Facultad de
Ciencias Naturales y Matemáticas

AÑO: **2023** | PERIODO: **SEGUNDO TERMINO**

MATERIA: **Álgebra lineal** | PROFESORES: Celleri Mario, Laveglia Franca, Martínez Margarita, Ramirez John, Valdiviezo Janet, Vielma Jorge.

EVALUACIÓN: Primera

TIEMPO DE DURACIÓN: **120 minutos** | FECHA: 23 de noviembre de 2023

**COMPROMISO DE HONOR**

Yo, …………………………………………………………………………………………………………………..…………… al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que puedo usar un lápiz o esferográfico; que solo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen. No debo, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a las que se entreguen en esta evaluación y NO USARE calculadora. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.

**Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptar la declaración anterior.**

*"Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".*

***FIRMA:*** ________________________________ ***NÚMERO DE MATRÍCULA:*** __________________ ***PARALELO:*** _____

***1. (21 Puntos)***

Califique justificadamente cada una de las siguientes proposiciones como siempre verdadera **(S)**, a veces verdadera **(A)** o nunca verdadera **(N).**

a. Sean $V$ y $W$ dos espacios vectoriales sobre el campo $K$, si $W$ es un subconjunto de $V$, entonces $W$ es un subespacio de $V$.

b. Sean $H$ y $W$ dos subespacios de un espacio vectorial de dimensión $8$, si la dimensión de $H$ es 3 y la dimensión de $W$ es 6 entonces la dimensión de $H \cap W$ es $5$

c. Si la matriz $C$ es una matriz de cambio de base, entonces $det\ (C\ ) \ = 0$

**2. *(20 Puntos)***

Sea $V$ el espacio vectorial real definido por:

$$V = \left\{ A \in M_{2\times 2} \ : \ A = \begin{pmatrix} a & 10 \\ 30 & b \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Y con operaciones definidas de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a & 10 \\ 30 & b \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} c & 10 \\ 30 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c+1 & 10 \\ 30 & b+d-1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha \odot \begin{pmatrix} a & 10 \\ 30 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \alpha - 1 & 10 \\ 30 & \alpha b - \alpha + 1 \end{pmatrix}$$

a. Determine el elemento neutro de $V$.

b. Sea $W$ el subespacio dado por: $W = gen \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 30 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 30 & -3 \end{pmatrix} \right\}$. Determine la dimensión de $W$.

3. ***(20 Puntos)***

Una fábrica produce tres tipos de productos, mezclando para ello tres materias primas. Se sabe que para fabricar una unidad del producto 1, se necesitan, 2 unidades de la materia prima 1, 4 unidades de la materia prima 2 y 14 unidades de la materia prima 3; para fabricar una unidad del producto 2, se necesitan, 6 unidades de la materia prima 1, 4 de la materia prima 2 y 10 unidades de la materia prima 3; finalmente, para fabricar una unidad del producto 3, se necesitan, 8 unidades de la materia prima 1, 6 de la materia prima 2 y 16 de la materia prima 3.

Si este mes la fábrica cuenta con 46 unidades de la materia prima 1, 46 unidades de la materia prima 2 y 138 unidades de la materia prima 3 ¿cuántas unidades de cada producto puede producir la fábrica usando el total de las materias primas?

***4. (19 Puntos)***

Considere el espacio vectorial real $V = M_{2x2}$ de las matrices cuadradas de orden $2x2$, con las operaciones usuales. Sean los subconjuntos de $V$:

$$W_1 = \{A \in M_{2x2}\, ; A = A^t\}$$

$$W_2 = \{A \in M_{2x2}\, ; A = -A^t\}$$

a. Demuestre que $W_1$ y $W_2$ son subespacios vectoriales de $V$.

**b.** Determine $W_1 \cap W_2$.

5. ***(20 Puntos)***

Considere el espacio vectorial de las funciones reales continuas sobre $\mathbb{R}$, $C\ (\mathbb{R})$, con las operaciones usuales.

Sean $W = Gen(S_1)$; donde $S_1 = \{2e^x, 4e^{-x}\}$ es un subconjunto de $C\ (\mathbb{R})$ y

$S_2 = \left\{\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right\}$ es una base de $W$.

a. Muestre que $S_1$ es una base de $W$ y determine la matriz de cambio de base de $S_2$ a $S_1$.

b. Halle el vector $\left[\frac{1}{4}e^x + 2e^{-x}\right]_{S_2}$.