Facultad de
Ciencias Naturales y Matemáticas

Año:	2023	Periodo:	II PAO
Materia:	Ecuaciones Diferenciales y Álgebra Lineal	Profesores:	Jesús Aponte, Eduardo Rivadeneira, Carlos Martín
Evaluación:	Primera	Fecha:	20 de noviembre de 2023

COMPROMISO DE HONOR

Yo, ______________________________, al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que solo puedo un lápiz o esferográfico y borrador, que sólo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen y que cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído debo apagarlo y depositarlo donde se me indique, junto con cualquier otro material que se encuentre acompañándome. No debo, además, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a los que se entreguen en esta evaluación. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.
Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptado la declaración anterior.

"Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".

Firma: ____________________ Número de matrícula: ____________________ Paralelo: __________

1. (10 puntos) Encuentre la solución general de la EDO de primer orden

$$(t^2-1)y'+(t^2+1)y=e^{-t}, \quad t>0.$$

Solución: Si reescribimos la EDO en la forma

$$y'+\frac{t^2+1}{t^2-1}y=\frac{e^{-t}}{t^2-1},$$

vemos que se trata de una EDO lineal de primer orden. Sea

$$\begin{aligned}\mu(t) &= e^{\int \frac{t^2+1}{t^2-1}\,dt}\\ &= e^{\int dt+\int \frac{dt}{t-1}-\int \frac{dt}{t+1}}\\ &= e^{t+\ln(t-1)-\ln(t+1)}.\\ &= e^t\,\frac{t-1}{t+1}\end{aligned}$$

El método del factor integrante, nos da que la solución general de la EDO es

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \frac{c}{\mu(t)} + \frac{1}{\mu(t)} \int \mu(t) \frac{e^{-t}}{t^2-1}\, dt \\
&= \frac{ce^{-t}(t+1)}{t-1} + \frac{e^{-t}(t+1)}{t-1} \int \frac{e^{t}(t-1)}{t+1} \frac{e^{-t}}{(t+1)(t-1)}\, dt \\
&= \frac{ce^{-t}(t+1)}{t-1} + \frac{e^{-t}(t+1)}{t-1} \int \frac{1}{(t+1)^2}\, dt \\
&= \frac{ce^{-t}(t+1)}{t-1} - \frac{e^{-t}(t+1)}{t-1} \frac{1}{t+1} \\
&= \frac{ce^{-t}(t+1)}{t-1} - \frac{e^{-t}}{t-1}
\end{aligned}
$$

Rúbrica:

Identifica que la EDO es lineal de primer orden	1 punto.
Calcula correctamente el factor integrante (o solución homogénea).	1–3 puntos
Multiplica la EDO por el factor integrante y despeja $y(t)$ (o calcula la solución particular por variación de parámetros).	1–4 puntos
Halla la solución general.	2 puntos

2. (10 puntos) Un equipo de biólogos descubrió un tipo especial de población bacteriana que, al invadir un cultivo de $N\,\mathrm{cm}^2$, se propaga a una tasa que es proporcional al producto del número de cm^2 afectados por el número de cm^2 no afectados por la bacteria en un tiempo t. En uno de los experimentos llevados a cabo para estudiar esta bacteria se usó un cultivo de $15\,\mathrm{cm}^2$. Inicialmente, la población bacteriana ocupó $2\,\mathrm{cm}^2$. Al día siguiente, la bacteria había afectado un total de $5\,\mathrm{cm}^2$. Determine el tiempo que le tomó a la bacteria afectar el 80 % de este cultivo.

Solución: Sea $C(t)$ el área, en cm^2, afectadas por la población bacteriana en el tiempo t, en dás. Según el modelo, $C(t)$ satisface el PVI

$$C' = kC(N-C),\ k>0, \quad C(0)=C_0.$$

Notemos que

$$kC(N-C) = kN\left(1-\frac{C}{N}\right),$$

por lo que la el modelo es solución de una ecuación logísta con tasa inicial de crecimiento kN y capacidad de carga N. Luego,

$$C(t) = \frac{N}{1+\left(\frac{N}{C_0}-1\right)e^{-kNt}}\ \mathrm{cm}^2.$$

En el experimento realizado, $N=15$, $C_0 = 2\,\mathrm{cm}^2$, por lo que

$$C(t) = \frac{15}{1+\left(\frac{15}{2}-1\right)e^{-15kt}}\ \mathrm{cm}^2.$$

Para hallar k, note que $C(1) = 5\,\mathrm{cm}^2$, de manera que

$$\begin{aligned} 5 = \frac{15}{1+\left(\frac{15}{2}-1\right)e^{-15k}} &\implies \left(\frac{15}{2}-1\right)e^{-15k} = 2 \\ &\implies e^{-15k} = \frac{4}{13} \\ &\implies k = \frac{\ln(13/4)}{15}. \end{aligned}$$

El problema nos pide hallar el tiempo t para el cual $C(t) = 0{,}8\cdot 15\,\mathrm{cm}^2$. Se tiene que

$$\begin{aligned} 0{,}8\cdot 15 = \frac{15}{1+\left(\frac{15}{2}-1\right)e^{-15\frac{\ln(13/4)}{15}t}} &\implies 0{,}8 = \frac{1}{1+\left(\frac{15}{2}-1\right)e^{-15\frac{\ln(13/4)}{15}t}} \\ &\implies 8\left(1+\left(\frac{15}{2}-1\right)e^{\ln(4/13)t}\right) = 10 \\ &\implies \frac{13}{2}e^{\ln(4/13)t} = \frac{1}{4} \\ &\implies e^{\ln(4/13)t} = \frac{1}{2\cdot 13} \\ &\implies t = \frac{\ln 2 + \ln 13}{\ln 13 - 2\ln 2}\ \text{días} \\ &\implies t \approx 2{,}76\,\text{días}. \end{aligned}$$

Esto es, a la bacteria le tomó aproximadamente 2 días, 18 horas y 24 minutos para afectar el 80 % del cultivo.

Rúbrica:

Plantea correctamente el PVI que modela el fenómeno.	1 punto
Resuelve la EDO correctamente.	1–3 puntos
Usa la condición $C(1) = 5\,\mathrm{cm}^2$ para calcular k.	1–3 puntos
Determina el tiempo que le tomó a la bacteria afectar el 80 % de este cultivo.	1–3 puntos

3. En el espacio vectorial $\mathbb{M}_{2\cdot 2}$, de matrices 2×2, considere el siguiente conjunto de vectores:

$$S=\left\{\begin{bmatrix}1&-1\\-3&-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&1\\6&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-7&2\\1&9\end{bmatrix}\right\}$$

(a) (5 puntos) ¿Qué condición (o condiciones) debe satisfacer una matriz $\left[\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right]$ para que esté en gen S? Determine si $\left[\begin{smallmatrix}1&0\\1&-1\end{smallmatrix}\right]\in\operatorname{gen}S$.

Solución: Una matriz $\left[\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right]$ está en gen S si y solo si existen números reales c_1,c_2,c_3 tales que

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}1&-1\\-3&-2\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2&1\\6&-1\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}-7&2\\1&9\end{bmatrix}.$$

Realizando las operaciones en el lado derecho de la igualdad y comparando las entradas de las matrices, vemos que $\left[\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right]$ está en gen S si y solo si (a,b,c,d) es solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix}1&2&-7\\-1&1&2\\-3&6&1\\-2&-1&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}$$

Hagamos reducción por filas sobre la matriz ampliada de este sistema:

$$\begin{bmatrix}1&2&-7&:&a\\-1&1&2&:&b\\-3&6&1&:&c\\-2&-1&9&:&d\end{bmatrix}\xrightarrow[f_4\to f_4+2f_1]{\substack{f_2\to f_2+f_1\\ f_3\to f_3+3f_1}}\begin{bmatrix}1&2&-7&:&a\\0&3&-5&:&a+b\\0&12&-20&:&3a+c\\0&3&-5&:&2a+d\end{bmatrix}\tag{1}$$

$$\xrightarrow[f_4\to f_4-f_2]{f_3\to f_3-4f_2}\begin{bmatrix}1&2&-7&:&a\\0&3&-5&:&a+b\\0&0&0&:&-a-4b+c\\0&0&0&:&a-b+d\end{bmatrix}.\tag{2}$$

De aquí vemos que

$$\operatorname{gen}S=\left\{\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\in\mathbb{M}_{2\cdot 2}:\begin{matrix}-a-4b+c=0\\a-b+d=0\end{matrix}\right\}.$$

Si $a=1$, $b=0$, $c=1$ y $d=-1$, vemos que $-a-4b+c=-1-4\cdot 0+1=0$ y $a-b+d=1-0-1=0$, por lo que $\left[\begin{smallmatrix}1&0\\1&-1\end{smallmatrix}\right]\in\operatorname{gen}S$.

Rúbrica:

Plantea el sistema de ecuaciones que permite hallar las condiciones de la matriz $\left[\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right]$ para estar en gen S.	1–2 puntos
Halla las condiciones que debe cumplir $\left[\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right]$ para estar en gen S.	1–2 puntos
Determina si $\left[\begin{smallmatrix}1&0\\1&-1\end{smallmatrix}\right]$ está en gen S.	1 punto

(b) (5 puntos) ¿Es S un connjunto linealmente independiente?

Solución: Sean c_1,c_2,c_3 números reales tales que

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}1&-1\\-3&-2\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2&1\\6&-1\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}-7&2\\1&9\end{bmatrix}.$$

Los cálculos de la parte (a) demuestran que c_1, c_2, c_3, c_4 satisfacen el sistema

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 - 7c_3 &= 0 \\ 3c_2 - 5c_3 &= 0. \end{aligned}$$

Claramente, c_3 es una variable libre por lo que tal sistema posee infinitas soluciones soluciones. Esto demuestra que S no es un conjunto l.i.

Rúbrica:

Plantea el sistema de ecuaciones que permite determinar si S es linealmente independiente.	1–2 puntos
Concluye que existen combinaciones lineales iguales $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ que son no triviales, y por tanto S es linealmente independiente	1–3 puntos

4. Sea $\mathbb{W} = \{p(x) = a + bx + cx^2 \in \mathbb{P}_2 \colon p(3) + p(-1) = p'(2)\}$.

(a) (4 puntos) Demuestre que $\mathbb{W}$ es un espacio vectorial de $\mathbb{P}_2$

Solución: Claramente $0(3) + 0(-1) = 0'(2)$, por lo que el polinomio nulo pertenece a $\mathbb{W}$. Si $p(x)$ y $q(x)$ pertenecen a $\mathbb{W}$, entonces

$$\begin{aligned}(p+q)(3)+(p+q)(-1) &= p(3)+q(3)+p(-1)+q(-1) = p(3)+p(-1)+q(3)+q(-1)\\ &= p'(2)+q'(2) = (p+q)'(2),\end{aligned}$$

por lo que $(p+q)(x) \in \mathbb{W}$.
Similarmente, si c es un número real, entonces

$$(cp)(3)+(cp)(-1) = cp(3)+cp(-1) = c(p(3)+p(-1)) = cp'(2) = (cp)'(2),$$

de donde $cp \in \mathbb{W}$. Esto demuestra que $\mathbb{W}$ es un espacio vectorial de $\mathbb{P}_2$.
Rúbrica:

Verifica que el polinomio nulo está en $\mathbb{W}$.	1 punto
Verifica que si $p(x)$ y $q(x)$ están en $\mathbb{W}$, entonces $(p+q)(x)$ está en $\mathbb{W}$.	1 punto
Verifica que si $p(x)$ está en $\mathbb{W}$ y c es un número real, entonces $(cp)(x)$ está en $\mathbb{W}$.	1 punto
Concluye que $\mathbb{W}$ es un subespacio de $\mathbb{P}_2$.	1 punto

(b) (4 puntos) Encuentre una base de $\mathbb{W}$ y determine su dimensión.

Solución: Sea $p(x) = a + bx + cx^2$ un polinomio en $\mathbb{W}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}p(3)+p(-1) = p'(2) &\iff a+3b+9c+a-b+c = b+4c\\ &\iff 2a+2b+10c = b+4c\\ &\iff 2a+b+6c = 0\\ &\iff a = -\frac{1}{2}b-3c.\end{aligned}$$

De aquí, obtenemos que

$$\begin{aligned}p(x) &= -\frac{1}{2}b-3c+bx+cx^2\\ &= b\left(-\frac{1}{2}+x\right)+c(-3+x^2).\end{aligned}$$

Por tanto, $\{-\frac{1}{2}+x, -3+x^2\}$ genera $\mathbb{W}$. De hecho, tal conjunto es una base en vista que son dos polinomios de distintos grados y por tanto uno no puede ser múltiplo del otro. Así, $\dim \mathbb{W} = 2$.
Rúbrica:

Determina las condiciones sobre los coeficientes de un polinomio arbitrario de grado 2 para estar en $\mathbb{W}$.	1–2 puntos
Usa tales condiciona para hallar una base y en consecuencia la dimensión de $\mathbb{W}$.	1–2 puntos

(c) (2 puntos) ¿Pertenece $1-2x+x^2$ a $\mathbb{W}$?

Solución: Se tiene que

$$-\frac{1}{2}(-2)-3(1)=-1\neq 1,$$

por lo que $1-2x+x^2$ no cumple las condiciones obtenidas en la parte (b) para estar en $\mathbb{W}$. Otra forma de verlo, es directamente a través de la especificación de $\mathbb{W}$:

$$1-2(3)+(3)^2+1-2(-1)+(-1)^2=1-6+9+1+2+1=8,$$

en cuanto que

$$\left.\frac{d}{dx}\right|_{x=2}(1-2x+x^2)=-2+2(-2)=-6.$$

Rúbrica:

Demuestra que $1-2x+x^2\notin\mathbb{W}$.	1 punto

5. Resuelva solo uno de los siguientes problemas:

(a) (10 puntos) Considere la EDO de segundo orden

$$ty'' + 2y' + ty = 0, \quad t > 0.$$

Se conoce que $y_1(t) = \frac{\cos t}{t}$ es solución de esta EDO. Halle una segunda solución $y_2(t)$, de modo que $\{y_1(t), y_2(t)\}$ sea una base para el espacio vectorial de soluciones de la EDO. *Atención*: No basta hallar la solución $y_2(t)$ únicamente, también debe demostrar $\{y_1(t), y_2(t)\}$ es una base en el interval $(0, +\infty)$.

Solución: Reescribimos la EDO en la forma

$$y'' + \frac{2}{t}y' + y = 0, \quad t > 0.$$

Una segunda solución es dada por $y_2(t) = v(t)y_1(t)$, donde

$$\begin{aligned} v(t) &= \int \frac{1}{y_1(t)^2} e^{-\int p(t)\,dt}\,dt \\ &= \int \frac{t^2}{\cos^2 t} e^{-\int \frac{2}{t}\,dt}\,dt \\ &= \int \frac{t^2}{\cos^2 t}\frac{1}{t^2}\,dt \\ &= \int \sec^2 t\,dt \\ &= \tan t \end{aligned}$$

Por lo tanto, la segunda solución buscada es

$$y_2(t) = \tan t\,\frac{\cos t}{t} = \frac{\operatorname{sen} t}{t}.$$

Para demostrar que $\{y_1(t), y_2(t)\}$ es una base, basta demostrar que son l.i., pues ya sabemos que dicho espacio tiene dimensión 2; pero esto es evidente porque una no es múltiplo de la otra.

Rúbrica:

Usa el método de reducción de orden para hallar una segunda solución	1–2 puntos
Halla la segunda solución	1–6 puntos
Demuestra que $\{y_1(t), y_2(t)\}$ es una base para el espacio de soluciones de la EDO	1–2 puntos

(b) (10 puntos) Un circuito en serie tiene un capacitor de 10^{-5} faradios, un resistor de 3×10^2 ohmios, y un inductor de 0,2 henrios. La carga inicial en el capacitor es 10^{-6} culombios y no hay corriente inicial. Halle la carga $Q(t)$ en el capacitor en cualquier tiempo t.

Solución: La carga en el capacitador en cualquier tiempo t satisface el PVI

$$0,2\ddot{Q} + 3 \times 10^2 \cdot Q + \frac{1}{10^{-5}}Q = 0, \quad Q(0) = 10^{-6}\,\mathrm{C},\ \dot{Q}(0) = 0\,\mathrm{A}.$$

La ecuación característica de este oscilador es

$$0,2r^2 + 3 \times 10^2 r + 10^5 = 0.$$

Las raíces características vienen dadas por

$$\begin{aligned} r &= \frac{-3 \cdot 10^2 \pm \sqrt{9 \cdot 10^4 - 4(2 \cdot 10^{-1})10^5}}{2(2 \cdot 10^{-1})} \\ &= \frac{-3 \cdot 10^2 \pm 10^2}{4 \cdot 10^{-1}} \\ &= \frac{(-3 \pm 1) \cdot 10^3}{4}. \end{aligned}$$

Se tienen entonces dos raíces características: $r_1 = -10^3$ y $r_2 = -\frac{1}{2}10^3$. Por tanto, la solución general de la EDO es

$$Q(t) = c_1 e^{-t\,10^3} + c_2 e^{-1/2t\,10^3}.$$

La condición inicial $Q(0) = 10^{-6}\,\mathrm{C}$, implica que

$$10^{-6} = Q(0) = c_1 + c_2.$$

También,

$$0 = \dot{Q}(0) = -10^3 c_1 - \frac{1}{2}10^3 c_2.$$

Luego, $c_1 = -10^{-6}$ y $c_2 = 2 \cdot 10^{-6}$. Por lo tanto, la carga en el capacitador en el tiempo t es

$$Q(t) = -10^{-6} e^{-10^3 t} + 2 \cdot 10^{-6} e^{-1/2 \cdot 10^3 t}\,\mathrm{C}.$$

Rúbrica:

Establece el PVI que modela el fenómeno	1–2 puntos
Calcula las raíces características	1–2 puntos
Halla la solución general	1–4 puntos
Resuelve el PVI	1–2 puntos