espol Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas

Año:	2023	Periodo:	I PAO
Materia:	Ecuaciones Diferenciales y Álgebra Lineal	Profesores:	Jesús Aponte, Eduardo Rivadeneira, Carlos Martín
Evaluación:	Segunda	Fecha:	28 de agosto de 2023

COMPROMISO DE HONOR

Yo, ____, al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que solo puedo un lápiz o esferográfico y borrador, que sólo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen y que cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído debo apagarlo y depositarlo donde se me indique, junto con cualquier otro material que se encuentre acompañándome. No debo, además, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a los que se entreguen en esta evaluación. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.
Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptado la declaración anterior.

"Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".

Firma: ____________________ Número de matrícula: ________________ Paralelo: ________

1. (10 puntos) Sea $T : \mathbb{M}_{3\cdot 3} \to \mathbb{M}_{2\cdot 2}$ la transformación lineal dada por

$$T\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a_{11} - a_{12} & a_{13} + 2a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Halle una base para el núcleo de T. Luego calcule la dimensión de la imagen de T.

Solución:

Una matriz $\left[\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{smallmatrix}\right]$ está en $\mathrm{N}(T)$ si, y solamente si, $\left[\begin{smallmatrix} 2a_{11}-a_{12} & a_{13}+2a_{12} \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Comparando coeficientes, nos queda el sistema

$$\begin{aligned} 2a_{11} - a_{12} &= 0 \\ a_{13} + 2a_{12} &= 0, \end{aligned}$$

de donde deducimos que $a_{11} = \frac{1}{2}a_{12}$ y $a_{13} = -2a_{12}$. Por tanto, el núcleo de T está constituido por matrices de la forma

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}a_{12} & a_{12} & -2a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

De aquí es fácil construir la siguiente base para el núcleo de T:

$$\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

En consecuencia la dimensión del núcleo de T es igual a 7. Como $\dim \mathbb{M}_{3.3} = 9$, por el teorema del núcleo y la imagen se sigue que la dimensión de la imagen es 2.

Rúbrica:

Describe correctamente el núcleo de T	1–3 puntos
Halla una base para el núcleo de T y calcula su dimensión	1–4 puntos
Calcula la dimensión de la imagen de T	1–3 puntos

2. (10 puntos) Defina $T : \mathbb{M}_{2\cdot 2} \to \mathbb{P}_2$ por

$$T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = (a+b) + (2d)x + bx^2.$$

Sea $\mathscr{B} = \{\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]\}$ y $\mathscr{G} = \{1, x, (1+x)^2\}$. Calcule la matriz de T respecto a las bases $\mathscr{B}$ y $\mathscr{G}$.

Solución: Primero determinemos cómo se escribe un polinomio arbitrario $a+bx+cx^2$ como combinación lineal de los elementos de $\mathscr{G}$. Se tiene, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} a + bx + cx^2 = c_1 + c_2 x + c_3(1+x)^2 &\implies a + bx + cx^2 = c_1 + c_2x + c_3 + 2c_3x + c_3x^2 \\ &\implies a + bx + cx^2 = (c_1 + c_3) + (c_2 + 2c_3)x + c_3x^2 \\ &\implies c_3 = c,\ c_2 = b - 2c,\ c_1 = a - c. \end{aligned}$$

Por tanto, el vector de coordenadas de $a + bx + cx^2$ es:

$$[a + bx + cx^2]_{\mathscr{G}} = \begin{bmatrix} a - c \\ b - 2c \\ c \end{bmatrix}.$$

Se tiene entonces

$$\left[T\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right]_{\mathscr{G}} = [1]_{\mathscr{G}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \left[T\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right]_{\mathscr{G}} = [1 + x^2]_{\mathscr{G}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[T\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right]_{\mathscr{G}} = [0]_{\mathscr{G}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \left[T\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right]_{\mathscr{G}} = [2x]_{\mathscr{G}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, la matriz buscada es:

$$[T]_{\mathscr{G}}^{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rúbrica:

Escribe cada uno de las imágenes de los vectores de $\mathscr{B}$ como combinación lineal de los vectores de $\mathscr{G}$	1–6 puntos
Halla la matriz de T respecto a las bases $\mathscr{B}$ y $\mathscr{G}$	1–4 puntos

3. (10 puntos) Halle la solución general del siguiente sistema de EDO:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1, \\ y_2' &= y_1 + 2y_2, \\ y_3' &= y_1 - y_3. \end{aligned}$$

Solución: El sistema puede escribirse como

$$\mathrm{y}' = \mathrm{A}\mathrm{y},$$

donde

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico de esta matriz es $p(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1)$. Luego, los valores propios son $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ y $\lambda = -1$. Los espacios propios correspondientes son $\mathbb{E}_{\lambda=1} = \text{gen}\{(2,-2,1)\}$, $\mathbb{E}_{\lambda=2} = \text{gen}\{(0,1,0)\}$ y $\mathbb{E}_{\lambda=-1} = \text{gen}\{(0,0,1)\}$. Por lo tanto, la solución general del sistema viene dada por

$$\mathrm{y}(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^t \\ -2c_1 e^t + c_2 e^{2t} \\ c_1 e^t + c_3 e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Rúbrica:

Calcula correctamente el polinomio característico y los valores propios	1–3 punto
Calcula correctamente los espacios propios correspondientes	1–4 puntos
Halla la solución general	1–3 punto

4. (10 puntos) Resuelva el PVI

$$y'' - 4y = e^t + H(t-1)e^{t-1} \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$

Solución: Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación nos queda

$$\begin{aligned} s^2Y(s) - 4Y(s) &= \mathscr{L}\{e^t\} + \mathscr{L}\{H(t-1)e^{t-1}\} \\ (s^2-4)Y(s) &= \frac{1}{s-1} + \frac{e^{-s}}{s-1} \\ Y(s) &= \frac{1}{(s-1)(s-2)(s+2)} + \frac{e^{-s}}{(s-1)(s-2)(s+2)}. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\frac{1}{(s-1)(s-2)(s+2)} = -\frac{1}{3(s-1)} + \frac{1}{4(s-2)} + \frac{1}{12(s+2)},$$

por lo que

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s-2)(s+2)}\right\} &= -\frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)}\right\} + \frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)}\right\} + \frac{1}{12}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)}\right\} \\ &= -\frac{1}{3}e^t + \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{12}e^{-2t} \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{(s-1)(s-2)(s+2)}\right\} = -\frac{1}{3}H(t-1)e^{t-1} + \frac{1}{4}H(t-1)e^{2t-2} + \frac{1}{12}H(t-1)e^{-2t-2}$$

Por lo tanto, la solución al PVI es

$$y(t) = -\frac{1}{3}e^t + \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{12}e^{-2t} + H(t-1)\left(-\frac{1}{3}e^{t-1} + \frac{1}{4}e^{2t+2} + \frac{1}{12}e^{-2t-2}\right)$$

Rúbrica:

Aplica correctamente la transformada de Laplace	1 punto
Calcula correctamente $Y(s)$ y la descompone en fracciones parciales	1–5 puntos
Aplica correctamente la transformada inversa de Laplace	1–3 punto
Resuelve el PVI.	1 punto

5. (10 puntos) Un resorte elástico se empotra desde uno de sus extremos a una barra horizontal. Un bloque cuya masa es de 1 kg se cuelga desde el extremo que quedó libre del resorte y este se estira 5 m alcanzando una posición de equilibrio. Luego, el bloque se aleja un metro por debajo de la posición de equilibrio y parte hacia arriba con una velocidad inicial de 1 m/seg, haciendo que el sistema masa-resorte oscile. Sobre el sistema existe una fuerza de amortiguamiento con una constante de fricción de 2 Nseg/m. Suponga que, instantáneamente en el tiempo $t = 3\pi$ segundos, el bloque es golpeado con un martillo verticalmente hacia abajo con una fuerza de 1 N. Encuentre la función que determina la posición del bloque en cualquier tiempo t. Use como constante de gravedad $g = 10\,\mathrm{m/seg^2}$.

Solución: Se trata de un sistema de masa y resorte donde $m = 1\,\mathrm{kg}$ y $b = 2\,\mathrm{Nseg/m}$. Para calcular k note que hacen falta 10 N para desplazar la masa 5 m. Por lo tanto,

$$k = \frac{10\,\mathrm{N}}{5\,\mathrm{m}} = 2\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}.$$

Sea $y(t)$ la distancia dirigida hacia del objeto medida desde la posición de equilibrio en el tiempo t. Tenemos que $y(t)$ satisface el PVI

$$y'' + 2y' + 2y = \delta(t - 3\pi), \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$$

Aplicamos transformadas de Laplace de ambos lados de la EDO para obtener:

$$\begin{aligned} s^2Y(s) - s + 1 + 2sY(s) - 2 + 2Y(s) &= e^{-3\pi s} \\ (s^2 + 2s + 2)Y(s) &= e^{-3\pi s} + s + 1 \\ Y(s) &= \frac{e^{-3\pi s}}{s^2 + 2s + 2} + \frac{s + 1}{s^2 + 2s + 2} \\ &= \frac{e^{-3\pi s}}{(s + 1)^2 + 1} + \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 1} \end{aligned}$$

Por tanto, la solución al PVI es

$$\begin{aligned} y(t) &= H(t - 3\pi)e^{-(t-3\pi)} \operatorname{sen}(t - 3\pi) + e^{-t}\cos t \\ &= -H(t - \pi)e^{-(t-3\pi)} \operatorname{sen} t + e^{-t}\cos t \end{aligned}$$

Rúbrica:

Modela correctamente el fenómeno	1–2 puntos
Aplica correctamente la transformada de Laplace	1–2 puntos
Calcula correctamente $Y(s)$ y la descompone en fracciones parciales	1–2 puntos
Aplica correctamente la transformada inversa de Laplace	1–2 puntos
Resuelve el PVI.	1–2 punto