Facultad de
Ciencias Naturales y Matemáticas

AÑO: **2023**

MATERIA: **Álgebra lineal**

EVALUACIÓN: Tercera

TIEMPO DE DURACIÓN: **120 minutos**

PERIODO: **SEGUNDO TERMINO**

PROFESORES: Celleri Mario, Laveglia Franca, Martin Carlos, Martínez Margarita, Ramirez John, Rodrigues Lourival, Valdiviezo Janet.

FECHA: 14 de septiembre de 2023

COMPROMISO DE HONOR

Yo, ……….……………… al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que puedo usar un lápiz o esferográfico; que solo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen. No debo, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a las que se entreguen en esta evaluación y NO USARE calculadora. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.

Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptar la declaración anterior.

"Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".

FIRMA: ________________________________ ***NÚMERO DE MATRÍCULA:*** ________________ ***PARALELO:*** ____

1. ***(15 Puntos)***

Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 3z = 5 \\ 2x + 3y + (b^2 - 1)z = b + 3 \end{cases}$$

Determine los valores de b para que el sistema dado tenga:

a. Solución única.

b. Infinitas soluciones.

c. Ninguna solución.

2. ***(20 Puntos)***

Sea $T: \mathbb{M}_{2\times2}[\mathbb{R}] \to \mathbb{M}_{2\times2}[\mathbb{R}]$ una transformación lineal, tal que: $T(A) = AB - BA$, donde $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Encuentre el $Ker(T)$ y $\left(Ker(T)\right)^{\perp}$.

b) Determine si T es un isomorfismo.

3. (25 Puntos)

Sea el espacio vectorial $V = \mathbb{P}_1[\mathbb{R}]$ con las operaciones:

$$(a_1x + b_1) \oplus (a_2x + b_2) = (a_2 + b_2)x + (b_1 + b_2 + 1)$$

$$\alpha \in \mathbb{R} / \alpha \odot (a_1x + b_1) = (\alpha a_1)x + (\alpha b_1 - 1 + \alpha)$$

Determine si $B = \{x + 1, x - 1\}$ es base de V.

4. (22 Puntos)

Utilizando diagonalización ortogonal, identifique el lugar geométrico que representa la ecuación cuadrática: $x^2 + y^2 + 2xy + 2x - 2 = 0$.

Escriba la ecuación de la cónica en forma canónica.

5. ***(18 Puntos)***

Considere el siguiente teorema:

Sea V un espacio vectorial sobre un campo K y sea D un subconjunto de V linealmente independiente. Si $v_0 \in V$ es un elemento tal que $v_0 \notin gen(D)$, entonces el conjunto $D \cup \{v_0\}$ es un conjunto linealmente independiente.

A continuación, se presenta un conjunto de 8 pasos, que ordenados pertinentemente 6 representan la demostración de este teorema. En cada círculo en blanco indique el orden que corresponda al paso adjunto para que la demostración sea expresada de manera correcta.

Orden	**Pasos**
◯	Suponga que el conjunto $D \cup \{v_0\}$ es linealmente independiente.
◯	En consecuencia $D \cup \{v_0\}$ es un conjunto linealmente independiente.
◯	Lo cual contradice que $v_0 \notin gen(D)$.
◯	α_0 debe ser distinto de cero, de otro modo D sería linealmente dependiente, lo cual sería una contradicción.
◯	Entonces existen elementos $v_1, v_2, \dots, v_n \in D$ y escalares $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ no todos iguales a cero, tales que $\alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_V$.
◯	Así $v_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0} v_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_0} v_2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_0} v_3 + \cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha_0} v_n$,
◯	En consecuencia $D \cup \{v_0\}$ genera al espacio vectorial V.
◯	Suponga que el conjunto $D \cup \{v_0\}$ es linealmente dependiente.