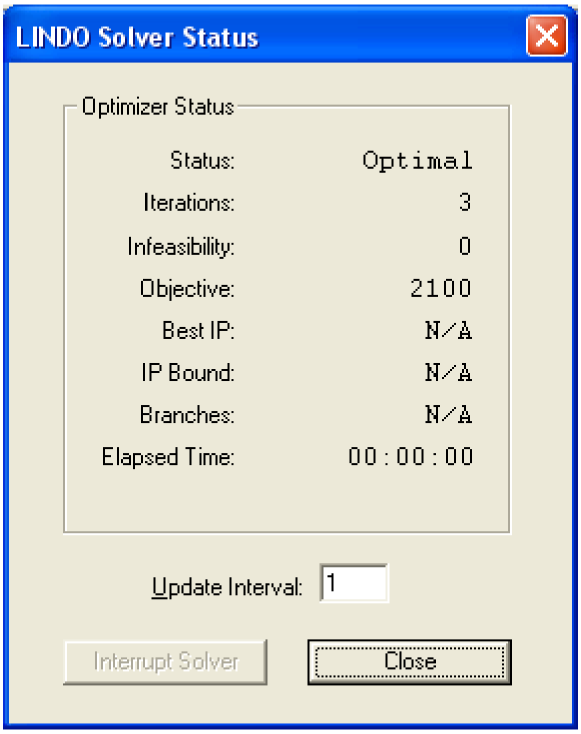
LINDO empezará a compilar al modelo, luego determina si el problema tiene sentido matemático, y si cumple los requisitos sintácticos. Si el modelo no pasa estas pruebas, aparecerá un mensaje de error. El programa dejará el cursor en la línea donde el error ocurrió. Se debe examinar esta línea para cualquier error de la sintaxis para su corrección. Si no hay ningún error en el modelo durante la fase de la compilación, LINDO empezará a resolver el modelo. Cuando el comando solver de LINDO comienza, despliega una Ventana en su pantalla que está en el grafico 3.7.

Ventana que ejecuta el Rango de Sensibilidad
Gráfico 3.7



En esta pantalla le permite hacer un análisis de sensibilidad para el modelo.

Ventana Solver Status
Gráfico 3.8



3.3.3 Descripción de la ventana LINDO Solver Status.

Status: Estado de solución actual, los posibles valores incluyen: Optimo, No Factible, Infinitas Soluciones.

Iterations: El número de iteraciones necesarias para resolver el modelo

Infeasibility: Cantidad por el que se infringen (forzan) las restricciones.

Objetive: Valor actual de la función objetivo.

Best IP: Mejor Valor Objetivo de solución entero encontrado. Relevante en modelos de programación entera (IP).

IP Bound: Límite Teórico en el objetivo para modelos de programación entera.

Branches: El número de variables enteras "branches" resueltas por LINDO. Esta información es relevante en modelos de programación entera (IP).

Elapsed Time: Tiempo transcurrido desde que se invocó el comando solver

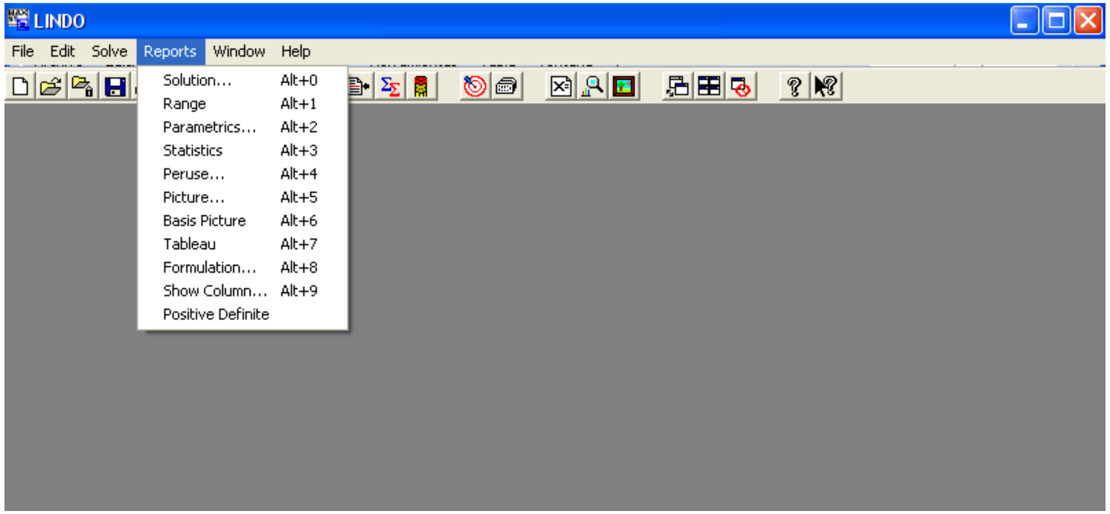
Update Intervalo: Permite actualizar la frecuencia (en segundos) de la ventana de estado. Esto se puede poner a cualquier valor no negativo deseado. Poniendo el intervalo en cero se tiende a aumentar tiempos de la solución.

Interrupt Solver: Se presiona este botón para detener la solución en cualquier punto, el valor que retorna será la mejor solución encontrada.

Close: Se presiona este botón para cerrar la Ventana de Estado. La optimización continuará.

3.4 Reportes de Lindo

Ventana Menu Reports
Gráfico 3.9



El gráfico 3.9 presenta el menú desplegable de todos los reportes que Lindo realiza, con la opción ***"Solution"*** se resuelve el modelo, la opción ***"Rango"*** realiza el análisis de sensibilidad.

"Parametrics" permite hacer variaciones en el modelo, puede ser los coeficientes de la función objetivo o un valor "***RHS(right-hand)***" por encima de su rango entero, no sólo el rango aceptable generado en el informe del rango

"Statistics" se presenta un reporte:

Primera línea: se indica el número de columnas, la cantidad de variables, cantidad de variables enteras, el exponente de la restricción si fuese programación cuadrática, caso contrario aparecerá el cero.

Segunda línea: Indica el número de coeficientes enteros en un modelo entero, numero de coeficientes diferentes de cero en las restricciones y la densidad del modelo

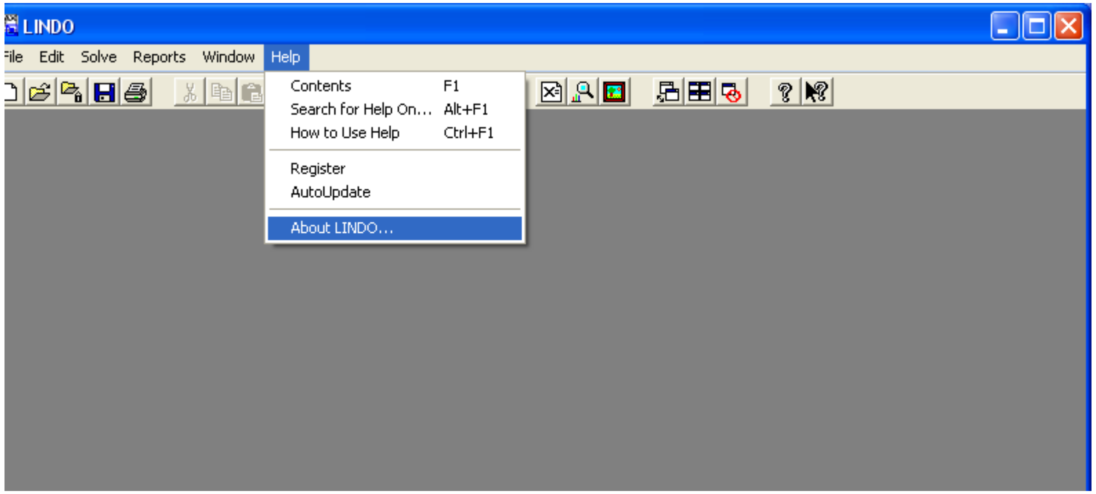
Tercera línea: cantidad más pequeña y más grande en valor absoluto

Cuarta línea: sentido de la función objetivo (max o min), cantidad de restricciones menor igual o mayor que, límite superior de la restricción .

Quinta línea: Número de columnas con un único coeficiente diferente de cero y alguna columna redundante

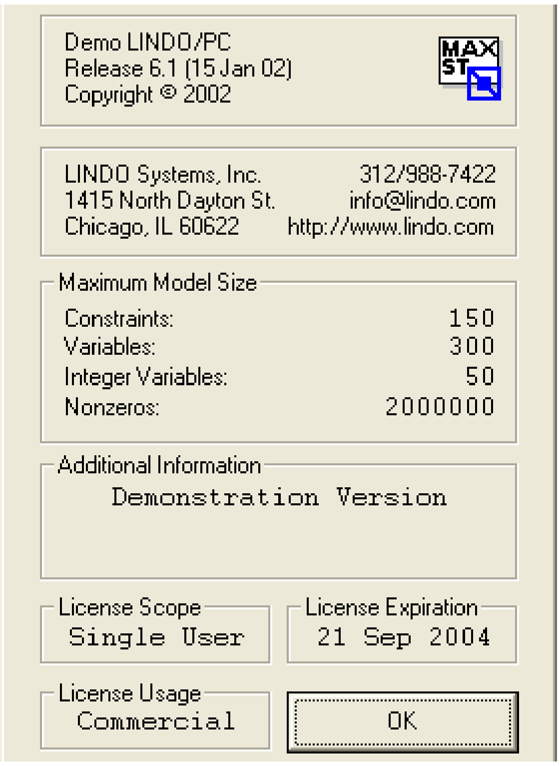
3.5 Ayuda de Lindo

Menú Ayuda
Gráfico 3.10



El grafico 3.10 tiene información acerca de la ayuda. Al escoger la opción ***"About LINDO"*** se presenta el grafico 3.11.

About LINDO
Gráfico 3.11



El grafico 3.11 contiene información acerca de la versión de Lindo, la cantidad de variables y de restricciones posibles que puede resolver el modelo.

CAPITULO IV

4. APLICACIÓN DE LA PROGRAMACION LINEAL Y OTRAS TECNICAS DE OPTIMIZACION A LA ESTIMACIÓN ESTADÍSTICA

4.1 Introducción

La programación lineal puede ser aplicada como un procedimiento para resolver el problema de la regresión lineal en los mismos casos en los que se usa el método de los mínimos cuadrados. La estimación clásica de mínimos cuadrados encuentra la fórmula de predicción que minimiza la suma cuadrática entre la observación y la predicción. De esta manera se puede encontrar varios “modelos de regresión lineal”, la programación lineal es aplicable porque además de minimizar la suma cuadrática del error se realiza lo siguiente:

- La Minimización de la suma de los errores absolutos
- La Minimización del máximo error absoluto

- La Minimización del error en la predicción al ordenar los datos. Llamado también Regresión Ordinal.

4.2 Aplicación

Se aplica el método de Mínimos Cuadrados a los datos del PIB (Variable Dependiente) con las exportaciones desde el año de 1990 hasta el 2000, los datos son trimestrales ver anexo1

Gráfico 4.1
Serie temporal del pib y exportaciones del primer trimestre de 1990 hasta el cuarto trimestre del 2000

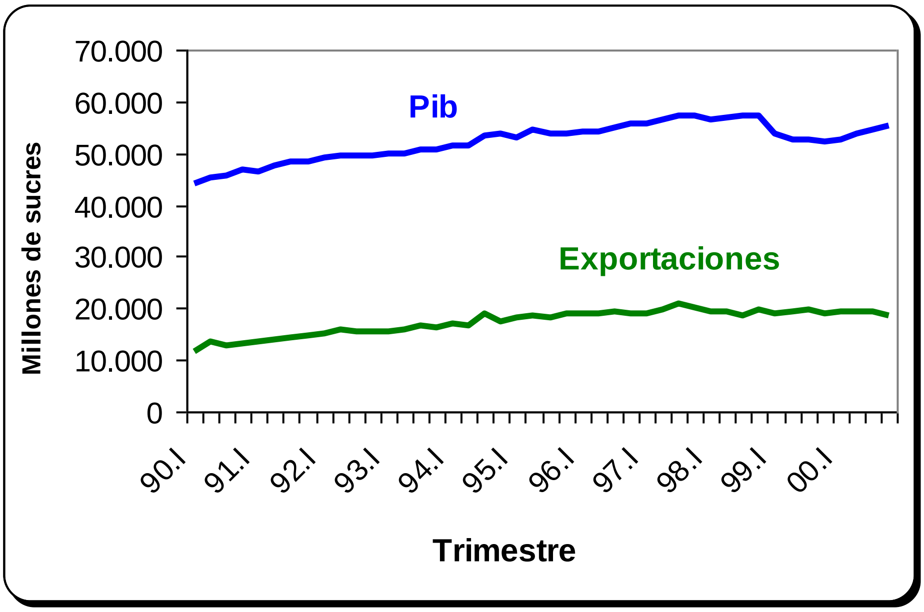
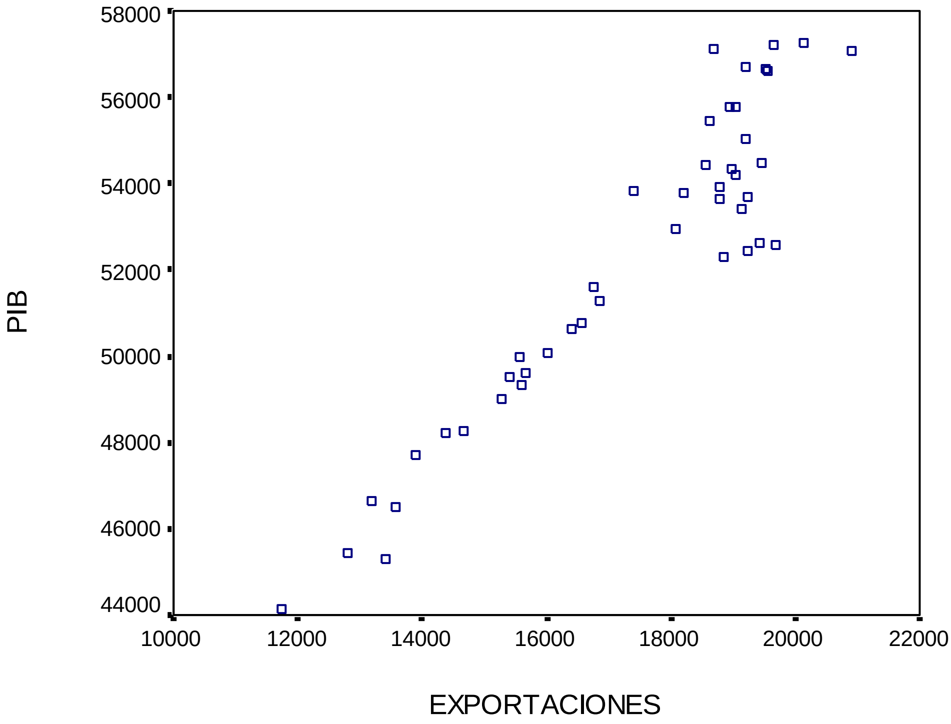


Gráfico 4.2
Gráfico de dispersión del pib y exportaciones del primer trimestre de 1990 hasta el cuarto trimestre del 2000



El grafico 4.2 muestra el diagrama de dispersión, que representan las observaciones por pares de los datos de las exportaciones y del pib, la figura sugiere una relación positiva y lineal, es positiva porque X y Y se mueven en la misma dirección, a medida que X aumenta, Y aumenta y a medida que X disminuye Y disminuye; lineal porque la relación puede identificarse mediante una línea recta.

Dado el siguiente modelo lineal:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \beta_k x_k + \varepsilon$$

Con n observaciones independientes $y_{1,} y_2, ... y_n$ de Y. Se puede escribir y_i como

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + ... + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i$$

Donde:

n: Número de observaciones

k: Número de variables explicativas

Y: Valor de la variable dependiente en la observación i, para i = 1,2........n,

x: Valor de la j-ésima variable independiente en la observación i, para i=1,2,......n y j = 1,2,3,........k

Se quiere estimar:

β_i: Coeficiente de predicción aplicado a la j-ésima variable explicativa

e_{ij} Error de la predicción aplicado a la i-ésima observación

El método de los Mínimos Cuadrados encuentra los valores de β_i que Minimiza $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + ...+ e_n^2$

Sujeta a $\boldsymbol{e_i = y_i - \beta_o - \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_{ij}}$

$\boldsymbol{\beta_j, e_i}$ con restricción de signo

En este trabajo se utiliza los datos del pib y las exportaciones desde 1990 al 2000, los datos son trimestrales. Por medio del método simplex se puede encontrar la recta que relaciona a estas variables, es decir la recta que se ajuste a los datos, se quiere probar que el pib depende de las exportaciones. El modelo a utilizar en el software Lindo es el siguiente:

MIN B0+ B1

SUBJECT TO

B0+17367B1=52210

17367B0+307033164B1=914551273

END

La solución óptima del modelo se presenta en la tabla 4.1, el valor de la función objetivo es de veintisiete mil ciento cincuenta y cinco con sesenta y siete centésimas, además en la tabla 4.1 se muestra el costo reducido de cada variable.

El costo reducido de una variable, es la cantidad por la cual la contribución de la ganancia de la variable puede ser mejorada antes que la variable en cuestión tenga un valor positivo en una solución óptima. Obviamente una variable que aparece en la solución óptima puede tener un costo reducido de cero

Tabla 4.1
Regresión de Mínimos Cuadrados aplicando Programación Lineal
Datos mensuales Exportaciones y Pib
1990–2000

Variable	Valor	Costo Reducido
B0	27154,232422	0,000000
B1	1,442723	0,000000

El modelo resultante es: $y = 27154.23 + 1.44X$, el intercepto es veintisiete mil ciento cincuenta y cuatro con veintitrés centésimas y podemos observar que su pendiente es positiva. Por cada incremento de las exportaciones en una unidad, el pib aumentará en uno con cuarenta y tres unidades. El valor de $R^2 = 0.89$, esto significa que el 89% del cambio en el valor del pib se explica mediante un cambio en las exportaciones

Tabla 4.2
Holgura y Precio Dual de las restricciones
Datos mensuales Exportaciones y Pib
1990−2000

Columna	Holgura o Superávit	Precio Dual
2)	0,000000	-56,640141
3)	0,000000	0,003204

En la tabla 4.2 se muestra el precio dual de una restricción; es el ratio por el cual el valor de la función objetivo mejorará cuando el lado derecho o término constante de la restricción se incrementa en una pequeña cantidad. Cada software de programación lineal puede tener sus propios signos convencionales con atención a los precios duales.

Lindo usa la convención que un precio dual positivo significa que incrementando el lado derecho en cuestión mejorará el valor de la función objetivo, considerando que un precio dual negativo significa que incrementando el lado derecho causará que el valor de la función objetivo disminuya. Un precio dual de cero significa que cambiando el lado derecho en una pequeña cantidad no tendrá efecto sobre el valor de la solución. Siguiendo está convención, restricciones menor o igual tendrán precios duales no negativos, restricciones con el signo mayor o igual tendrán precios duales no positivos restricciones con signo igual pueden tener precios duales de cualquier signo.

Tabla 4.3
Incremento y decremento permitido en la función objetivo
Datos mensuales Exportaciones y Pib
1990−2000

Variable	Rango de los Coeficientes Objetivos		
	Coeficiente Actual	**Incremento Permitido**	**Decremento Permitido**
B0	1,000000	INFINITY	INFINITY
B1	1,000000	INFINITY	INFINITY

Los valor de $\beta_0 \ y \beta_1$ pueden tener un número infinito de incremento y decremento y la función objetivo no cambia su valor, ver tabla 4.3.

4.2.1 Estimación de las mínimas desviaciones absolutas (LAD)

Consiste en minimizar la suma de los valores absolutos del error, esto es minimizar $|e_1|+|e_2|+............+|e_n|$, al realizar está regresión se ve menos afectada por los valores extremos, es conveniente utilizarla cuando en un conjunto de observaciones se tiene pocos datos con estas características, la programación lineal puede ser aplicada si se utiliza el supuesto $\boldsymbol{u_i - v_i = e_i}$, lo cual es una restricción de signo, la programación lineal se diseña para variables no negativas, El modelo a utilizar es el siguiente:

Minimizar: $u_1 + v_1 + u_2 + v_2 + ...u_n + v_n$

Sujeta a: $u_1 - v_1 = \beta_0 - \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_{ij}$

β_j con restricción en signo,

Aplicando el software a los datos, el modelo a utilizar es el siguiente:

Min
u1+v1+u2+v2+u3+v3+u4+v4+u5+v5+u6+v6+u7+v7+u8+v8+u9+v9+u10
+v10+u11+v11+u12+v12+u13+v13+u14+v14+u15+v15+u16+v16+u17+
v17+u18+v18+u19+v19+u20+v20+u21+v21+u22+v22+u23+v23+u24+
v24+u25+v25+u26+v26+u27+v27+u28+v28+u29+v29+u30+v30+u31+
v31+u32+v32+u33+v33+u34+v34+u35+v35+u36+v36+u37+v37+u38+
v38+u39+v39+u40+v40+u41+v41+u42+v42+u43+v43+u44+v44

subject to
u1-v1+b0+11741b1=44153
u2-v2+b0+13419b1=45310
u3-v3+b0+12799b1=45446
u4-v4+b0+13200b1=46622
u5-v5+b0+13584b1=46488
u6-v6+b0+13901b1=47688
u7-v7+b0+14388b1=48217
u8-v8+b0+14652b1=48245
u9-v9+b0+15264b1=48989
u10-v10+b0+15663b1=49604
u11-v11+b0+15405b1=49500
u12-v12+b0+15608b1=49343
u13-v13+b0+15559b1=49972
u14-v14+b0+16028b1=50075
u15-v15+b0+16568b1=50762
u16-v16+b0+16397b1=50638
u17-v17+b0+16860b1=51293
u18-v18+b0+16746b1=51612
u19-v19+b0+19122b1=53409
u20-v20+b0+17412b1=53836
u21-v21+b0+18091b1=52945

u22-v22+b0+18560b1=54444
u23-v23+b0+18211b1=53782
u24-v24+b0+18767b1=53903
u25-v25+b0+19030b1=54206
u26-v26+b0+18989b1=54327
u27-v27+b0+19216b1=55011
u28-v28+b0+19055b1=55791
u29-v29+b0+18958b1=55788
u30-v30+b0+19561b1=56597
u31-v31+b0+20896b1=57085
u32-v32+b0+20150b1=57279
u33-v33+b0+19507b1=56653
u34-v34+b0+19194b1=56699
u35-v35+b0+18682b1=57125
u36-v36+b0+19662b1=57201
u37-v37+b0+18777b1=53628
u38-v38+b0+19436b1=52632
u39-v39+b0+19675b1=52590
u40-v40+b0+18841b1=52280
u41-v41+b0+19245b1=52424
u42-v42+b0+19241b1=53704
u43-v43+b0+19465b1=54486
u44-v44+b0+18631b1=55442
END

Utilizando el software Lindo al modelo propuesto la función objetivo obtiene el valor óptimo de treinta y seis mil ochocientos tres con veintisiete centésimas, en sesenta y nueve iteraciones, el valor mínimo que toma cada variable, con su respectivo costo reducido se muestra en el anexo 2

En el anexo 3 se muestra el precio dual de las restricciones que intervienen en el modelo LAD.

El anexo 4, muestra los Rangos en los que la variable básica cambia:

El modelo resultante es:

$$y = 27212.46 + 1.43X_1$$

Es decir que por cada incremento de las exportaciones en una unidad el pib aumentará en uno con cuarenta y tres unidades; el intercepto es veintisiete mil doscientos doce con cuarenta y seis centavos y tiene una pendiente positiva.

4.2.2 Medida de la bondad de ajuste para (LAD)

En el método clásico de mínimos cuadrados, una buena medida estadística usada es el llamado R^2, Se conoce a $\boldsymbol{R^2}$ como coeficiente de determinación múltiple y su raíz cuadrada positiva es el coeficiente de correlación múltiple, un estadístico que puede ser calculado para la regresión del LAD es por medio de la mediana de los valores de las $\boldsymbol{Y_i}$ es el que se explica:

$$1 - \frac{(u_1 + v_1 + \dots\dots\dots u_n + v_n)/(n-k-1)}{(|y_1 - m| + \dots\dots + |y_m - m|/(n-1)}$$

Calculando el R^2 obtenemos:

$$R^2 = 1 - \frac{36803.27 \ / 42}{129458 \ / 43} = 0.71$$

Esto significa que el 71% del cambio en el valor del pib se explica mediante un cambio en las exportaciones.

4.2.3 Regresión mínima de la máxima desviación (LMAX)

La regresión LMAX es lo opuesto del método de regresión LAD, LMAX minimiza el peor error de predicción que se presenta en las observaciones, Aquí, una observación extrema puede tener en este caso un efecto muy grande,

La forma general para un modelo de programación lineal para una regresión LMAX seria la siguiente:

Minimizar: Z

Sujeta a:

$$\beta_0 + x_0\beta_1 + \dots\dots\dots x_{ik}\beta_k + u_i - v_i = y_i$$
$$z - u_i - v_i \geq 0$$

x_j restricción de signo

para i=1,2,,,,,,,,n

para k=1,2,,,,,,,n

Aplicando el software al los datos el modelo a utilizar es el siguiente:

Min z
subject to
b0-y0+11741b1+u1-v1=44153
b0-y0+13419b1+u2-v2=45310
b0-y0+12799b1+u3-v3=45446
b0-y0+13200b1+u4-v4=46622

b0-y0+13584b1+u5-v5=46488
b0-y0+13901b1+u6-v6=47688
b0-y0+14388b1+u7-v7=48217
b0-y0+14652b1+u8-v8=48245
b0-y0+15264b1+u9-v9=48989
b0-y0+15663b1+u10-v10=49604
b0-y0+15405b1+u11-v11=49500
b0-y0+15608b1+u12-v12=49343
b0-y0+15559b1+u13-v13=49972
b0-y0+16028b1+u14-v14=50075
b0-y0+16568b1+u15-v15=50762
b0-y0+16397b1+u16-v16=50638
b0-y0+16860b1+u17-v17=51293
b0-y0+16746b1+u18-v18=51612
b0-y0+19122b1+u19-v19=53409
b0-y0+17412b1+u20-v20=53836
b0-y0+18091b1+u21-v21=52945
b0-y0+18560b1+u22-v22=54444
b0-y0+18211b1+u23-v23=53782
b0-y0+18767b1+u24-v24=53903
b0-y0+19030b1+u25-v25=54206
b0-y0+18989b1+u26-v26=54327
b0-y0+19216b1+u27-v27=55011
b0-y0+19055b1+u28-v28=55791
b0-y0+18958b1+u29-v29=55788
b0-y0+19561b1+u30-v30=56597
b0-y0+20896b1+u31-v31=57085
b0-y0+20150b1+u32-v32=57279
b0-y0+19507b1+u33-v33=56653
b0-y0+19194b1+u34-v34=56699
b0-y0+18682b1+u35-v35=57125
b0-y0+19662b1+u36-v36=57201
b0-y0+18777b1+u37-v37=53628
b0-y0+19436b1+u38-v38=52632
b0-y0+19675b1+u39-v39=52590
b0-y0+18841b1+u40-v40=52280
b0-y0+19245b1+u41-v41=52424
b0-y0+19241b1+u42-v42=53704
b0-y0+19465b1+u43-v43=54486
b0-y0+18631b1+u44-v44=55442
z-u1-v1>=0
z-u2-v2>=0
z-u3-v3>=0
z-u4-v4>=0

```
z-u5-v5>=0
z-u6-v6>=0
z-u7-v7>=0
z-u8-v8>=0
z-u9-v9>=0
z-u10-v10>=0
z-u11-v11>=0
z-u12-v12>=0
z-u13-v13>=0
z-u14-v14>=0
z-u15-v15>=0
z-u16-v16>=0
z-u17-v17>=0
z-u18-v18>=0
z-u19-v19>=0
z-u20-v20>=0
z-u21-v21>=0
z-u22-v22>=0
z-u23-v23>=0
z-u24-v24>=0
z-u25-v25>=0
z-u26-v26>=0
z-u27-v27>=0
z-u28-v28>=0
z-u29-v29>=0
z-u30-v30>=0
z-u31-v31>=0
z-u32-v32>=0
z-u33-v33>=0
z-u34-v34>=0
z-u35-v35>=0
z-u36-v36>=0
z-u37-v37>=0
z-u38-v38>=0
z-u39-v39>=0
z-u40-v40>=0
z-u41-v41>=0
z-u42-v42>=0
z-u43-v43>=0
z-u44-v44>=0
end
```

Utilizando el Software Lindo, el valor óptimo es encontrado en ciento treinta y dos iteraciones, z= 2845,269, en el anexo 5 se presenta los valores que adquieren las variables, en el anexo 6 se muestra para cada restricción la holgura y el precio dual, en el Anexo 7 podemos observar

La ecuación encontrada es la siguiente:

$$y = 32539.8 + 1.16 X_{i1}$$

De la ecuación encontrada podemos concluir que por cada incremento de las exportaciones en una unidad el pib aumentará en un entero con dieciséis unidades; tiene una pendiente positiva y el intercepto es treinta y dos mil quinientos treinta y nueve con ocho décimas.

4.2.4 Medida de la bondad de ajuste para LMAX

Se define r que es igual al rango de las $\boldsymbol{Y_i}$ es decir max{$\boldsymbol{Y_i}$} - min{$\boldsymbol{Y_i}$},

$\boldsymbol{R^2}$ se calcula de la siguiente forma para el LMAX:

$$\boldsymbol{1 - \frac{max\{u_i + v_i\}/(n-k-1)}{r/(n-1)}}$$

r= Rango($\boldsymbol{Y_i}$)

r= 57279 – 44153= 13126

$$R^2 = 1 - \frac{2845.27/42}{13126/43}$$

$$R^2 = 0.78$$

Podemos concluir que el 78% del cambio en el valor del pib se explica mediante un cambio en las exportaciones

4.2.5 Método dual aplicado al LAD

El modelo que se utiliza para maximizar aplicando el dual es:

Maximizar: $\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + ...+ \lambda_n Y_n$

Sujeta a:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 x_{1j} + \lambda_2 x_{2j} + ...+ \lambda_n x_{nj} \quad j = 0......k \\ &\lambda_i \leq 1 \\ &\lambda_i \geq -1 \end{aligned}$$

Se define el siguiente artificio: $L_i = \lambda_i + 1$ o $L_i = \lambda_i - 1$

El modelo a utilizar es el siguiente:

Maximizar $L_1 Y_i + L_2 Y_2 + ...+ L_n Y_n - Y_1 - Y_2 - ....- Y_n$

Sujeta a:

$$L_1 x_{ij} + L_2 x_{2j} + ...+ L_n x_{nj} = x_{1j} + x_{2j} + ...+ x_{nj} \quad j = 0,1.......,k$$
$$L_i \leq 2 \quad i = 0,1.........,n$$

MODELO EN LINDO

Max

44153L1+45310L2+45446L3+46622L4+46488L5+47688L6+
48217L7+48245L8+48989L9+49604L10+49500L11+49343L12+
49972L13+50075L14+50762L15+50638L16+51293L17+51612L18+
53409L19+53836L20+52945L21+54444L22+53782L23+53903L24+
54206L25+54327L26+55011L27+55791L28+55788L29+56597L30+
57085L31+57279L32+56653L33+56699L34+57125L35+57201L36+
53628L37+52632L38+52590L39+52280L40+52424L41+53704L42+
54486L43+55442L44

SUBJECT TO
L1+L2+L3+L4+L5+L6+L7+L8+L9+L10+L11+L12+L13+L14+L15+L16+
L17+L18+L19+L20+L21+L22+L23+L24+L25+L26+L27+L28+L29+L30+
L31+L32+L33+L34+L35+L36+L36+L37+L38+L39+L41+L41+L42+L43+
L44<=44

11741L1+13419L2+12799L3+13200L4+13584L5+13901L6+14388L7+
14652L8+15264L9+15663L10+15405L11+15608L12+15559L13+1602
8L14+16568L15+16397L16+16860L17+16746L18+19122L19+17412L
20+18091L21+18560L22+18211L23+18767L24+19030L25+18989L26
+19216L27+19055L28+18958L29+19561L30+20896L31+20150L32+1
9507L33+19194L34+18682L35+19662L36+18777L37+19436L38+19,
675L39+18841L40+19245L41+19241L42+19465L43+18631L44<=764
156
L1<=2
L2<=2
L3<=2
L4<=2
L5<=2
L6<=2
L7<=2
L8<=2
L9<=2
L10<=2
L11<=2
L12<=2
L13<=2
L14<=2
L15<=2

L16<=2
L17<=2
L18<=2
L19<=2
L20<=2
L21<=2
L22<=2
L23<=2
L24<=2
L25<=2
L26<=2
L27<=2
L28<=2
L29<=2
L30<=2
L31<=2
L32<=2
L33<=2
L34<=2
L35<=2
L36<=2
L37<=2
L38<=2
L39<=2
L40<=2
L41<=2
L42<=2
L43<=2
L44<=2

Resultados Obtenidos:

Después de cincuenta y tres iteraciones se encuentra el valor óptimo, la función objetivo toma el valor de f(x) = 2431656. El anexo 8 muestra los valores que adquieren las variables utilizadas en el modelo, en el anexo 9 muestra la solución encontrada y los valores de la holgura y precio dual de las restricciones.

$$y = 27212.46 + 1.43X$$

Del modelo resultante se puede concluir que por cada incremento de las exportaciones en una unidad el pib aumentará en uno con cuarenta y tres unidades; tiene una pendiente positiva y el intercepto es veintisiete mil doscientos doce con cuarenta y seis centésimas.

En el anexo 10, se presenta una tabla acerca de los coeficientes de la función objetivo, el incremento y decremento permitido.

4.2.6 Método dual para el LMAX

El modelo dual que se utiliza para encontrar el LMAX se describe a continuación:

Maximizar: $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 + ... + \lambda_n y_n$

Sujeta a : $\lambda_i x_{ij} = 0 \quad j = 1,2,......k$

$$\lambda_i - \alpha_i \leq 0 \quad i = 1,2,......n$$

$$-\lambda_i - \alpha_i \leq 0 \quad i = 1,2,......n$$

$$\sum \alpha_i \leq 1$$

λ_i tiene restricción de signo

Es conveniente utilizar el siguiente cambio de variable, a través de las nuevas variables:

$$g_i + h_i = \alpha_i$$

$$g_i - h_i = \lambda_i$$

Sustituyendo en el modelo dual planteado obtenemos lo siguiente:

Maximizar: $\sum_{i=1}^{n}(g_i - h_i)y_i$

Sujeta a: $\sum_{i=1}^{n}(g_i - h_i)y_{ij} = 0 \quad j = 1,2,.......k$

$-2h_i \leq 0 \quad 1 = 1,2,.......n$

$g_i \geq 0 \quad i = 1,2,.......n$

$\sum_{i=1}^{n}(g_i - h_i) \leq 1$

Modelo del PIB:

EJEMPLO UTILIZANDO LINDO

El modelo es el siguiente:

max

44153g1-44153h1+45310g2-45310h2+45446g3-45446h3+46622g4-46622h4+46488g5-46488h5+47688g6-47688h6+48217g7+8217h7+48245g8-48245h8+48989g9-48989h9+49604g10-9604h10+49500g11-49500h11+49343g12-49343h12+49972g13-49972h13+50075g14-50075h14+50762g15-50762h15+50638g16-50638h16+51293g17-51293h17+51612g18-51612h18+53409g19-53409h19+53836g20-

53836h20+52945g21-52945h21+54444g22-54444h22+53782g23-53782h23+53903g24-53903h24+54206g25-54206h25+54327g26-54327h26+55011g27-55011h27+55791g28-55791h28+55788g29-55788h29+56597g30-56597h30+57085g31-57085h31+57279g32-57279h32+56653g33-56653h33+56699g34-56699h34+57125g35-57125h35+57201g36-57201h36+53628g37-53628h37+52632g38-52632h38+52590g39-52590h39+52280g40-52280h40+52424g41-52424h41+53704g42-53704h42+54486g43-54486h43+55442g44-55442h44

subject to

g1-h1+g2-h2+g3-h3+g4-h4+g5-h5+g6-h6+g7-h7+g8-h8+g9-h9+g10-10+g11-h11+g12-h12+g13-h13+g14-h14+g15-h15+g16-h16+g17-h17+g18-h18+g19-h19+g20-h20+g21-h21+g22-h22+g23-h23+g24-h24+g25-h25+g26-h26+g27-h27+g28-h28+g29-h29+g30-h30+g31-h31+g32-h32+g33-h33+g34-h34+g35-h35+g36-h36+g37-h37+g38-h38+g39-h39+g40-h40+g41-h41+g42-h42+g43-h43+g44-h44=0

11741g1-11741h1+13419g2-13419h2+12799g3+2799h3+13200g4+13200h4+13584g5-13584h5+13901g6-13901h6+14388g7-14388h7+14652g8-4652h8+15264g9-15264h9+15663g10-15663h10+15405g11-15405h11+15608g12-15608h12+15559g13-15559h13+16028g14-16028h14+16568g15-16568h15+16397g16-16397h16+16860g17-16860h17+16746g18-16746h18+19122g19-19122h19+17412g20-17412h20+18091g21-18091h21+18560g22-18560h22+18211g23-18211h23+18767g24-18767h24+19030g25-19030h25+18989g26-18989h26+19216g27-19216h27+19055g28-19055h28+18958g29-18958h29+19561g30-19561h30+20896g31-20896h31+20150g32-20150h32+19507g33-19507h33+19194g34-19194h34+18682g35-18682h35+19662g36-19662h36+18777g37-18777h37+19436g38-19436h38+19675g39-19675h39+18841g40-18841h40+19245g41-19245h41+19241g42-19241h42+19465g43-19465h43+18631g44-18631h44=0

g1+h1+g2+h2+g3+h3+g4+h4+g5+h5+g6+h6+g7+h7+g8+h8+g9+h9+g10+h10+g11+h11+g12+h12+g13+h13+g14+h14+g15+h15+g16+h16+g17+h17+g18+h18+g19+h19+g20+h20+g21+h21+g22+h22+g23+h23+g24+h24+g25+h25+g26+h26+g27+h27+g28+h28+g29+h29+g30+h30+

g31+h31+g32+h32+g33+h33+g34+h34+g35+h35+g36+h36+g37+h37+g38+h38+g39+h39+g40+h40+g41+h41+g42+h42+g43+h43+g44+h44 <=1

En cinco iteraciones es encontrado el valor óptimo, en el anexo 11 se presenta los resultados obtenidos de las variables que componen la función objetivo, en el anexo 12 se muestra el precio dual; es decir la solución encontrada del modelo.

La ecuación encontrada es:

$$y = 32539.8 + 1.16X$$

De la ecuación encontrada podemos concluir que por cada incremento de las exportaciones en una unidad el pib aumentará en uno con dieciséis unidades; tiene una pendiente positiva y el intercepto es treinta y dos mil quinientos treinta y nueve con ocho décimas.

En el anexo 13 se presenta el incremento y decremento permitido para las variables de la función objetivo.

Conclusiones

- A lo largo de toda está investigación, se ha podido determinar que existe una gran interrelación entre la estadística (fundamentalmente de tipo inferencial) y la teoría de optimización (lineal y no lineal)

- En los ejercicios prácticos, se ha empleado el SOFTWARE de Optimización LINDO el mismo que ha demostrado su eficiencia en este tipo de análisis, por ser interactivo, de fácil utilización en los datos al ingresar los modelos, obteniendo los resultados en forma rápida, además tiene una gran precisión numérica,

- Se puede usar eficientemente la teoría de la dualidad de la programación lineal en la solución del modelo de Regresión lineal; así al resolver el modelo LAD la solución es encontrada en sesenta y nueve iteraciones, el modelo LMAX en ciento treinta y dos iteraciones se obtiene el valor óptimo; pero aplicando el método dual al LAD la solución es encontrada en cincuenta y tres iteraciones, mientras que LMAX, se encuentra la solución en cinco iteraciones,

- ❖ Se ha podido observar que existen métodos alternativos al de mínimos cuadrados que permiten resolver el problema de la regresión lineal mediante técnicas de optimización,

- ❖ El avance que ha tenido la informática en los últimos años ha ocasionado que actualmente dispongamos de programas que resuelven muchos problemas matemáticos, en este trabajo se uso en particular el programa LINDO, que es especializado en la resolución de problemas de programación lineal y no lineal, y lo hemos utilizado en la resolución de problemas de Regresión lineal,

Recomendaciones

- Es recomendable la utilización de programas de software como **LINDO,** por ser interactivo, de fácil aplicación en los datos al ingresar los modelos, obteniendo los resultados en forma rápida, a la vez que ofrecen gran precisión numérica,

- Es recomendable que en cursos donde se estudia estadística se haga énfasis en que muchos de los problemas de estimación interviene la teoría de optimización, así por ejemplo usar la teoría de la dualidad de la programación lineal

- Por la evolución constante de la Informática, se recomienda el uso del programa que resuelvan los problemas matemáticos, relacionados a trabajos propuestos; en este trabajo se usó en particular el programa LINDO, que es especializado en la resolución de problemas de programación lineal y no lineal, y lo hemos utilizado en la resolución de problemas de Regresión lineal,

ANEXOS

Anexo 1
Datos Económicos del Ecuador 1990 – 2000

Cantidad datos	Trimestre	PIB Y	Exportaciones x
1	**90.I**	44.153	11.741
2	**90.II**	45.310	13.419
3	**90.III**	45.446	12.799
4	**90.IV**	46.622	13.200
5	**91.I**	46.488	13.584
6	**91.II**	47.688	13.901
7	**91.III**	48.217	14.388
8	**91.IV**	48.245	14.652
9	**92.I**	48.989	15.264
10	**92.II**	49.604	15.663
11	**92.III**	49.500	15.405
12	**92.IV**	49.343	15.608
13	**93.I**	49.972	15.559
14	**93.II**	50.075	16.028
15	**93.III**	50.762	16.568
16	**93.IV**	50.638	16.397
17	**94.I**	51.293	16.860
18	**94.II**	51.612	16.746
19	**94.III**	53.409	19.122
20	**94.IV**	53.836	17.412
21	**95.I**	52.945	18.091
22	**95.II**	54.444	18.560
23	**95.III**	53.782	18.211
24	**95.IV**	53.903	18.767
25	**96.I**	54.206	19.030
26	**96.II**	54.327	18.989
27	**96.III**	55.011	19.216
28	**96.IV**	55.791	19.055
29	**97.I**	55.788	18.958
30	**97.II**	56.597	19.561
31	**97.III**	57.085	20.896
32	**97.IV**	57.279	20.150
33	**98.I**	56.653	19.507
34	**98.II**	56.699	19.194
35	**98.III**	57.125	18.682
36	**98.IV**	57.201	19.662
37	**99.I**	53.628	18.777
38	**99.II**	52.632	19.436
39	**99.III**	52.590	19.675
40	**99.IV**	52.280	18.841
41	**00.I**	52.424	19.245
42	**00.II**	53.704	19.241
43	**00.III**	54.486	19.465
44	**00.IV**	55442	18631

Fuente: Banco Central del Ecuador

Anexo 2
Solución encontrada, modelo LAD con su respectivo Costo Reducido
Datos mensuales Exportaciones y Pib
1990–2000

Variable	Valor	Costo Reducido
U1	155,818649	0,000000
V1	0,000000	2,000000
U2	0,000000	2,000000
V2	1086,019165	0,000000
U3	0,000000	2,000000
V3	63,678577	0,000000
U4	539,059265	0,000000
V4	0,000000	2,000000
U5	0,000000	2,000000
V5	143,900055	0,000000
U6	602,922607	0,000000
V6	0,000000	2,000000
U7	435,716400	0,000000
V7	0,000000	2,000000
U8	86,306900	0,000000
V8	0,000000	2,000000
U9	0,000000	2,000000
V9	44,596981	0,000000
U10	0,000000	1,537932
V10	0,000000	0,462068
U11	264,832031	0,000000
V11	0,000000	2,000000
U12	0,000000	2,000000
V12	182,373016	0,000000
U13	516,676453	0,000000
V13	0,000000	2,000000
U14	0,000000	2,000000
V14	50,797249	0,000000
U15	0,000000	2,000000
V15	135,771255	0,000000
U16	0,000000	2,000000
V16	15,312822	0,000000
U17	0,000000	2,000000
V17	22,209059	0,000000
U18	459,763245	0,000000
V18	0,000000	2,000000
U19	0,000000	2,000000
V19	1139,922363	0,000000
U20	1731,661987	0,000000
V20	0,000000	2,000000
U21	0,000000	2,000000
V21	130,023880	0,000000

Variable	Valor	Costo Reducido
U22	698,502380	0,000000
V22	0,000000	2,000000
U23	535,426331	0,000000
V23	0,000000	2,000000
U24	0,000000	2,000000
V24	138,420975	0,000000
U25	0,000000	2,000000
V25	211,400925	0,000000
U26	0,000000	2,000000
V26	31,788076	0,000000
U27	327,696930	0,000000
V27	0,000000	2,000000
U28	1337,859497	0,000000
V28	0,000000	2,000000
U29	1473,528931	0,000000
V29	0,000000	2,000000
U30	1420,491333	0,000000
V30	0,000000	2,000000
U31	0,000000	0,462068
V31	0,000000	1,537932
U32	1260,467773	0,000000
V32	0,000000	2,000000
U33	1553,688721	0,000000
V33	0,000000	2,000000
U34	2047,147705	0,000000
V34	0,000000	2,000000
U35	3205,093506	0,000000
V35	0,000000	2,000000
U36	1880,103516	0,000000
V36	0,000000	2,000000
U37	0,000000	2,000000
V37	427,716797	0,000000
U38	0,000000	2,000000
V38	2365,811035	0,000000
U39	0,000000	2,000000
V39	2749,480957	0,000000
U40	0,000000	2,000000
V40	1867,209961	0,000000
U41	0,000000	2,000000
V41	2300,760986	0,000000
U42	0,000000	2,000000
V42	1015,042603	0,000000
U43	0,000000	2,000000
V43	553,268860	0,000000
U44	1595,002075	0,000000
V44	0,000000	2,000000
B0	27212,464844	0,000000
B1	1,429582	0,000000

Anexo 3
Modelo LAD, valores de la holgura y precio dual de las restricciones
Datos mensuales Exportaciones y Pib

Fila	Holgura o Superavit	Precio Dual
2)	0,000000	-1,000000
3)	0,000000	1,000000
4)	0,000000	1,000000
5)	0,000000	-1,000000
6)	0,000000	1,000000
7)	0,000000	-1,000000
8)	0,000000	-1,000000
9)	0,000000	-1,000000
10)	0,000000	1,000000
11)	0,000000	0,537932
12)	0,000000	-1,000000
13)	0,000000	1,000000
14)	0,000000	-1,000000
15)	0,000000	1,000000
16)	0,000000	1,000000
17)	0,000000	1,000000
18)	0,000000	1,000000
19)	0,000000	-1,000000
20)	0,000000	1,000000
21)	0,000000	-1,000000
22)	0,000000	1,000000
23)	0,000000	-1,000000
24)	0,000000	-1,000000
25)	0,000000	1,000000
26)	0,000000	1,000000
27)	0,000000	1,000000
28)	0,000000	-1,000000
29)	0,000000	-1,000000
30)	0,000000	-1,000000
31)	0,000000	-1,000000
32)	0,000000	-0,537932
33)	0,000000	-1,000000
34)	0,000000	-1,000000
35)	0,000000	-1,000000
36)	0,000000	-1,000000
37)	0,000000	-1,000000
38)	0,000000	1,000000
39)	0,000000	1,000000
40)	0,000000	1,000000
41)	0,000000	1,000000
42)	0,000000	1,000000
43)	0,000000	1,000000
44)	0,000000	1,000000
45)	0,000000	-1,000000

Anexo 4
Modelo LAD, incremento y decremento permitido en los coeficientes de la función objetivo
Datos mensuales Exportaciones y Pib
1990-2000

Variable	Rango de los Coeficientes Objetivos		
	Coeficiente Actual	Incremento Permitido	Decremento Permitido
U1	1,000000	0,264118	0,879083
V1	1,000000	INFINITY	2,000000
U2	1,000000	INFINITY	2,000000
V2	1,000000	1,076367	0,323392
U3	1,000000	INFINITY	2,000000
V3	1,000000	0,993948	0,298629
U4	1,000000	0,314189	1,045738
V4	1,000000	INFINITY	2,000000
U5	1,000000	INFINITY	2,000000
V5	1,000000	1,100657	0,330689
U6	1,000000	0,345675	1,150536
V6	1,000000	INFINITY	2,000000
U7	1,000000	0,371543	1,236632
V7	1,000000	INFINITY	2,000000
U8	1,000000	0,387252	1,288917
V8	1,000000	INFINITY	2,000000
U9	1,000000	INFINITY	2,000000
V9	1,000000	1,428977	0,429332
U10	1,000000	INFINITY	1,537932
V10	1,000000	INFINITY	0,462068
U11	1,000000	0,440357	1,465671
V11	1,000000	INFINITY	2,000000
U12	1,000000	INFINITY	2,000000
V12	1,000000	1,521937	0,457262
U13	1,000000	0,453064	1,507963
V13	1,000000	INFINITY	2,000000
U14	1,000000	INFINITY	2,000000
V14	1,000000	1,653246	0,496713
U15	1,000000	INFINITY	2,000000
V15	1,000000	1,859519	0,558688
U16	1,000000	INFINITY	2,000000
V16	1,000000	1,788842	0,537453
U17	1,000000	INFINITY	2,000000
V17	1,000000	1,994054	0,599108
U18	1,000000	0,582651	1,939277
V18	1,000000	INFINITY	2,000000
U19	1,000000	INFINITY	2,000000
V19	1,000000	0,699046	1,363021
U20	1,000000	0,694030	1,382504
V20	1,000000	INFINITY	2,000000
U21	1,000000	INFINITY	2,000000
V21	1,000000	0,995881	0,862032

U22	1,000000	1,035103	0,834657
V22	1,000000	INFINITY	2,000000
U23	1,000000	0,900559	0,948980
V23	1,000000	INFINITY	2,000000
U24	1,000000	INFINITY	2,000000
V24	1,000000	0,778995	1,135745
U25	1,000000	INFINITY	2,000000
V25	1,000000	0,718147	1,295820
U26	1,000000	INFINITY	2,000000
V26	1,000000	0,726999	1,267960
U27	1,000000	1,439286	0,680552
V27	1,000000	INFINITY	2,000000
U28	1,000000	1,313417	0,712854
V28	1,000000	INFINITY	2,000000
U29	1,000000	1,247678	0,733839
V29	1,000000	INFINITY	2,000000
U30	1,000000	1,811236	0,620318
V30	1,000000	INFINITY	2,000000
U31	1,000000	INFINITY	0,462068
V31	1,000000	INFINITY	1,537932
U32	1,000000	1,793626	0,538890
V32	1,000000	INFINITY	2,000000
U33	1,000000	1,740821	0,629032
V33	1,000000	INFINITY	2,000000
U34	1,000000	1,420682	0,684792
V34	1,000000	INFINITY	2,000000
U35	1,000000	1,092141	0,800927
V35	1,000000	INFINITY	2,000000
U36	1,000000	1,959481	0,604651
V36	1,000000	INFINITY	2,000000
U37	1,000000	INFINITY	2,000000
V37	1,000000	0,776493	1,141104
U38	1,000000	INFINITY	2,000000
V38	1,000000	0,640869	1,656164
U39	1,000000	INFINITY	2,000000
V39	1,000000	0,602692	1,980344
U40	1,000000	INFINITY	2,000000
V40	1,000000	0,760856	1,176642
U41	1,000000	INFINITY	2,000000
V41	1,000000	0,675042	1,464567
U42	1,000000	INFINITY	2,000000
V42	1,000000	0,675797	1,461027
U43	1,000000	INFINITY	2,000000
V43	1,000000	0,635981	1,689728
U44	1,000000	1,067550	0,814690
V44	1,000000	INFINITY	2,000000
B0	0,000000	0,385145	0,115716
B1	0,000000	2418,000000	8048,000000

Anexo 5
Solución encontrada, modelo LMAX con su respectivo Costo Reducido
Datos mensuales Exportaciones y Pib
1990-2000

Variable	Valor	Costo Reducido
Z	2845,268555	0,000000
B0	32539,808594	0,000000
Y0	0,000000	0,000000
B1	1,163683	0,000000
U1	0,000000	0,000000
V1	2049,608643	0,000000
U2	0,000000	0,158728
V2	2845,268555	0,000000
U3	428,741699	0,000000
V3	2416,526855	0,000000
U4	0,000000	0,000000
V4	1278,421997	0,000000
U5	492,996155	0,000000
V5	2352,272461	0,000000
U6	908,552429	0,000000
V6	1936,716064	0,000000
U7	0,000000	0,000000
V7	1065,877197	0,000000
U8	750,089539	0,000000
V8	2095,178955	0,000000
U9	766,002563	0,000000
V9	2079,265869	0,000000
U10	841,347839	0,000000
V10	2003,920776	0,000000
U11	0,000000	0,000000
V11	966,342712	0,000000
U12	742,849121	0,000000
V12	2102,419434	0,000000
U13	1085,859375	0,000000
V13	1759,409180	0,000000
U14	0,000000	0,000000
V14	1116,317139	0,000000
U15	0,000000	0,000000
V15	1057,705933	0,000000
U16	931,276245	0,000000
V16	1913,992310	0,000000
U17	0,000000	0,000000
V17	866,501282	0,000000
U18	0,000000	0,000000
V18	414,841431	0,000000
U19	731,258301	0,000000
V19	2114,010254	0,000000
U20	1939,707153	0,000000
V20	905,561401	0,000000
U21	0,000000	0,000000
V21	646,994873	0,000000

U22	1575,753174	0,000000
V22	1269,515381	0,000000
U23	50,363171	0,000000
V23	0,000000	0,000000
U24	0,000000	0,000000
V24	475,644501	0,000000
U25	0,000000	0,000000
V25	478,693085	0,000000
U26	1267,643188	0,000000
V26	1577,625366	0,000000
U27	109,861893	0,000000
V27	0,000000	0,000000
U28	1961,241699	0,000000
V28	884,026855	0,000000
U29	1187,092041	0,000000
V29	0,000000	0,000000
U30	2069,829834	0,000000
V30	775,438599	0,000000
U31	228,874680	0,000000
V31	0,000000	0,000000
U32	2068,125244	0,000000
V32	777,143250	0,000000
U33	2129,249268	0,000000
V33	716,019165	0,000000
U34	2334,365723	0,000000
V34	510,902802	0,000000
U35	2845,268555	0,000000
V35	0,000000	1,000000
U36	1780,859375	0,000000
V36	0,000000	0,000000
U37	1041,493652	0,000000
V37	1803,774902	0,000000
U38	0,000000	0,000000
V38	2525,148438	0,000000
U39	0,000000	0,841272
V39	2845,268555	0,000000
U40	330,255768	0,000000
V40	2515,012695	0,000000
U41	0,000000	0,000000
V41	2510,885010	0,000000
U42	0,000000	0,000000
V42	1226,230225	0,000000
U43	1070,186646	0,000000
V43	1775,081787	0,000000
U44	1221,616333	0,000000
V44	0,000000	0,000000

Anexo 6

Modelo LMAX, valores de la holgura y precio dual de las restricciones

Datos mensuales Exportaciones y Pib

1990-2000

Fila	Holgura o Superavit	Precio Dual

2)	0.000000	0.000000
3)	0.000000	0.079364
4)	0.000000	0.000000
5)	0.000000	0.000000
6)	0.000000	0.000000
7)	0.000000	0.000000
8)	0.000000	0.000000
9)	0.000000	0.000000
10)	0.000000	0.000000
11)	0.000000	0.000000
12)	0.000000	0.000000
13)	0.000000	0.000000
14)	0.000000	0.000000
15)	0.000000	0.000000
16)	0.000000	0.000000
17)	0.000000	0.000000
18)	0.000000	0.000000
19)	0.000000	0.000000
20)	0.000000	0.000000
21)	0.000000	0.000000
22)	0.000000	0.000000
23)	0.000000	0.000000
24)	0.000000	0.000000
25)	0.000000	0.000000
26)	0.000000	0.000000
27)	0.000000	0.000000
28)	0.000000	0.000000
29)	0.000000	0.000000
30)	0.000000	0.000000
31)	0.000000	0.000000
32)	0.000000	0.000000
33)	0.000000	0.000000
34)	0.000000	0.000000
35)	0.000000	0.000000
36)	0.000000	-0.500000
37)	0.000000	0.000000
38)	0.000000	0.000000
39)	0.000000	0.000000
40)	0.000000	0.420636
41)	0.000000	0.000000
42)	0.000000	0.000000
43)	0.000000	0.000000
44)	0.000000	0.000000
45)	0.000000	0.000000
46)	795.659851	0.000000
47)	0.000000	-0.079364
Fila	**Holgura o Superavit**	**Precio Dual**
48)	0.000000	0.000000
49)	1566.846558	0.000000
50)	0.000000	0.000000
51)	0.000000	0.000000

52)	1779.391357	0.000000
53)	0.000000	0.000000
54)	0.000000	0.000000
55)	0.000000	0.000000
56)	1878.925781	0.000000
57)	0.000000	0.000000
58)	0.000000	0.000000
59)	1728.951416	0.000000
60)	1787.562622	0.000000
61)	0.000000	0.000000
62)	1978.767212	0.000000
63)	2430.427002	0.000000
64)	0.000000	0.000000
65)	0.000000	0.000000
66)	2198.273682	0.000000
67)	0.000000	0.000000
68)	2794.905273	0.000000
69)	2369.624023	0.000000
70)	2366.575439	0.000000
71)	0.000000	0.000000
72)	2735.406738	0.000000
73)	0.000000	0.000000
74)	1658.176514	0.000000
75)	0.000000	0.000000
76)	2616.393799	0.000000
77)	0.000000	0.000000
78)	0.000000	0.000000
79)	0.000000	0.000000
80)	0.000000	-0.500000
81)	1064.409180	0.000000
82)	0.000000	0.000000
83)	320.120209	0.000000
84)	0.000000	-0.420636
85)	0.000000	0.000000
86)	334.383636	0.000000
87)	1619.038330	0.000000
88)	0.000000	0.000000
89)	1623.652222	0.000000

Anexo 7
Modelo LMAX, incremento y decremento permitido de los coeficientes de la función objetivo
Datos mensuales Exportaciones y Pib
1990-2000

Variable	Rango de los Coeficientes Objetivos		
	Coeficiente Actual	Incremento Permitido	Decremento Permitido
Z	1.000000	INFINITY	1.000000

B0	0.000000	0.025888	0.000000
Y0	0.000000	INFINITY	0.000000
B1	0.000000	2631.500000	496.500000
U1	0.000000	INFINITY	0.000000
V1	0.000000	0.066756	0.000000
U2	0.000000	INFINITY	0.158728
V2	0.000000	0.086205	1.000000
U3	0.000000	0.000000	0.144415
V3	0.000000	0.000000	0.894612
U4	0.000000	INFINITY	0.000000
V4	0.000000	0.083048	0.000000
U5	0.000000	0.000000	0.163027
V5	0.000000	0.000000	1.000000
U6	0.000000	0.000000	0.171978
V6	0.000000	0.000000	1.000000
U7	0.000000	INFINITY	0.000000
V7	0.000000	0.103643	0.000000
U8	0.000000	0.000000	0.197691
V8	0.000000	0.000000	1.000000
U9	0.000000	0.000000	0.225119
V9	0.000000	0.000000	1.000000
U10	0.000000	0.000000	0.247507
V10	0.000000	0.000000	1.000000
U11	0.000000	INFINITY	0.000000
V11	0.000000	0.131575	0.000000
U12	0.000000	0.000000	0.244160
V12	0.000000	0.000000	1.000000
U13	0.000000	0.000000	0.241254
V13	0.000000	0.000000	1.000000
U14	0.000000	INFINITY	0.000000
V14	0.000000	0.157594	0.000000
U15	0.000000	INFINITY	0.000000
V15	0.000000	0.190193	0.000000
U16	0.000000	0.000000	0.302929
V16	0.000000	0.000000	1.000000
U17	0.000000	INFINITY	0.000000
V17	0.000000	0.214147	0.000000
U18	0.000000	INFINITY	0.000000
V18	0.000000	0.204111	0.000000
U19	0.000000	0.000000	0.922848
Variable	**Rango de los Coeficientes Objetivos**		
	Coeficiente Actual	**Incremento Permitido**	**Decremento Permitido**
V19	0.000000	0.000000	1.000000
U20	0.000000	0.000000	0.438798
V20	0.000000	0.000000	1.000000
U21	0.000000	INFINITY	0.000000
V21	0.000000	0.456552	0.000000
U22	0.000000	0.000000	0.890583
V22	0.000000	0.000000	1.000000
U23	0.000000	1.000000	0.000000

V23	0.000000	INFINITY	0.000000
U24	0.000000	INFINITY	0.000000
V24	0.000000	0.968710	0.000000
U25	0.000000	INFINITY	0.000000
V25	0.000000	0.883202	0.000000
U26	0.000000	0.000000	0.944883
V26	0.000000	0.000000	1.000000
U27	0.000000	1.000000	0.000000
V27	0.000000	INFINITY	0.000000
U28	0.000000	0.000000	0.933818
V28	0.000000	0.000000	1.000000
U29	0.000000	1.000000	0.000000
V29	0.000000	INFINITY	0.000000
U30	0.000000	0.000000	0.856887
V30	0.000000	0.000000	1.000000
U31	0.000000	0.289083	0.000000
V31	0.000000	INFINITY	0.000000
U32	0.000000	0.000000	0.781905
V32	0.000000	0.000000	0.676431
U33	0.000000	0.000000	0.864487
V33	0.000000	0.000000	1.000000
U34	0.000000	0.000000	0.911342
V34	0.000000	0.000000	1.000000
U35	0.000000	1.000000	1.000000
V35	0.000000	INFINITY	1.000000
U36	0.000000	1.000000	0.000000
V36	0.000000	INFINITY	0.000000
U37	0.000000	0.000000	0.982269
V37	0.000000	0.000000	1.000000
U38	0.000000	INFINITY	0.000000
V38	0.000000	0.777286	0.000000
U39	0.000000	INFINITY	0.841272
V39	0.000000	0.726031	1.000000
U40	0.000000	0.000000	0.970675
V40	0.000000	0.000000	1.000000
U41	0.000000	INFINITY	0.000000
V41	0.000000	0.823760	0.000000
U42	0.000000	INFINITY	0.000000
V42	0.000000	0.824792	0.000000
U43	0.000000	0.000000	0.870493
Variable	**Rango de los Coeficientes Objetivos**		
	Coeficiente Actual	**Incremento Permitido**	**Decremento Permitido**
V43	0.000000	0.000000	1.000000
U44	0.000000	1.000000	0.000000
V44	0.000000	INFINITY	0.000000

Anexo 8
Solución encontrada, modelo DUAL LAD con su respectivo Costo Reducido
Datos mensuales Exportaciones y Pib
1990-2000

Variable	Valor	Costo Reducido
L1	2,000000	0,000000
L2	0,000000	1086,019165
L3	0,000000	63,678577
L4	2,000000	0,000000
L5	0,000000	143,900055
L6	2,000000	0,000000
L7	2,000000	0,000000
L8	2,000000	0,000000
L9	0,000000	44,596981
L10	0,155809	0,000000
L11	2,000000	0,000000
L12	0,000000	182,373016
L13	2,000000	0,000000
L14	0,000000	50,797249
L15	0,000000	135,771255
L16	0,000000	15,312822
L17	0,000000	22,209059
L18	2,000000	0,000000
L19	0,000000	1139,922363
L20	2,000000	0,000000
L21	0,000000	130,023880
L22	2,000000	0,000000
L23	2,000000	0,000000
L24	0,000000	138,420975
L25	0,000000	211,400925
L26	0,000000	31,788076
L27	2,000000	0,000000
L28	2,000000	0,000000
L29	2,000000	0,000000
L30	2,000000	0,000000
L31	1,844191	0,000000
L32	2,000000	0,000000
L33	2,000000	0,000000
Variable	Valor	Costo Reducido
L34	2,000000	0,000000
L35	2,000000	0,000000
L36	0,000000	25332,361328
L37	0,000000	427,716797
L38	0,000000	2365,811035
L39	2,000000	0,000000
L40	2,000000	0,000000
L41	0,000000	29513,226562
L42	0,000000	1015,042603
L43	0,000000	553,268860
L44	2,000000	0,000000

Anexo 9
Modelo DUAL LAD, valores de la holgura y precio dual de las restricciones
Datos mensuales Exportaciones y Pib
1990-2000

Fila	Holgura o Superávit	Precio Dual
2)	0.000000	27212.464844
3)	0.000000	1.429582
4)	0.000000	155.818649
5)	2.000000	0.000000
6)	2.000000	0.000000
7)	0.000000	539.059265
8)	2.000000	0.000000
9)	0.000000	602.922607
10)	0.000000	435.716400
11)	0.000000	86.306900
12)	2.000000	0.000000
13)	1.844191	0.000000
14)	0.000000	264.832031
15)	2.000000	0.000000
16)	0.000000	516.676453
17)	2.000000	0.000000
18)	2.000000	0.000000
19)	2.000000	0.000000
20)	2.000000	0.000000
21)	0.000000	459.763245
22)	2.000000	0.000000
23)	0.000000	1731.661987
24)	2.000000	0.000000
25)	0.000000	698.502380
26)	0.000000	535.426331
Fila	**Holgura o Superávit**	**Precio Dual**
27)	2.000000	0.000000
28)	2.000000	0.000000
29)	2.000000	0.000000
30)	0.000000	327.696930
31)	0.000000	1337.859497
32)	0.000000	1473.528931
33)	0.000000	1420.491333
34)	0.155809	0.000000
35)	0.000000	1260.467773
36)	0.000000	1553.688721
37)	0.000000	2047.147705
38)	0.000000	3205.093506
39)	2.000000	0.000000
40)	2.000000	0.000000
41)	2.000000	0.000000
42)	0.000000	25349.408203
43)	0.000000	25345.255859
44)	2.000000	0.000000

45)	2.000000	0.000000
46)	2.000000	0.000000
47)	0.000000	1595.002075

Anexo 10
Modelo DUAL LAD, incremento y decremento permitido de los coeficientes de la función objetivo
Datos mensuales Exportaciones y Pib
1990-2000

Variable	Rango de los Coeficientes Objetivos		
	Coeficiente Actual	**Incremento Permitido**	**Decremento Permitido**
L1	44153.000000	INFINITY	155.818649
L2	45310.000000	1086.019287	INFINITY
L3	45446.000000	63.678757	INFINITY
L4	46622.000000	INFINITY	539.059265
L5	46488.000000	143.900253	INFINITY
L6	47688.000000	INFINITY	602.922607
L7	48217.000000	INFINITY	435.716400
L8	48245.000000	INFINITY	86.306900
L9	48989.000000	44.597210	INFINITY
L10	49604.000000	72.332481	17.810696
L11	49500.000000	INFINITY	264.832031
L12	49343.000000	182.373260	INFINITY
L13	49972.000000	INFINITY	516.676453
L14	50075.000000	50.797493	INFINITY
L15	50762.000000	135.771515	INFINITY
Variable	**Rango de los Coeficientes Objetivos**		
	Coeficiente Actual	**Incremento Permitido**	**Decremento Permitido**
L16	50638.000000	15.313075	INFINITY
L17	51293.000000	22.209320	INFINITY
L18	51612.000000	INFINITY	459.763245
L19	53409.000000	1139.922729	INFINITY
L20	53836.000000	INFINITY	1731.661987
L21	52945.000000	130.024170	INFINITY
L22	54444.000000	INFINITY	698.502380
L23	53782.000000	INFINITY	535.426331
L24	53903.000000	138.421280	INFINITY
L25	54206.000000	211.401230	INFINITY
L26	54327.000000	31.788383	INFINITY
L27	55011.000000	INFINITY	327.696930
L28	55791.000000	INFINITY	1337.859497
L29	55788.000000	INFINITY	1473.528931
L30	56597.000000	INFINITY	1420.491333
L31	57085.000000	116.353271	50.015678
L32	57279.000000	INFINITY	1260.467773
L33	56653.000000	INFINITY	1553.688721
L34	56699.000000	INFINITY	2047.147705
L35	57125.000000	INFINITY	3205.093506

L36	57201.000000	25332.361328	INFINITY
L37	53628.000000	427.717102	INFINITY
L38	52632.000000	2365.811279	INFINITY
L39	52590.000000	INFINITY	25349.408203
L40	52280.000000	INFINITY	25345.255859
L41	52424.000000	29513.226562	INFINITY
L42	53704.000000	1015.042908	INFINITY
L43	54486.000000	553.269165	INFINITY
L44	55442.000000	INFINITY	1595.002075

Anexo 11
Solución encontrada, modelo DUAL LMAX con su respectivo Costo Reducido
Datos mensuales Exportaciones y Pib 1990-2000

Variable	Valor	Costo Reducido
G1	0.000000	4894.877441
H1	0.000000	795.659851
G2	0.000000	5690.537109
H2	0.079364	0.000000
G3	0.000000	4833.053711
H3	0.000000	857.483398
G4	0.000000	4123.690430
Variable	**Valor**	**Costo Reducido**
H4	0.000000	1566.846558
G5	0.000000	4704.544922
H5	0.000000	985.992310
G6	0.000000	3873.432129
H6	0.000000	1817.104858
G7	0.000000	3911.145752
H7	0.000000	1779.391357
G8	0.000000	4190.357910
H8	0.000000	1500.179077
G9	0.000000	4158.531738
H9	0.000000	1532.005127
G10	0.000000	4007.841553
H10	0.000000	1682.695679
G11	0.000000	3811.611328
H11	0.000000	1878.925781
G12	0.000000	4204.838867
H12	0.000000	1485.698242
G13	0.000000	3518.818359
H13	0.000000	2171.718750
G14	0.000000	3961.585693
H14	0.000000	1728.951416
G15	0.000000	3902.974365
H15	0.000000	1787.562622
G16	0.000000	3827.984619
H16	0.000000	1862.552490

G17	0.000000	3711.769775
H17	0.000000	1978.767212
G18	0.000000	3260.109863
H18	0.000000	2430.427002
G19	0.000000	4228.020508
H19	0.000000	1462.516602
G20	0.000000	1811.122803
H20	0.000000	3879.414307
G21	0.000000	3492.263428
H21	0.000000	2198.273682
G22	0.000000	2539.030762
H22	0.000000	3151.506348
G23	0.000000	2794.905273
H23	0.000000	2895.631592
G24	0.000000	3320.913086
H24	0.000000	2369.624023
G25	0.000000	3323.961670
H25	0.000000	2366.575439
G26	0.000000	3155.250732
H26	0.000000	2535.286377
G27	0.000000	2735.406738
H27	0.000000	2955.130371
G28	0.000000	1768.053711
H28	0.000000	3922.483398
G29	0.000000	1658.176514
Variable	**Valor**	**Costo Reducido**
H29	0.000000	4032.360596
G30	0.000000	1550.877197
H30	0.000000	4139.659668
G31	0.000000	2616.393799
H31	0.000000	3074.143311
G32	0.000000	1554.286499
H32	0.000000	4136.250488
G33	0.000000	1432.038330
H33	0.000000	4258.498535
G34	0.000000	1021.805603
H34	0.000000	4668.731445
G35	0.500000	0.000000
H35	0.000000	5690.537109
G36	0.000000	1064.409180
H36	0.000000	4626.127930
G37	0.000000	3607.549805
H37	0.000000	2082.987305
G38	0.000000	5370.416992
H38	0.000000	320.120209
G39	0.000000	5690.537109
H39	0.420636	0.000000
G40	0.000000	5030.025391
H40	0.000000	660.511536
G41	0.000000	5356.153320
H41	0.000000	334.383636

G42	0.000000	4071.498779
H42	0.000000	1619.038330
G43	0.000000	3550.163574
H43	0.000000	2140.373291
G44	0.000000	1623.652222
H44	0.000000	4066.885010

Anexo 12
Modelo DUAL LMAX, valores de la holgura y precio dual de las restricciones
Datos mensuales Exportaciones y Pib
1990-2000

Fila	Holgura o Superávit	Precio Dual
2)	0,000000	32539,808594
3)	0,000000	1,163683
4)	0,000000	2845,268555

Anexo 13
Modelo DUAL LMAX, incremento y decremento permitido de los coeficientes de la función objetivo
Datos mensuales Exportaciones y Pib
1990-2000

Variable	Rango de los Coeficientes Objetivos		
	Coeficiente Actual	Incremento Permitido	Decremento Permitido
G1	44153.000000	4894.876953	INFINITY
H1	-44153.000000	795.659973	INFINITY
G2	45310.000000	5690.537109	INFINITY
H2	-45310.000000	4411.804688	627.382141
G3	45446.000000	4833.053711	INFINITY
H3	-45446.000000	857.483582	INFINITY
G4	46622.000000	4123.690430	INFINITY
H4	-46622.000000	1566.846802	INFINITY
G5	46488.000000	4704.544434	INFINITY
H5	-46488.000000	985.992554	INFINITY
G6	47688.000000	3873.432129	INFINITY
H6	-47688.000000	1817.105103	INFINITY
G7	48217.000000	3911.145508	INFINITY
H7	-48217.000000	1779.391602	INFINITY
G8	48245.000000	4190.357910	INFINITY
H8	-48245.000000	1500.179321	INFINITY
G9	48989.000000	4158.531738	INFINITY
H9	-48989.000000	1532.005371	INFINITY
G10	49604.000000	4007.841064	INFINITY
H10	-49604.000000	1682.695923	INFINITY
G11	49500.000000	3811.611084	INFINITY
H11	-49500.000000	1878.926147	INFINITY
G12	49343.000000	4204.838379	INFINITY
H12	-49343.000000	1485.698486	INFINITY

G13	49972.000000	3518.818115	INFINITY
H13	-49972.000000	2171.718994	INFINITY
G14	50075.000000	3961.585449	INFINITY
H14	-50075.000000	1728.951782	INFINITY
G15	50762.000000	3902.974121	INFINITY
H15	-50762.000000	1787.562988	INFINITY
G16	50638.000000	3827.984375	INFINITY
H16	-50638.000000	1862.552734	INFINITY
G17	51293.000000	3711.769531	INFINITY
H17	-51293.000000	1978.767700	INFINITY
G18	51612.000000	3260.109619	INFINITY
H18	-51612.000000	2430.427490	INFINITY
G19	53409.000000	4228.020020	INFINITY
H19	-53409.000000	1462.517090	INFINITY
G20	53836.000000	1811.122437	INFINITY
H20	-53836.000000	3879.414795	INFINITY
G21	52945.000000	3492.262939	INFINITY
Variable	**Rango de los Coeficientes Objetivos**		
	Coeficiente Actual	**Incremento Permitido**	**Decremento Permitido**
H21	-52945.000000	2198.274170	INFINITY
G22	54444.000000	2539.030273	INFINITY
H22	-54444.000000	3151.506836	INFINITY
G23	53782.000000	2794.905029	INFINITY
H23	-53782.000000	2895.632080	INFINITY
G24	53903.000000	3320.912598	INFINITY
H24	-53903.000000	2369.624512	INFINITY
G25	54206.000000	3323.961182	INFINITY
H25	-54206.000000	2366.575928	INFINITY
G26	54327.000000	3155.250244	INFINITY
H26	-54327.000000	2535.286865	INFINITY
G27	55011.000000	2735.406250	INFINITY
H27	-55011.000000	2955.130859	INFINITY
G28	55791.000000	1768.053223	INFINITY
H28	-55791.000000	3922.483887	INFINITY
G29	55788.000000	1658.176025	INFINITY
H29	-55788.000000	4032.361084	INFINITY
G30	56597.000000	1550.876709	INFINITY
H30	-56597.000000	4139.660156	INFINITY
G31	57085.000000	2616.393311	INFINITY
H31	-57085.000000	3074.143799	INFINITY
G32	57279.000000	1554.285889	INFINITY
H32	-57279.000000	4136.250977	INFINITY
G33	56653.000000	1432.037842	INFINITY
H33	-56653.000000	4258.499023	INFINITY
G34	56699.000000	1021.805176	INFINITY
H34	-56699.000000	4668.731934	INFINITY
G35	57125.000000	INFINITY	1021.804688
H35	-57125.000000	5690.537598	INFINITY
G36	57201.000000	1064.408691	INFINITY
H36	-57201.000000	4626.128418	INFINITY

G37	53628.000000	3607.549316	INFINITY
H37	-53628.000000	2082.987793	INFINITY
G38	52632.000000	5370.416504	INFINITY
H38	-52632.000000	320.120697	INFINITY
G39	52590.000000	5690.536621	INFINITY
H39	-52590.000000	2966.417725	332.837189
G40	52280.000000	5030.024902	INFINITY
H40	-52280.000000	660.511963	INFINITY
G41	52424.000000	5356.152832	INFINITY
H41	-52424.000000	334.384125	INFINITY
G42	53704.000000	4071.498291	INFINITY
H42	-53704.000000	1619.038818	INFINITY
G43	54486.000000	3550.163330	INFINITY
H43	-54486.000000	2140.373779	INFINITY
G44	55442.000000	1623.651733	INFINITY
H44	-55442.000000	4066.885254	INFINITY

Bibliografía

1. **Hamdy A. Taha**, (1998), “Investigación de Operaciones Una Introducción”, Sexta Edición, Prentice Hall, México

2. **Hillier & Lieberman**, (2002),”Investigación de Operaciones”, Mc Graw Hill Interamericana Editores, México

3. **Mendehall William**, (1994), Estadística Matemática con Aplicaciones, Segunda Edición, Grupo Editorial Iberoamérica , México.

4. **Grupo Editorial Océano**, (1987), Diccionario Español – Inglés Ingles-Español, Grupo Editorial Océano, España.

5. **Linus Schrage**, (1997),Optimization Modeling with Lindo,Quinta Edición, Internacional Thomson Editores, California, USA.

6. **Douglas C. Montgomery & George C. Runger**,(2004), Probabilidad y Estadística Aplicada a la Ingeniería, Segunda Edición, Editorial Limusa S.A., Mexico.

7. **Allen L. Webster**,(2003),Estadística Aplicada a los Negocios y la Economía, Tercera Edición, Mc Graw Hill Interamericana S.A., Colombia.

8. **María Espinoza**,(2003), "Análisis Dinámico de la Estabilidad de Variables Macroeconómicas", Tesis de Grado