RÚBRICA DE LA SEGUNDA EVALUACIÓN DE CÁLCULO VECTORIAL

PAO1 2023-2024

1. (10 p.) Sea $T(x, y) = xy$ una función de temperatura definida en todo el plano $\mathbb{R}^2$. Con el método de Lagrange, determine sus valores extremos en la curva elíptica $9x^2 + y^2 = 4$. Justifique su respuesta.

   - Reconoce que la función objetivo es T.........0.5 p.
   - Plantea función restricción $g(x, y) = 9x^2 + y^2 - 4$.................0.5 p.
   - Plantea condición necesaria del teorema de Lagrange..............1 p.

   $$\nabla T(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

   - Reemplaza datos y obtiene sistema de ecuaciones....................1 p.

   $$\begin{aligned} &y = 18\lambda x \\ &x = 2\lambda y \\ &9x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{aligned}$$

   - Aplica un procedimiento adecuado para resolver el sistema, que conduzca a obtener los puntos críticos.......2 p.
   - Obtiene coordenadas correctas de los puntos críticos............2 p.

   $$P_1\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{2}\right),\ P_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{2}\right),\ P_3\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, -\sqrt{2}\right),\ P_4\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, -\sqrt{2}\right)$$

   - Evalúa puntos en T y obtiene sus valores extremos...............2 p.

   $$T(P_1) = T(P_4) = \frac{2}{3}, \quad T(P_2) = T(P_3) = -\frac{2}{3}$$

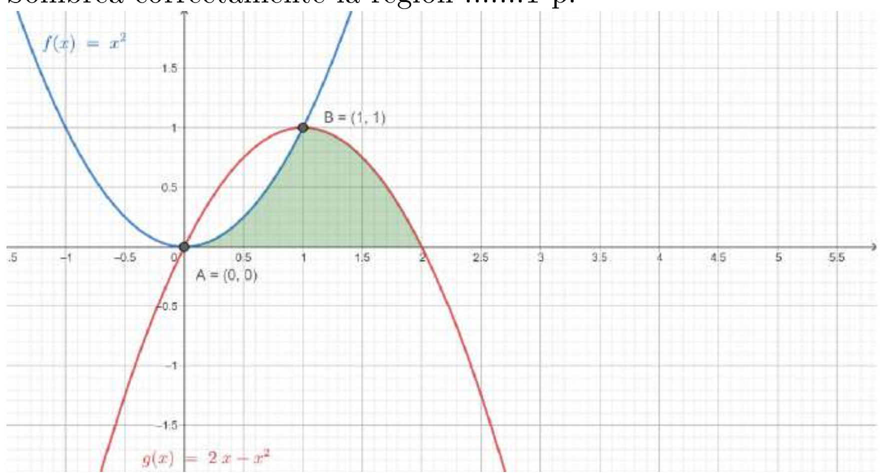
   - Justifica que estos son los valores máximo y mínimo de T en la curva elíptica porque dicha curva es un conjunto compacto y T es continua......1 p.

2. (10 p.) Sea f una función continua en $\mathbb{R}^2$. Considere la integral doble

$$I = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{1+\sqrt{1-y}} f(x,y)dx\,dy.$$

a) Dibuje la región de integración. Especifique ejes coordenados, vértices de la región y sombree dicha región.

- Dibuja parábolas........................1 p.
- Determina puntos de intersección entre las parábolas........1 p.
- Identifica vértice $(2,0)$................1 p.
- Sombrea correctamente la región ....1 p.



b) Cambie el orden de integración de I.

- Reconoce que el cambio de orden de integración requiere dos integrales dobles...........1 p.
- Escribe correctamente los límites de cada integral con el nuevo orden (2p. c/u)........4 p.
- Expresa I como la suma de las dos integrales dobles planteadas.....1 p.

$$I = \int_0^1 \int_0^{x^2} f(x,y)dy\,dx + \int_1^2 \int_0^{2x-x^2} f(x,y)dy\,dx$$

3. (10 p.) Dado el campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 2y^2\mathbf{k}$, definido en $\mathbb{R}^3$, y C la curva intersección de la semiesfera $z = \sqrt{6 - x^2 - y^2}$ con el plano $z = 2$, orientada positivamente (en sentido antihorario), determine:

   a) El trabajo que desarrolla el campo $\mathbf{F}$ al mover una partícula a lo largo de la trayectoria C.

   - Hace un bosquejo gráfico de las superficies e identifica que la curva C intersección entre ellas es la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$ con $z = 2$.....1 p.
   - Parametriza correctamente C............................1 p.

$$t \mapsto r(t) = (\sqrt{2}cos(t), \sqrt{2}sen(t), 2), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

   - Plantea integral de trabajo usando los datos de $\mathbf{F}$ y $\mathbf{r}$...............1 p.

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int_0^{2\pi} (2, 3\sqrt{2}cos(t), 4sen^2(t)) \cdot (-\sqrt{2}sen(t), \sqrt{2}cos(t), 0)dt.$$

   - Resuelve la integral y especifica la respuesta correcta: 6π...........2 p.

   b) Si se cumplen las hipótesis del teorema de Stokes. De ser así, aplique este teorema para confirmar el valor obtenido en *a*).

   - Plantea expresión general del teorema de Stokes.......0.5 p.

$$\int_C \mathbf{F} \cdot = \int_S \int rot\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} ds$$

   - Calcula $rot\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = (4y, 1, 3)$..........0.5 p.
   - Argumenta que se cumplen todas las hipótesis del teorema, tanto con la porción de la semiesfera o del plano, ambos acotados por la curva C y teniendo como región de proyección R el círculo $x^2 + y^2 \leq 2$...........1 p.
   - Aplica la definición de integral de flujo usando $rot\mathbf{F}$ y la superficie a elección, por ejemplo el plano $z = 2$...........1 p.

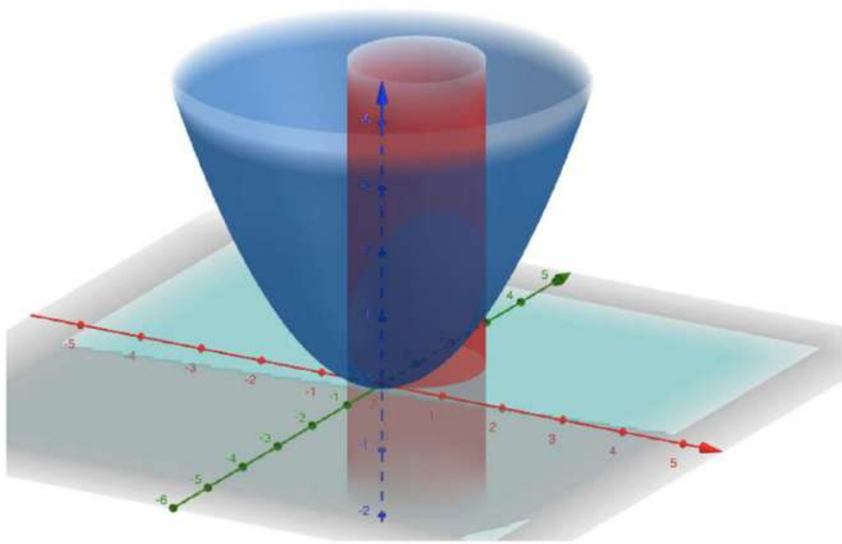
$$\int_S \int rot\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} ds = \int_R \int (4y, 1, 3) \cdot (0, 0, 1) dA$$

   - Calcula correctamente la integral doble en R y muestra que se obtiene la misma respuesta que en *a*)......................2 p.

4. (10 p.) Empleando una integral triple y el sistema de coordenadas cilíndricas, calcule el volumen del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 2y$, el paraboloide $x^2 + y^2 = 2z$ y el plano XY.

Nota: $\displaystyle\int sen^4(u)du = \frac{3}{8}u - \frac{1}{4}sen(2u) + \frac{1}{32}sen(4u) + K.$

- Grafica correctamente el cilindro circular recto $x^2 + (y-1)^2 = 1$..........1 p.
- Grafica el paraboloide y bosqueja intersección con el cilindro................1 p.
- Bosqueja sólido acotado por las tres superficies (en perspectiva)...........1 p.
- Dibuja proyección del sólido en XY, círculo de radio 1 centrado en $(0,1)$............................1 p.



- Transforma ecuación de la circunferencia y del paraboloide al sistema polar y cilíndrico, respectivamente...........1 p.

$$x^2 + (y-1)^2 = 1 \Rightarrow r = 2sen(\theta), \quad 0 \le \theta \le \pi$$
$$x^2 + y^2 = 2z \Rightarrow r^2 = 2z$$

- Plantea la integral triple correctamente en coordenadas cilíndricas.........2 p.

$$V = \int_0^{\pi} \int_0^{2sen(\theta)} \int_0^{\frac{r^2}{2}} r\,dz\,dr\,d\theta$$

- Resuelve la integral y especifica la respuesta correcta...............3 p.

$$v = \frac{3}{4}\pi.$$

5. (10 p.) Sean $a, b > 0$. Sea S la superficie del plano $bx + az = ab$ ubicada en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$. Exprese el área de S en términos de las constantes a y b.

- Grafica correctamente el plano identificando puntos de intersección con los ejes coordenados (excepto con el eje Y)...........1 p.

$$Eje\ X : (a, 0, 0) \quad Eje\ Z : (0, 0, b)$$

- Grafica el cilindro circular y bosqueja la curva intersección con el plano $bx + az = ab$...................1 p.
- Identifica superficie del plano acotada por el cilindro (en perspectiva)...1 p.
- Dibuja la proyección R de la superficie en XY, círculo de radio a centrado en $(0, 0)$..........................1 p.
- Plantea la integral doble general para calcular el área de S.........2 p.

$$A_S = \int_S \int dS = \int_R \int \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dA$$

- Calcula $z_x = -\dfrac{b}{a}$ y $z_y = 0$................................1 p.
- Resuelve la integral y especifica la respuesta correcta................3 p.

$$A_S = a\sqrt{a^2 + b^2}\,\pi.$$