



AÑO LECTIVO: 2023 - 2024	PERÍODO ACADÉMICO: 1	COMPONENTE TEÓRICO	
ASIGNATURA: Estadística II	PROFESORES: Francisco Moreira Pamela Crow Katherine Loor	Examen: (40 Puntos)	
		Lecciones + Quizzes + Tareas: (60 Puntos)	
COORDINADOR: Francisco Moreira	FECHA: 6 de julio de 2023	TOTAL: (100 Puntos)	

COMPROMISO DE HONOR

Yo, _____ al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que puedo usar una calculadora ordinaria para cálculos aritméticos, un lápiz o esferográfico; que solo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen; y, cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído, debo apagarlo y depositarlo en la parte anterior del aula, junto con algún otro material que se encuentre acompañándolo. No debo además, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a las que se entreguen en esta evaluación. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada. *Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptar la declaración anterior.*

“Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar.”

FIRMA: _____ **NÚMERO DE MATRÍCULA:** _____

- (15 puntos) Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria de la distribución normal $X \sim N(3, \sigma^2)$ y Y_1, Y_2, \dots, Y_m una muestra aleatoria de la distribución normal $Y \sim N(4, \sigma^2)$, tal que la variable aleatoria X es independiente de Y .
 - Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de σ^2 .
 - Muestre que el estimador encontrado en (a) es insesgado.
 - Determine el límite inferior de la varianza de los estimadores de σ^2 .
- (7.5 puntos) En una fábrica de porcelanas se desea estudiar el número de piezas defectuosas que se producen en una determinada operación a la semana y por trabajador. Para ello se selecciona aleatoriamente un grupo de 10 trabajadores y se observa el número de piezas defectuosas producidas. Después, a estos trabajadores se les imparte un curso de capacitación, observando a continuación su trabajo. Los resultados obtenidos fueron:

Trabajador	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antes	56	56	147	58	121	57	49	118	63	75
Después	47	63	125	26	99	36	34	90	50	59

- Construya un intervalo de confianza que permita responder si existieron mejoras después del curso impartido a los trabajadores. Considere un nivel de confianza de 95% y establezca los supuestos necesarios.

- (b) ¿Cambia la respuesta si realiza una prueba de hipótesis con nivel de significancia de 5% para verificar si existieron mejoras después del curso? Concluya en base al valor- p .
3. (10 puntos) El Servicio de Inmigración y Naturalización de Estados Unidos informó que el 79% de los viajeros extranjeros que visitaron Estados Unidos declararon que su principal objetivo era disfrutar de unas vacaciones (América by the Numbers, 1995). Para un estudio de seguimiento realizado en 2005, supongamos que se selecciona una muestra de 500 visitantes y que 360 afirman que su principal motivo para visitar Estados Unidos es disfrutar de unas vacaciones. ¿Es menor la proporción de viajeros extranjeros que tomaron vacaciones en Estados Unidos en 2005 en comparación con la proporción informada en 1995? Considere un nivel de significancia del 2%.
- (a) Establezca las hipótesis nula y alternativa para responder la pregunta de investigación.
- (b) Defina espacio paramétrico y determine el espacio paramétrico asociado a la hipótesis nula y a la hipótesis alternativa.
- (c) Defina probabilidad de error tipo I, probabilidad de error tipo II e interprete en base al problema planteado. ¿Cuál es el valor de la probabilidad del error tipo I?
- (d) Construya la función potencia de la prueba y bosqueje la gráfica.
4. (7.5 puntos) Un analista financiero está interesado en determinar si hay una diferencia significativa en los rendimientos promedio entre dos carteras de inversión: una cartera compuesta por acciones tecnológicas y otra cartera compuesta por acciones de compañías energéticas. El analista recopila datos históricos de rendimientos mensuales de ambas carteras durante un período de cinco años. El analista obtiene los siguientes resultados:

Cartera de acciones	Rendimiento promedio mensual	Desviación estándar de los rendimientos mensuales	Períodos medidos (en semestres)
Tecnológicas	2.0%	1.5%	10
Energéticas	1.5%	1.0%	10

- (a) Establezca las hipótesis nula y alternativa para responder la pregunta de investigación.
- (b) A qué conclusión se puede llegar respecto a las varianzas poblacionales. Justifique su respuesta.
- (c) ¿Cuál cree que fue la conclusión del analista? Justifique su respuesta.

FORMULARIO

- Decimos que la variable aleatoria X tiene distribución $N(\mu, \sigma^2)$, con $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2 > 0$, si su función de densidad de probabilidades es dada por:

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- El límite inferior de la varianza de los estimadores del parámetro θ es dado por:

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \geq \frac{[\tau'(\theta)]^2}{\mathbb{E} \left[\left(\frac{d}{d\theta} \ln f_{\mathbf{X}}(\theta; \mathbf{X}) \right)^2 \right]},$$

en que $\tau(\theta) = \mathbb{E}[\hat{\theta}]$, $\tau'(\theta) = \frac{d}{d\theta} \tau(\theta)$ y $f_{\mathbf{X}}(\theta; \mathbf{x})$ es la función de densidad conjunta de la variable aleatoria $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^\top$. Bajo algunas condiciones de regularidad (soporte de $f(x; \theta)$ no depende de θ y posibilidad de cambiar de orden las operaciones de derivación e integración sobre la distribución de la v.a. X), es posible mostrar que:

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{d}{d\theta} \ln f_{\mathbf{X}}(\theta; \mathbf{X}) \right)^2 \right] = -\mathbb{E} \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \ln f_{\mathbf{X}}(\theta; \mathbf{X}) \right].$$

- La aproximación de los grados de libertad para una distribución t en algún caso específico está dada por:

$$\nu = \frac{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}}.$$