

Año:	2023	Periodo:	I PAO
Materia:	Ecuaciones Diferenciales y Álgebra Lineal	Profesores:	Jesús Aponte, Eduardo Rivadeneira, Carlos Martín
Evaluación:	Segunda	Fecha:	28 de agosto de 2023

### COMPROMISO DE HONOR

Yo, \_\_\_\_\_, al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que solo puedo un lápiz o esferográfico y borrador, que sólo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen y que cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído debo apagarlo y depositarlo donde se me indique, junto con cualquier otro material que se encuentre acompañándome. No debo, además, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a los que se entreguen en esta evaluación. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.

**Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptado la declaración anterior.**

“Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar”.

Firma: \_\_\_\_\_ Número de matrícula: \_\_\_\_\_ Paralelo: \_\_\_\_\_

1. (10 puntos) Sea  $T: \mathbb{M}_{3,3} \rightarrow \mathbb{M}_{2,2}$  la transformación lineal dada por

$$T \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a_{11} - a_{12} & a_{13} + 2a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Halle una base para el núcleo de  $T$ . Luego calcule la dimensión de la imagen de  $T$ .

#### Solución:

Una matriz  $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$  está en  $N(T)$  si, y solamente si,  $\begin{bmatrix} 2a_{11} - a_{12} & a_{13} + 2a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Comparando coeficientes, nos queda el sistema

$$\begin{aligned} 2a_{11} - a_{12} &= 0 \\ a_{13} + 2a_{12} &= 0, \end{aligned}$$

de donde deducimos que  $a_{11} = \frac{1}{2}a_{12}$  y  $a_{13} = -2a_{12}$ . Por tanto, el núcleo de  $T$  está constituido por matrices de la forma

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}a_{12} & a_{12} & -2a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

De aquí es fácil construir la siguiente base para el núcleo de  $T$ :

$$\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

En consecuencia la dimensión del núcleo de  $T$  es igual a 7. Como  $\dim \mathbb{M}_{3,3} = 9$ , por el teorema del núcleo y la imagen se sigue que la dimensión de la imagen es 2.

**Rúbrica:**

Describe correctamente el núcleo de $T$	1-3 puntos
Halla una base para el núcleo de $T$ y calcula su dimensión	1-4 puntos
Calcula la dimensión de la imagen de $T$	1-3 puntos

2. (10 puntos) Defina  $T: \mathbb{M}_{2,2} \rightarrow \mathbb{P}_2$  por

$$T \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = (a+b) + (2d)x + bx^2.$$

Sea  $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$  y  $\mathcal{G} = \{1, x, (1+x)^2\}$ . Calcule la matriz de  $T$  respecto a las bases  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{G}$ .

**Solución:** Primero determinemos cómo se escribe un polinomio arbitrario  $a+bx+cx^2$  como combinación lineal de los elementos de  $\mathcal{G}$ . Se tiene, para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} a + bx + cx^2 &= c_1 + c_2x + c_3(1+x)^2 \implies a + bx + cx^2 = c_1 + c_2x + c_3 + 2c_3x + c_3x^2 \\ &\implies a + bx + cx^2 = (c_1 + c_3) + (c_2 + 2c_3)x + c_3x^2 \\ &\implies c_3 = c, \quad c_2 = b - 2c, \quad c_1 = a - c. \end{aligned}$$

Por tanto, el vector de coordenadas de  $a + bx + cx^2$  es:

$$[a + bx + cx^2]_{\mathcal{G}} = \begin{bmatrix} a-c \\ b-2c \\ c \end{bmatrix}.$$

Se tiene entonces

$$\begin{aligned} \left[ T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right]_{\mathcal{G}} &= [1]_{\mathcal{G}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \left[ T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right]_{\mathcal{G}} &= [1+x^2]_{\mathcal{G}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \left[ T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right]_{\mathcal{G}} &= [0]_{\mathcal{G}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \left[ T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right]_{\mathcal{G}} &= [2x]_{\mathcal{G}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz buscada es:

$$[T]_{\mathcal{G}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Rúbrica:**

Escribe cada uno de las imágenes de los vectores de $\mathcal{B}$ como combinación lineal de los vectores de $\mathcal{G}$	1-6 puntos
Halla la matriz de $T$ respecto a las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{G}$	1-4 puntos

3. (10 puntos) Halle la solución general del siguiente sistema de EDO:

$$\begin{aligned}y_1' &= y_1, \\y_2' &= y_1 + 2y_2, \\y_3' &= y_1 - y_3.\end{aligned}$$

**Solución:** El sistema puede escribirse como

$$y' = Ay,$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico de esta matriz es  $p(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1)$ . Luego, los valores propios son  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = 2$  y  $\lambda = -1$ . Los espacios propios correspondientes son  $\mathbb{E}_{\lambda=1} = \text{gen}\{(2, -2, 1)\}$ ,  $\mathbb{E}_{\lambda=2} = \text{gen}\{(0, 1, 0)\}$  y  $\mathbb{E}_{\lambda=-1} = \text{gen}\{(0, 0, 1)\}$ . Por lo tanto, la solución general del sistema viene dada por

$$y(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^t \\ -2c_1 e^t + c_2 e^{2t} \\ c_1 e^t + c_3 e^{-t} \end{bmatrix}.$$

**Rúbrica:**

Calcula correctamente el polinomio característico y los valores propios	1-3 punto
Calcula correctamente los espacios propios correspondientes	1-4 puntos
Halla la solución general	1-3 punto

4. (10 puntos) Resuelva el PVI

$$y'' - 4y = e^t + H(t-1)e^{t-1} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

**Solución:** Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación nos queda

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) - 4Y(s) &= \mathcal{L}\{e^t\} + \mathcal{L}\{H(t-1)e^{t-1}\} \\ (s^2 - 4)Y(s) &= \frac{1}{s-1} + \frac{e^{-s}}{s-1} \\ Y(s) &= \frac{1}{(s-1)(s-2)(s+2)} + \frac{e^{-s}}{(s-1)(s-2)(s+2)}. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\frac{1}{(s-1)(s-2)(s+2)} = -\frac{1}{3(s-1)} + \frac{1}{4(s-2)} + \frac{1}{12(s+2)},$$

por lo que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s-2)(s+2)}\right\} &= -\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)}\right\} + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)}\right\} + \frac{1}{12}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)}\right\} \\ &= -\frac{1}{3}e^t + \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{12}e^{-2t} \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{(s-1)(s-2)(s+2)}\right\} = -\frac{1}{3}H(t-1)e^{t-1} + \frac{1}{4}H(t-1)e^{2t-2} + \frac{1}{12}H(t-1)e^{-2t-2}$$

Por lo tanto, la solución al PVI es

$$y(t) = -\frac{1}{3}e^t + \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{12}e^{-2t} + H(t-1)\left(-\frac{1}{3}e^{t-1} + \frac{1}{4}e^{2t-2} + \frac{1}{12}e^{-2t-2}\right)$$

**Rúbrica:**

Aplica correctamente la transformada de Laplace	1 punto
Calcula correctamente $Y(s)$ y la descompone en fracciones parciales	1-5 puntos
Aplica correctamente la transformada inversa de Laplace	1-3 punto
Resuelve el PVI.	1 punto

5. (10 puntos) Un resorte elástico se empotra desde uno de sus extremos a una barra horizontal. Un bloque cuya masa es de 1 kg se cuelga desde el extremo que quedó libre del resorte y este se estira 5 m alcanzando una posición de equilibrio. Luego, el bloque se aleja un metro por debajo de la posición de equilibrio y parte hacia arriba con una velocidad inicial de 1 m/seg, haciendo que el sistema masa-resorte oscile. Sobre el sistema existe una fuerza de amortiguamiento con una constante de fricción de 2 Nseg/m. Suponga que, instantáneamente en el tiempo  $t = 3\pi$  segundos, el bloque es golpeado con un martillo verticalmente hacia abajo con una fuerza de 1 N. Encuentre la función que determina la posición del bloque en cualquier tiempo  $t$ . Use como constante de gravedad  $g = 10 \text{ m/seg}^2$ .

**Solución:** Se trata de un sistema de masa y resorte donde  $m = 1 \text{ kg}$  y  $b = 2 \text{ Nseg/m}$ . Para calcular  $k$  note que hacen falta 10N para desplazar la masa 5m. Por lo tanto,

$$k = \frac{10 \text{ N}}{5 \text{ m}} = 2 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Sea  $y(t)$  la distancia dirigida hacia el objeto medida desde la posición de equilibrio en el tiempo  $t$ . Tenemos que  $y(t)$  satisface el PVI

$$y'' + 2y' + 2y = \delta(t - 3\pi), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

Aplicamos transformadas de Laplace de ambos lados de la EDO para obtener:

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) - s + 1 + 2sY(s) - 2 + 2Y(s) &= e^{-3\pi s} \\ (s^2 + 2s + 2)Y(s) &= e^{-3\pi s} + s + 1 \\ Y(s) &= \frac{e^{-3\pi s}}{s^2 + 2s + 2} + \frac{s + 1}{s^2 + 2s + 2} \\ &= \frac{e^{-3\pi s}}{(s + 1)^2 + 1} + \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 1} \end{aligned}$$

Por tanto, la solución al PVI es

$$\begin{aligned} y(t) &= H(t - 3\pi)e^{-(t-3\pi)} \text{sen}(t - 3\pi) + e^{-t} \cos t \\ &= -H(t - \pi)e^{-(t-3\pi)} \text{sen} t + e^{-t} \cos t \end{aligned}$$

**Rúbrica:**

Modela correctamente el fenómeno	1-2 puntos
Aplica correctamente la transformada de Laplace	1-2 puntos
Calcula correctamente $Y(s)$ y la descompone en fracciones parciales	1-2 puntos
Aplica correctamente la transformada inversa de Laplace	1-2 puntos
Resuelve el PVI.	1-2 punto