# ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL

## INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMATICAS

## "SERIES DE NUMEROS REALES"



# MONOGRAFIA



**Previa a la Obtención del Título de:**
**Magister en Educación Matemática**
**Aplicada a la Enseñanza Media**

**Presentada por:**

WILSON NIETO SAFADI



*Guayaquil - Ecuador*
*1 9 9 4*

# A G R A D E C I M I E N T O

A todas las personas que de una u otra manera colaboraron en mis estudios de Post-Grado y en la realización de este trabajo.

D E D I C A T O R I A

A MI ESPOSA

A MI HIJO

A JOSE XAVIER

## DECLARACION EXPRESA



"La responsabilidad por los hechos, ideas y doctrinas expuestos en esta monografía, me corresponden exclusivamente; y, el patrimonio intelectual de la misma, a la ESCUELA SUPERIOR POLITECNICA DEL LITORAL".

Wilfan Nieto S.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

# INDICE



CIB-ESPOL

pág.

## 2 SERIES DE POTENCIA

# INTRODUCCION

Muchos nombres se asocian con las series infinitas: Newton, Leibniz, los Brenoulli, Taylor, Maclaurin, Euler y Lagrange usaron las series en sus trabajos. Quizá ninguna otra materia haya tenido en matemáticas tantas controversias, lo que se debió a que todos los matemáticos antiguos fracasaron en distinguir con cuidado entre las series convergentes y las divergentes. De hecho, Cauchy (1789-1857) fue la primera persona que dio una definición precisa de la convergencia y demostró algunas de las pruebas de convergencia.

Todavía despues, Karl Weierstrass desarrolló una teoría completa de series de funciones y estableció la legitimidad de operaciones tales como la integración y la derevación por términos.

Este trabajo de monografía se lo ha desarrollado en dos capítulos: en el primer capítulo se hace un estudio relacionado a sucesiones, series, convergencia y divergencia de series, series de términos positivos, series alternadas, series de funciones, etc.; en el segundo capítulo se estudia todo lo relacionado a series de potencias su convergencia y divergencia, y las series de Taylor y de Maclaurin. Se han demostrados algunos teoremas y se han desarrollado algunos ejemplos para la comprención mejor de este tema.

# CAPITULO # 1

## SERIES

### 1-1. SUCESIONES

El concepto de sucesión infinita es tan natural que hasta parece pueda prescindirse de toda definición. Se escribe con frecuencia sencillamente

$$a_1, a_2, a_3, \ldots..$$

indicando los puntos que los números $a_n$ continúan indefinidamente hacia la derecha. No es difícil formular una definición rigurosa de sucesión infinita; lo importante acerca de una sucesión infinita es que para todo número natural n exista un número real $a_n$. Es precisamente este tipo de correspondencia lo que se quiere formalizar con las funciones.

**DEFINICION**

Una **sucesión infinita** de números reales es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales.

Si denotamos la función por f, su valor para n es f(n). La sucesión f es el conjunto [n, f(n)], con n enteros positivos.

Así por ejemplo, {(n, 1/n) /n= 1, 2, 3,....} es una sucesión cuyo valor para n es 1/n ( Fig.1-1).

Puesto que el dominio de una sucesión es siempre el mismo (el conjunto de los enteros positivos), es costumbre abreviar la notación y escribir solo {(n)} en lugar de {[n, f(n)]}. Así la sucesión {(n, 1/n) /n= 1, 2,....} se expresa de forma abreviada {1/n}. También se escribe $\{a_n\}$ para representar la sucesión cuya ordenada, correspondiente a la abscisa x= n, es $y= a_n$.

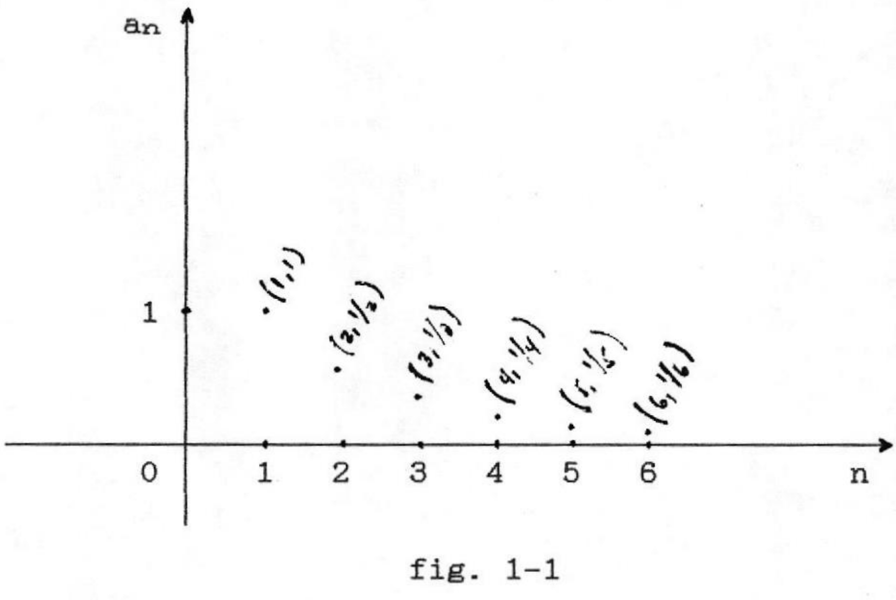


fig. 1-1

## 1-2. SUCESIONES CONVERGENTES Y DIVERGENTES.



**DEFINICION**

Una sucesión $\{a_n\}$ **converge** hacia L (en símbolo $\lim_{n\to\infty} a_n = L$) si para todo £ > 0 existe un número natural N tal que, para todos los números naturales n, si n > N, entonces $|a_n - L| <$ £. Una sucesión se llama **divergente** si no es convergente.

Una sucesión $\{(n, a_n)\}$ puede tener distinto valor $a_n$ para cada valor diferente de n; pero sucede a veces que los distintos valores $a_n$ tienden a agruparse a cierto número L. Cuando existe un número L con la propiedad de que $|a_n - L|$ es arbitrariamente pequeño para todos los valores suficientemente grandes del indice n, se dice que $a_n$ converge hacia el límite, y se escribe:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Por la expresión "$|a_n - L|$ es arbitrariamente pequeño para todos los valores suficientemente grande de n" se entiende que a todo número positivo £ arbitrario corresponde un índice N tal que

$$|a_n - L| < £ \text{ para todo } n > N.$$

Es decir, todos los términos posteriores al N-ésimo quedan a una distancia de L menos que £. Si no existe dicho número, diremos que la sucesión diverge.

**Ejemplo 1.**

Para demostrar que la sucesión $\{1/n\}$ converge hacia 0, basta observar lo siguiente. Si £ > 0, existe un número natural N tal que 1/N < £. Entonces, si n > N tenemos:

1/n < 1/N < £, de donde |1/n − 0| < £.

**Ejemplo 2.**

La sucesión $\{1+(-1)^n/2^n\}$ converge hacia 1 cuando $n \to \infty$.(fig.1-2).

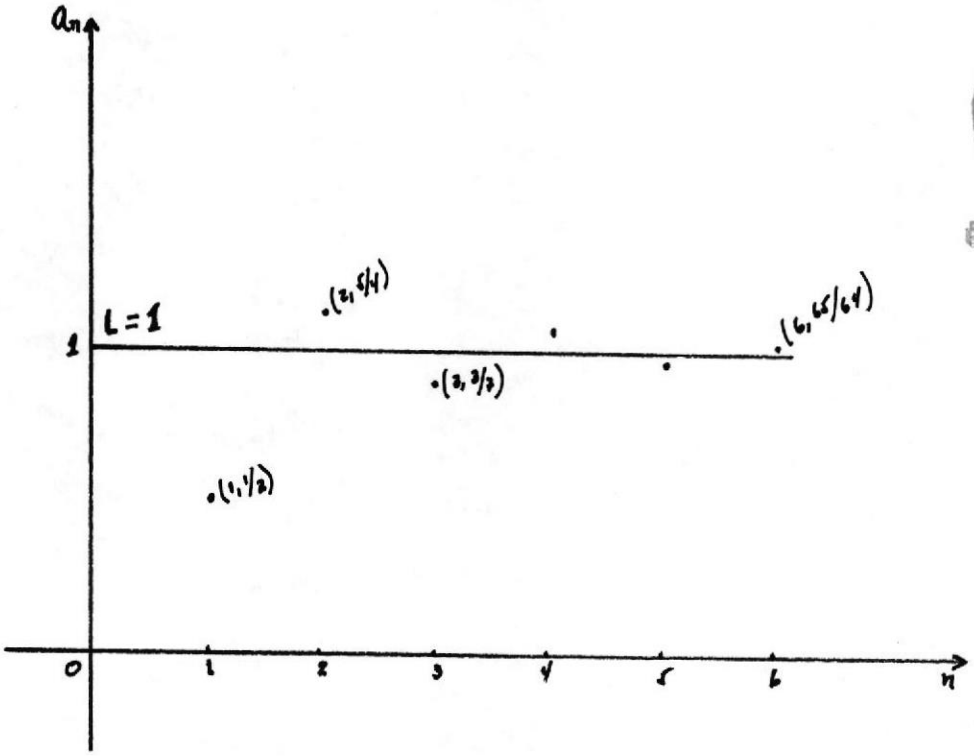




fig. 1-2

## 1-3. SUCESIONES MONÓTONAS DE NÚMEROS REALES.

**DEFINICION**

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Se denomina sucesión creciente si $a_n \leq a_{n+1}$; para n = 1, 2,....
Si $a_n \geq a_{n+1}$; para n = 1, 2, 3, ... , se denomina sucesión decreciente. Una sucesión se llama monótona si es creciente o es decreciente.

## 1-4. SUCESIONES ACOTADAS.

**DEFINICION**

Se dice que una sucesión es **acotada** si existe un número real positivo M tal que $|a_n| \leq M$ para todo n.

**Ejemplo.** La sucesión

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

es monótona (sus términos van creciendo) y acotada (porque $n/n+1 < 1$ para todo n). La sucesión se ilustra en la figura 1-3. Nótese que cualquier número $M \geq 1$ es una cota de la sucesión. Sin embargo, si $K < 1$ entonces K no es una cota ya que $K < k/(k+1)$ para k suficientemente grande.

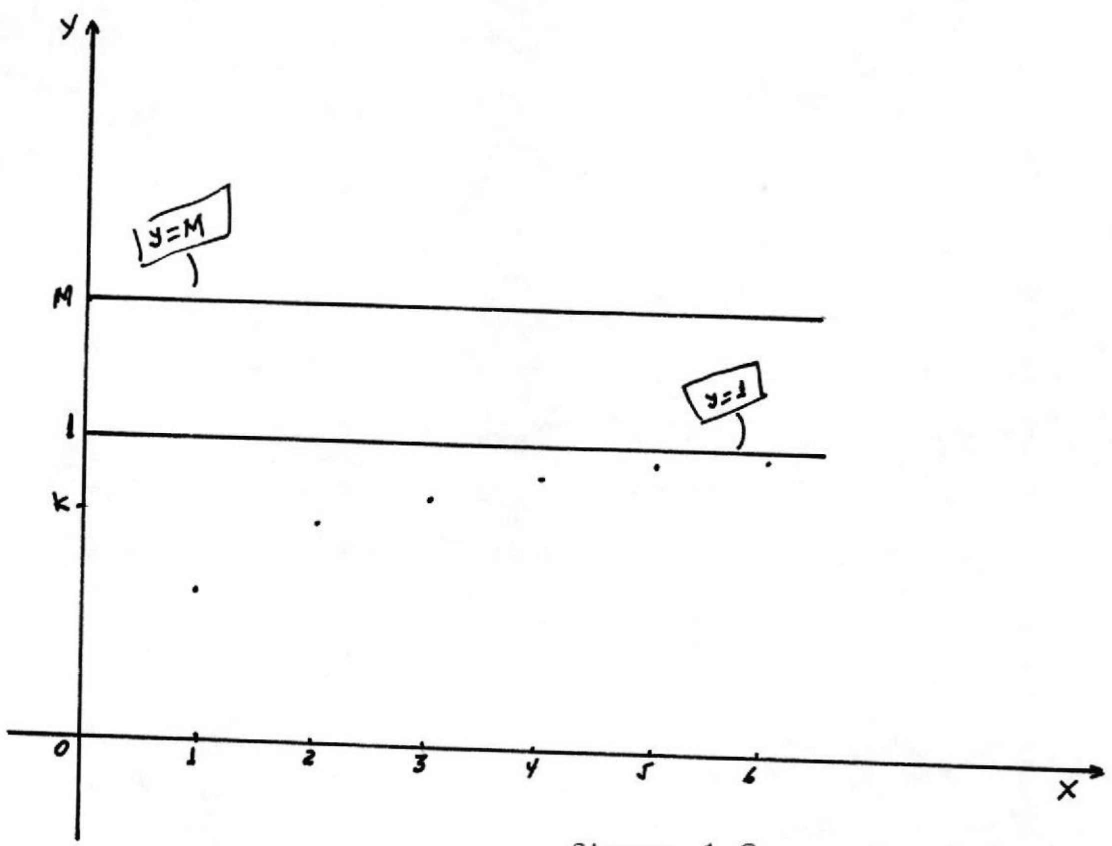


figura 1-3

**TEOREMA 1-1.**

Si $\{a_n\}$ es creciente y acotada superiormente, entonces $\{a_n\}$ converge (un enunciado análogo se cumple si $\{a_n\}$ es decreciente y acotada inferiormente).

**DEMOSTRACION**

El conjunto A formado por todos los números $a_n$ es, según se ha supuesto, acotado superiormente, de modo que A tiene una cota superior mínima $\alpha$. Supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ (fig. 1-4). En efecto, si $\pounds > 0$, existe algún $a_N$ que satisface $\alpha - a_N < \pounds$, puesto que $\alpha$ es la cota superior mínima de A. Entonces si $n > N$ tenemos

$$a_n \geq a_N, \text{ de modo que } \alpha - a_n \leq \alpha - a_N < \pounds.$$

Esto demuestra que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

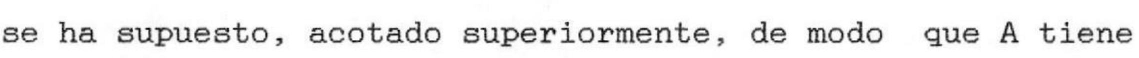


figura 1-4

## 1-5. SUCESIONES DE CAUCHY.

**DEFINICION**

Una sucesión $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy si para todo $\pounds > 0$ existe un número natural N tal que, para todo m y n,

$$\text{si } m,n > N, \text{ entonces } |a_n - a_m| < \pounds.$$

**TEOREMA 1-2.**

Una sucesión $\{a_n\}$ converge si y solo si es una sucesión de Cauchy.

**DEMOSTRACION.**



$\{ a_n \}$ convergente => $\lim a_n = b$

=> Para todo £ > 0 existe un N : n > N

=> $| a_n - b | <$ £

$n > N$ => $| a_n - b | <$ £/2

$m > N$ => $| a_n - b | <$ £/2

$|a_n - a_m| = |a_n - b + b - a_m| \leq | a_n - b | + | b - a_m |$

$= |a_n - b| + | a_m - b | <$ £

=> $| a_n - a_m | <$ £.

**TEOREMA 1-2-1**

Toda sucesión de Cauchy es acotada.

**DEMOSTRACION.**

Por el teorema 1-2 $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy si converge.

La demostración de la recíproca contiene solamente una característica artificiosa: demostrar que toda sucesión de Cauchy $\{a_n\}$ está acotada. Si tomamos £ = 1 en la definición de una sucesión de Cauchy encontramos que existe algún N tal que

$$|a_m - a_n| < 1 \text{ para } m,n > N.$$

En particular, esto significa que

$$|a_m - a_{N+1}| < 1 \text{ para todo } m > N.$$

Así pues, $\{a_m : m > N\}$ está acotada; puesto que los $a_i$ restantes son números finitos, toda la sucesión está acotada.

## 1-6. SERIES

En una famosa paradoja formulada hace unos 2400 años, Zenón de Elea dijo que un corredor no puede terminar una carrera porque primero debe cubrir la mitad de la distancia, luego la mitad de la que queda, y asi sucesivamente. Puesto que el tiempo de la carrera es finito, no podrá recorrer el infinito número de segmentos del curso. Aunque todos sabemos que los corredores terminan la carrera.

Imagine que el recorrido de la carrera mide 1 milla de longitud.

Los segmentos del argumento dde Zenón tendrían como longitudes 1/2 de milla, 1/4 de milla, 1/8 de milla, etc. En el lenguaje matemático, terminar la carrera significaría evaluar la suma

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$$

como algebraicamente solo se puede sumar un número finito de términos, hay que definir lo que significa una suma infinita de este tipo.

**DEFINICION**

Sea $\{a_n\}$ una sucesión dada de números reales o complejo.

Formemos una nueva sucesión $\{S_n\}$ como sigue:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad (n = 1, 2, \ldots\ldots).$$

Una sucesión $\{S_n\}$ formada de esta manera se llama serie.

El número $S_n$ es la suma parcial n-ésima de la serie y $a_n$ es el término n-ésimo de la serie.

## 1-7. CONVERGENCIA Y DIVERGENCIA DE SERIES.

Una serie infinita $\Sigma a_n$ es convergente si su sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ converge; es decir, si $\lim_{n\to\infty} S_n = S$.

El límite S se llama suma de la serie $\Sigma a_n$ y se escribe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) = S.$$

Por el contrario, si la sucesión de sumas parciales diverge, diremos que la serie diverge. En otras palabras: el comportamiento de la serie (convergencia o divergencia) depende del de su sucesión de sumas parciales.

**TEOREMA 1-3.**

Una condición necesaria para la convergencia de la serie

$$a_1 + a_2 \dots + a_n + \dots$$



es que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

**DEMOSTRACION**

El n-ésimo término $a_n$ de la serie infinita se la puede expresar como

$$a_n = S_n - S_{n-1}.$$

Si $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, entonces también $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ y

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0.$$

Decir que la condición $\lim a_n = 0$ es "necesaria para la convergencia" significa que debe cumplirse tal condición si la serie converge. Resulta por tanto que si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ no se verifica, la serie diverge. Este criterio se utiliza con frecuencia para comprobar la divergencia; es decir, si el término n-ésimo de la serie no tiene límite, o si tiene límite distinto de cero cuando n tiende a infinito, la serie diverge; por ejemplo la serie

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\dots+\frac{n}{n+1}+\dots$$

diverge, puesto que $a_n = n/n+1$ tiende a 1, y no a cero, cuando $n \to \infty$. El teorema no da una condición "suficiente" para la convergencia. Es decir, no es posible deducir que una serie converge por el hecho de que su termino n-ésimo tiende a cero cuando $n \to \infty$. Esto se ve claramente en el siguiente ejemplo:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

La serie armónica es un ejemplo de serie divergente y su $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$.

Por lo tanto para concluir que una serie infinita converge, no basta demostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, por que esto puede ser cierto tanto para series convergentes o divergentes.

## 1-8. SERIE GEOMETRICA.

Debe observarse que la suma

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

está siempre definida (si n es entero positivo y $a_1$, $a_2$, ... $a_n$ son números finitos). Cuando la serie

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

tiene suma en el sentido de que su sucesión de sumas parciales tiene límite, el símbolo "+" adquiere nueva significación, como también la palabra suma. No es posible sumar infinitos números, pero damos significado a este proceso mediante la operación de paso al límite.

Vamos a ilustrar el método de hallar la suma de una serie en el caso de la fracción periódica.

$$0.333\ldots=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\cdots$$

$$S_1=\frac{3}{10}$$

$$S_2=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}$$

.............

$$S_n=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\ldots+\frac{3}{10^n}$$

Se deduce una expresión sencilla para $S_n$ como sigue. Multiplicando los dos miembros de la última expresión por 1/10 y obtenemos:

$1/10\ S_n = 3/10^2 + 3/10^3 + \ldots + 3/10^n + 3/10^{n+1}$

restando de $S_n$ se tiene

$S_n - 1/10\ S_n = 3/10 - 3/10^{n+1} = 3/10\ (1-1/10^n)$

por consiguiente

$9/10\ S_n = 3/10\ (1-1/10^n)$

o bien

$S_n = 3/9\ (1-1/10^n)$

es claro que cuando $n \to \infty$, $(1/10^n) \to 0$ y

$\lim_{n\to\infty} S_n = 1/3$

podemos decir que la suma de la serie

$3/10 + 3/10^2 + \ldots + 3/10^n + \ldots$

es 1/3

Las fracciones decimales periódicas son casos particulares de la serie geométrica.

**DEFINICION**

Una serie de la forma

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$$

recibe el nombre de una serie geométrica. El cociente de un término al anterior vale r, y se denomina razón.

La suma de los n primeros términos de

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots \text{ es}$$

$$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$$

**TEOREMA 1-4.**

Si $| r | < 1$, la serie geométrica

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$$

converge y tiene por suma $a/ (1-r)$. Si $|r | \geq 1$, la serie diverge, salvo que sea $a = 0$, en cuyo caso la serie converge hacia la suma 0.

## 1-9. SERIE DE TERMINOS POSITIVOS.

Supongamos que todos los números $a_k$ en

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

son positivos. Al calcular las sumas parciales $S_1$, $S_2, \ldots$ etc., se ve que cada una es mayor que la precedente, ya que $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$. Por consiguiente,

$S_1 \le S_2 \le \ldots \le S_n \le S_{n+1}$.

Una sucesión $\{S_n\}$ con la propiedad $S_1 \le S_2 \le \ldots \le S_n \le S_{n+1}$ se llama sucesión **monótona** creciente, y para ella rige un principio general contenido en el teorema siguiente.

**TEOREMA 1-5.**

Sea $S_1$, $S_2$, ... una sucesión monótona creciente de números reales. En tal caso, solo pueden presentarse dos casos:

i) Existe una constante M tal que todos los términos de la sucesión son menores o iguales que M. En este caso la sucesión tiene límite finito L, menor o igual que M.

ii) La sucesión diverge hacia más infinito; es decir, existen términos en la sucesión $\{S_n\}$ mayores que cualquier número prefijado, por grande que este sea.

No daremos la demostración de este teorema; nos limitaremos a hacer algunas consideraciones geométricas que nos lo aclaren.

Supongamos que se señalan los puntos $(1, S_1)$, $(2, S_2), \ldots, (n, S_n)$ en el plano xy (fig.1-5). Entonces, si existe una recta y = M tal que ninguno de los puntos $(n, S_n)$ son mayores que los puntos de la recta, es obvio intuitivamente que habrá una recta inferior

$$y = L$$

tal que ninguno de los puntos son mayores a los puntos de ella, mientras que existen puntos $(n, S_n)$ que son mayores a los de cualquier recta más baja

$$y = L - £,$$

siendo £ un número positivo arbitrario. Analíticamente, esto significa que el número L tiene las propiedades:

i) $S_n \leq L$ para todo valor de n;

ii) dado cualquier £ > 0, existe al menos un entero N tal que

$$S_N > L - £.$$

De este modo, por ser $\{S_n\}$ una sucesión creciente, resulta que

$$S_n \geq S_N > L - £ \text{ para todo } n \geq N.$$

Esto significa que todos los números $S_n$ de la sucesión posterior al de índice N están a distancia menor que £ de L, y esta es precisamente la condición para que L sea límite de la sucesión $S_n$,

$$L = \lim_{n \to \infty} S_n.$$

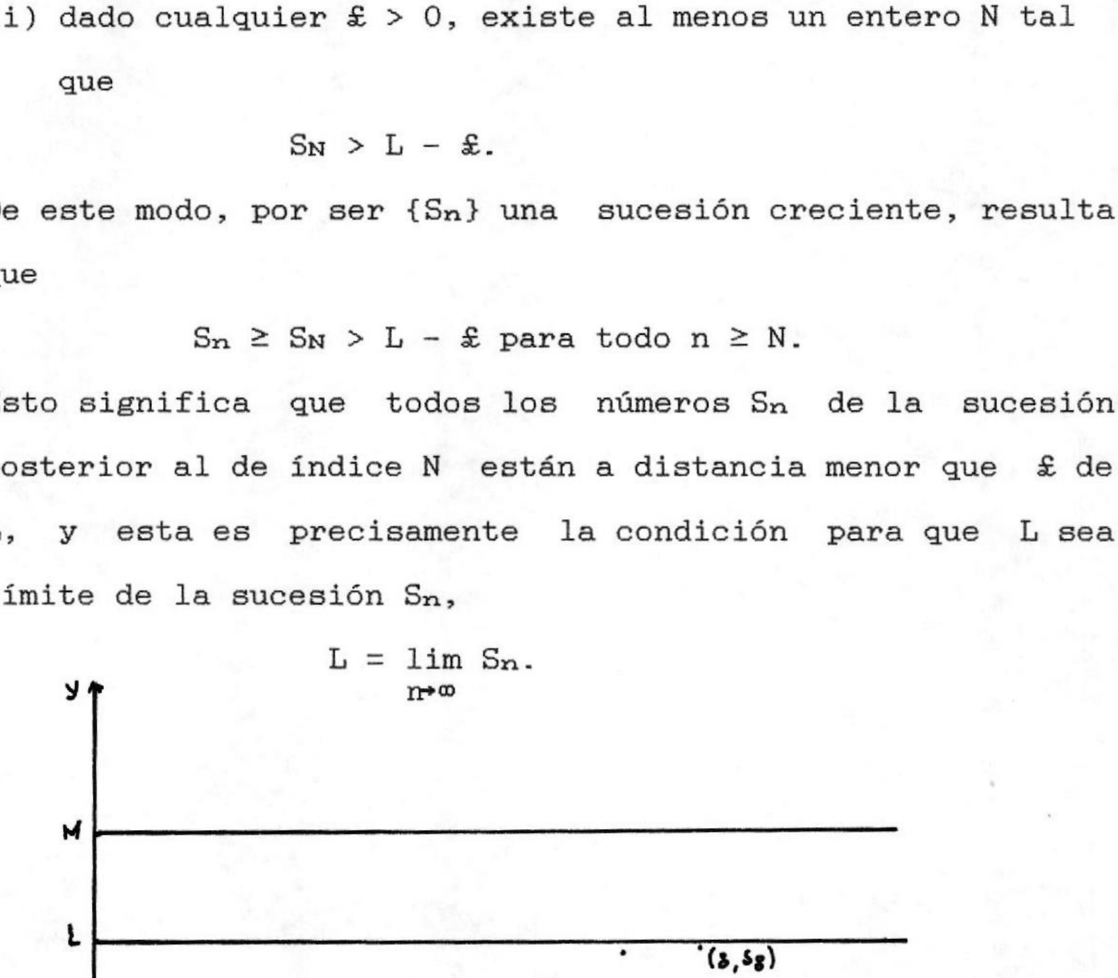


figura 1-5

El caso ii del teorema se presenta cuando existen puntos $(n, S_n)$ que son mayores a los de cualquier recta dada $y = M$, por grande que sea M.

El teorema nada nos dice respecto a como hallar el límite L en el caso de que exista, sino que simplemente expresa si existe o no.

Es decir, afirma que una serie de términos positivos es convergente o divergente. Se descarta que la serie pueda ser oscilante.

**Ejemplo.** La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1/n! = 1 + 1/1! + 1/2! + \ldots$$

converge por que sus términos son menores o iguales que los correspondiente de la serie

$$1 + \sum_{k=0}^{\infty} 1/2^k = 1 + 1 + 1/2 + 1/2^2 + \ldots$$

Esta última es, prescindiendo del primer término, una serie geométrica de razón 1/2 y su suma es $1 + 1/(1 - 1/2) = 3$. por consiguiente, la primera serie converge y su suma será menor o igual que 3. Efectivamente, es el desarrollo en serie del número e.

En el ejemplo anterior hemos hecho una comparación entre la serie dada y otra serie.

De la definición de convergencia surge evidentemente que la convergencia de una serie de constantes positivas quedará establecida si se demuestra que las sumas parciales $S_n$ se mantienen acotadas, es decir, si existe un número positivo M tal que $S_n < M$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ La demostración del importante criterio que sigue está basada en una demostración de este tipo.

## 1-9-1. CRITERIO DE COMPARACION.

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de terminos positivos y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ otra serie de términos positivos que es convergente. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sera convergente a su vez, si existe un número entero p tal que para $n \geq p$, sea $a_n \leq b_n$. Por otra parte, si $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ es una serie divergente de términos positivos, y si $a_n \geq c_n$ para $n \geq p$, resultará que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es también divergente.

Puesto que la convergencia o divergencia de una serie no varía evidentemente por la suma o sustracción de un número finito de términos, se hará la demostración suponiendo que $p = 1$. Sea

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

e indicando con B la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y con $b_n$ su n-ésima suma parcial, resultará, puesto que $a_n \leq b_n$ para

1, 2, ..., que $S_n \leq B_n$ para n = 1, 2, .... Por lo tanto, las sumas $S_n$ se mantienen acotadas y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.



Por otra parte, si $a_n \geq c_n$ para n = 1, 2, ..., y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ diverge, también diverge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Existen dos tipos de serie que se usan frecuentemente como series de comparación.

i) La serie geométrica

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n + \ldots$$

que, según se recordara, es convergente con suma a/1-r si $|r| < 1$, y es divergente si $|r| \geq 1$.

ii) La serie de orden p

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots$$

que es convergente si $p > 1$ y divergente si $p \leq 1$.

**Ejemplo.** Sea la serie

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots\frac{1}{n^n}+\ldots$$

La serie geométrica

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

es convergente y sus términos no son nunca menores que los términos correspondientes de la serie dada. Por consiguiente, la serie dada es convergente.

**Ejemplo.** Sea la serie

$$1 + 1/\log 2 + 1/\log 3 + \ldots + 1/\log n + \ldots$$

Comparando los términos de esta serie con los de la serie de orden p en el caso de ser p = 1

$$1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n + \ldots$$

resulta que la serie dada es divergente, porque sus términos (despues del primero) son mayores que los términos correspondientes de la serie de orden p considerada, la cual diverge por ser p = 1.

## 1-9-2. CRITERIO DEL COCIENTE.

La serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = r < 1$$

y es divergente si

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n > 1.$$

Si $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 1$ la serie puede ser convergente o divergente.

**DEMOSTRACION.**

Considerando primero el caso en que r < 1 y llamando q a cierta constante comprendida entre r y 1, deberá existir un número entero y positivo N tal que

$$a_{n+1}/a_n < q \qquad \text{para todo } n \geq N.$$

Por consiguiente

$$a_{N+1} < a_N q,$$

$$a_{N+2} < a_{N+1} q < a_N q^2,$$

$$a_{N+3} < a_{N+2} q < a_N q^3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

y

$$a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \ldots < a_N (q + q^2 + q^3 + \ldots).$$

Como $q < 1$, la serie del segundo miembro es convergente y, por lo tanto, también lo es la serie del primer miembro.

Se deduce, pues, que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Si el límite del cociente es mayor que 1, resulta que $a_{n+1} > a_n$ para todo $n \geq N$, de modo que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y, por lo tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Es importante hacer notar que este criterio no exige conocer el valor del cociente $a_{n+1}/a_n$ sino que considera solamente el límite de ese cociente. Asi en el caso de la serie armonica, el cociente es $a_{n+1}/a_n = n/(n+1)$ que se conserva menor que la unidad para cualquier valor finito de n pero cuyo límite, para n tendiendo a infinito,es precisamente la unidad. Por consiguiente, el criterio no suministra, en este caso ninguna información.

**Ejemplo.** Para la serie

$$1 + 2/2 + 3/2^2 + 4/2^3 + \ldots + n/2^{n-1} + \ldots,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = \lim_{n\to\infty} n+1/2^n \cdot 2^{n-1}/n = \lim_{n\to\infty} 1+1/n\ /2 = \tfrac{1}{2}$$

y, por lo tanto, la serie converge.

**Ejemplo.** La serie

$$1/10 + 2!/10^2 + 3!/10^3 + \ldots + n!/10^n + \ldots$$

es divergente, porque

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = \lim_{n\to\infty} (n+1)!10^n/10^{n+1}n! = \lim_{n\to\infty} n+1/10 = \infty.$$

**TEOREMA 1-6.**

Sea $y = f(x)$, obtenida al sustituir la variable $n$ del n-ésimo término de la serie de términos positivos

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

por una variable continua $x$, una función decreciente de $x$ para $x \geq 1$. En tal caso, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

y la integral

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

son convergentes o divergentes simultáneamente.

## 1-10. SERIES ALTERNADAS.

**DEFINICION**

Se llama serie alternada a aquella cuyos términos son, alternativamente, positivos y negativos.

Existe un criterio simple, debido a Leibnitz, para establecer la convergencia de muchas de estas series.

## 1-11. CRITERIO PARA UNA SERIE ALTERNADA.

Si la serie alternada $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$, donde los números $a_i$ son positivos, es tal que $a_{n+1} < a_n$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, la serie es convergente.

Además, si S es la suma de la serie, el valor absoluto de la diferencia entre S y la n-ésima suma parcial es menor que $a_{n+1}$. Puesto que

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

$$= a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots -(a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n},$$

resulta evidente que $S_{2n}$ es positiva y que $S_{2n} < a_1$ para todo valor de n; además, $S_2 < S_4 < \ldots$ de modo que estas sumas parciales tienden al límite S (por el principio fundamental). Y como $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$ y límite $a_{2n+1}= 0$ resulta que las sumas parciales de orden impar tienden al mismo límite. Por lo tanto, la serie es convergente.

**Ejemplo.**

La serie $1- 1/2 + 1/3 - 1/4 + \ldots$

es convergente puesto que $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$ y $1/n+1 < 1/n$.

Además, la diferencia entre $S_4 = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4$ y la suma S es menor que 1/5.

## 1-12. CONVERGENCIA ABSOLUTA.

El tema que trataremos es cuando se trata de una serie tal como

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots$$

que se convierte en una serie alternada cuando x es negativo.

Para estudiar estos casos vamos a introducir el concepto de convergencia absoluta.

**DEFINICION**

Una serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots$$

se llama absolutamente convergente si converge la serie formada con los valores absolutos de los términos

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = |a_1| + |a_2| + \dots$$

Una de las razones de la importancia de la convergencia absoluta la da el teorema siguiente.

**TEOREMA 1-7.**

Si una serie converge absolutamente, también converge la serie sin valores absolutos.

## 1-13. ALGEBRA DE LAS SERIES.

Los importantes teoremas que siguen se enuncian sin demostración.

**TEOREMA 1-8.**

Dos series convergentes

$$U = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

$$V = v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

pueden ser sumadas o restadas termino a término y resulta

$$U + V = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \ldots + (u_n + v_n) + \ldots$$

o

$$U - V = (u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + \ldots + (u_n - v_n) + \ldots$$

Si ambas series originales son absolutamente convergentes también la serie que resulta es absolutamente convergente.

**TEOREMA 1-9.**

Si las series

$$U = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

$$V = v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

son absolutamente convergentes pueden multiplicarse las sumas finitas semejantes y la serie producto converge a U.V. Además, la serie producto será absolutamente convergente. Entonces

$$UV = u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + u_2v_2 + \ldots$$

**TEOREMAS 1-10.**

En una serie absolutamente convergente los términos positivos forman una serie parcial convergentes y también los términos negativos forman una serie parcial convergente. Si en una serie convergente, la serie parcial formada por los términos positivos es divergente, también lo es la serie parcial formada por los términos negativos, y la serie original es condicionalmente convergente.

**TEOREMAS 1-11.**

Si $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ es una serie absolutamente convergente y $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ es una sucesión de números cuyos valores absolutos son todos menores que un número positivo N, la serie

$$u_1M_1 + u_2M_2 + \ldots + u_nM_n + \ldots$$

es absolutamente convergente.

**Ejemplo.** La serie

$$\text{sen } x/1^3 - \text{sen } 2x/2^3 + \text{sen } 3x/3^3 - \ldots$$

es absolutamente convergente para cualquier valor de x, porque la serie

$$1/1^3 - 1/2^3 + 1/3^3 - \ldots$$

Es absolutamente convergente, y $|\text{ sen } nx \;| \leq 1$.

## 1-14. SERIES DE FUNCIONES.

La definición de series de funciones es análoga a la de una serie de números: si $\{f_k\}$ es una sucesión de funciones de variable real, entonces la serie

$\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ es la sucesión $\{S_n\}$ donde $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$.

Nótese que ahora $S_n$ es una función: es la función con dominio $\bigcap_{k=1}^{n} Df_k$ y regla de correspondencia $\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$. Si para cada x en un conjunto E, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge a un punto f(x), entonces decimos que la serie $\sum f_k$ converge puntualmente a f sobre E.

**Ejemplo.**

Determínese el conjunto sobre el que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} I^k$

converge y proporciónese la suma.

**Solución:** La serie geométrica $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ converge a $1/1-x$ para $x \in (-1, 1)$ y diverge para x fuera de este intervalo. Por lo tanto, la serie $\Sigma I^k$ converge puntualmente sobre $(-1, 1)$ y la suma de la serie es la función $1/1-x$ con dominio restringido a $(-1, 1)$.

# CAPITULO 2

# SERIES DE POTENCIAS



## 2-1. SERIES DE POTENCIAS.

Algunas funciones como $e^x$, sen x y $\tan^{-1} x$ se pueden representar con series infinitas. Los términos de tales series contienen a la variable x. Como un primer ejemplo, si x es una variable, entonces de lo que se vio de las series geométricas

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = 1/1-x \text{ si } | x | < 1$$

Si se define $f(x) = 1/(1-x)$ con $| x | < 1$, entonces

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

Se dice que f(x) está representada por esta serie de potencias infinita. Pueden calcularse los valores de esta función calculando la suma de la serie.

Este nuevo método de representar una función permitirá investigar las propiedades de una función mediante series infinitas. En el presente capítulo se introducen algunos conceptos básicos acerca de series con términos variables.

La siguiente definición puede considerarse como una generalización del concepto de polinomio en x a una serie de potencias infinita.

**DEFINICION.**

Sea x una variable real. Una **serie de potencias en x** es una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

donde cada $a_k$ es un número real.

Si se sustituye x por un número en la definición anterior, se obtiene una serie de términos constantes cuya convergencia o divergencia puede estudiarse. Para simplificar la escritura del n-ésimo termino de una serie de potencias, se supone que $x^0 = 1$ aún si $x = 0$. El principal objetivo de esta sección es determinar todos los valores de x para los que converge una serie de potencias. Evidentemente todas las series de potencias en x convergen cuando $x = 0$.

**TEOREMA 2-1.**

Si $\Sigma a_n x^n$ converge para $x = x_0$, entonces es absolutamente convergente para todos los valores de x para los cuales $|x|<|x_0|$.

Si diverge para $x = x_1$, es divergente para todos los valores de x tales que $|x| > |x_1|$.

**DEMOSTRACION.**

Supuesto que $\Sigma a_n x_0^n$ converge, la sucesión $\{a_n x_0^n\}$ converge hacia cero y de aquí que es acotada. Así que existe un M tal que

$$|a_n x_0^n| < M \qquad \text{para todo } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Escogamos cualquier x tal que $|x| < |x_0|$. Entonces

$$r \equiv |x/x_0| < 1.$$

por lo tanto

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n \cdot x^n/x_0^n| = |a_n x_0^n| \cdot |x/x_0|^n \leq Mr^n.$$

Entonces la serie converge por comparación con una serie geométrica con $r < 1$.

A partir de esto, la segunda parte se deduce fácilmente.

Supongamos que $\Sigma\ a_n x_1^n$ diverge y que existe otro valor de x, sea $x = x_0$ con $|x_0| > |x_1|$ para el cual $\Sigma\ a_n x_0^n$ converge. Si esto sucediera se tendría la siguiente situación: existe un $x_0$ para el cual la serie converge y un $x_1$ con $|x_1| < |x_0|$ para el cual diverge. Pero esto contradice la primera parte del teorema.

Parece evidente, con base en este teorema, que una serie de potencias tiene la propiedad de converger en un intervalo, si converge de alguna manera. Para precisar este hecho, hagamos la siguiente definición.



## 2-2. RADIO DE CONVERGENCIA.

**DEFINICION.**

Dada una serie de potencias $\Sigma a_n x^n$, sea S el conjunto de x para las cuales esta serie converge. Entonces el número R, definido a continuación, se llamará **radio de convergencia** de $\Sigma a_n x^n$:

$R = 0$ si $\Sigma a_n x^n$ converge solamente para $x = 0$.

$R = +\infty$ si $\Sigma a_n x^n$ converge para toda x.

$R = \sup|x|$ si $\Sigma a_n x^n$ converge para algunas x y diverge para otras.

El intervalo $\{-R < x < R\}$ se llamará **intervalo de convergencia.**

**TEOREMA 2-2.**

Una serie de potencias $\Sigma a_n x^n$ converge absolutamente para toda x dentro de un intervalo de convergencia $\{-R < x < R\}$ y diverge en $\{|x| > R\}$.

Este teorema afirma que la serie converge en todos los puntos en el intervalo de convergencia y diverge en todos los puntos más allá de los extremos del intervalo de convergencia. Nada afirma respectos a los propios puntos extremos $x = \pm R$. En general, éstos requieren una prueba especial porque puede suceder que una serie converge en ninguno de los dos, o en uno y no en el otro, o en ambos.

## 2-3. PROPIEDADES DE LAS SERIES DE POTENCIAS.

La importancia de las series de potencias en matemáticas aplicadas se debe a las propiedades de esas series que se consideran en esta sección; este hecho resultará evidente al estudiar las aplicaciones de estas series.

**TEOREMA 2-3.**

Si $r > 0$ es el radio de convergencia de una serie de potencias

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, dicha serie converge absolutamente para todo valor de cualquier intervalo $a \leq x \leq b$ que sea interior al $(-r,r)$.

Puesto que el intervalo $(a, b)$ es íntegramente contenido en el intervalo $(-r, r)$, es posible elegir un número positivo $c$, menor que $r$ pero mayor que $a$ y $b$; entonces, el intervalo $(a, b)$ pertenecerá integramente al intervalo $(-c, c)$, y se deduce que, para $a \leq x \leq b$,

$$| a_n x^n | < | a_n c^n |$$

La serie numérica, de términos positivos, $\sum_{n=0}^{\infty} | a_n c^n |$ es

convergente para $c < r$, y, por lo tanto queda establecida la convergencia absoluta y uniforme de

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ en } (a, b).$$



**TEOREMA 2-4.**

Una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ define una función continua para todos los valores de x pertenecientes a cualquier intervalo cerrado [a, b] que sea interior al intervalo de convergencia de la serie.

Este enunciado es una consecuencia inmediata del teorema anterior.

**TEOREMA 2-5.**

Si r es el radio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

los radios de convergencia de las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} n.a_n x^{n-1}, \text{ y } \sum_{n=0}^{\infty} a_n/n+1.(x^{n+1}),$$

obtenidas derivando e integrando término a término la serie dada, es también r.

**DEMOSTRACION**

Si el radio de convergencia puede determinarse con el criterio del cociente, la demostración resulta de inmediato del hecho que, si

$$\lim_{n \to \infty} | a_{n-1}/a_n | = r,$$

resulta

$$\lim_{n\to\infty} \left| (n-1)a_{n-1}/na_n \right| = r$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \left| (n+1)a_{n-1}/na_n \right| = r.$$

Como las series obtenidas por la derivación o integración término a término de la serie dada, son así mismo series de potencias, puede reiterarse el proceso anterior tantas veces como se desee y las series resultantes serán series de potencias que convergerán en el intervalo ( $-r$, $r$ ); y del teorema 1, se deduce que todas esas series son uniforme y absolutamente convergentes en cualquier intervalo interior al $(-r,r)$. Pero el comportamiento de estas series en los extremos $x = -r$, $x = r$ del intervalo, deberá ser investigado en cada caso.

**Ejemplo.** La serie

$$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$$

tiene un radio de convergencia igual a la unidad; además, la serie converge para $x = -1$, pero diverge para $x = 1$. La serie obtenida derivando término a término es

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots,$$

que tiene el mismo radio de convergencia en ambos extremos $x = 1$ y $x = -1$. Por otra parte, la serie obtenida integrando término a término es

$$x+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{2.3}+\ldots+\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}+\ldots$$

que converge para $x = 1$ y para $x = -1$.

## 2-5. SERIE DE TAYLOR

Si f es la función definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots \quad (1)$$

cuyo radio de convergencia es $R > 0$, sabemos que f tiene derivadas de todos los ordenes en $(-R, R)$. Decimos que una función tal es infinitamente diferenciable en $(-R, R)$. Las diferenciaciones sucesivas de la función en (1) dan

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \ldots + nc_n x^{n-1} + \ldots \quad (2)$$

$$f''(x) = 2c_2 + 2.3c_3 x + 3.4c_4 x^2 + \ldots + (n-1)nc_n x^{n-2} \quad (3)$$

$$f'''(x) = 2.3c_3 + 2.3.4c_4 x + \ldots + (n-2)(n-1)nc_n x^{n-3} + \ldots \quad (4)$$

$$f^{iv}(x) = 2.3.4c_4 + \ldots + (n-3)(n-2)(n-1)nc_n x^{n-4} + \ldots \quad (5)$$

etc. Si $x = 0$, en (1),

$$f(0) = c_0$$

Si $x = 0$, en (2),

$$f'(0) = c_1$$

Si $x = 0$, en (3),

$$f''(0) = 2c_2 \text{ y así } c_2 = f''(0)/2!$$

De (4), tomamos $x = 0$, tenemos

$$f'''(0) = 2.3c_3 \text{ y así } c_3 = f'''(0)/3!$$

En forma análoga de (5), si $x = 0$,

$$f^{(iv)}(0) = 2.3.4c_4 \quad \text{y así} \quad c_4 = f^{(iv)}(0)/4!$$

En general, tenemos que

$$c_n = f^n(0)/n! \quad \text{para todo n entero positivo} \qquad (6)$$

La formula (6) también es válida cuando n = 0 si consideramos $f^{(0)}(0)$ como $f(0)$ y $0! = 1$. Así, de (1) y (6) podemos escribir la serie de potencias de $f$ en $x$ como

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^n(0)/n!(x^n) = f^0 + f'(0)x + f''(0)/2!(x^2) + \ldots + f^n(0)/n!(x^n) + \ldots \qquad (7)$$

En un sentido más general, consideremos la función $f$ como una serie de potencias en $(x - a)$; es decir,

$$f(x)= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x - a)^n + \ldots \qquad (8)$$

Si el radio de convergencia de esta serie es R, entonces $f$ es infinitamente diferenciable en $(a - R, a + R)$. Las diferenciaciones sucesivas de la función en (8) nos dan

$$f'(x)= c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \ldots + nc_n(x-a)^{n-1} + \ldots$$

$$f''(x)= 2c_2 + 2.3c_3(x-a) + 3.4c_4(x-a)^2 + \ldots + (n-1)nc_n(x-a)^{n-2} + \ldots$$

etc. Haciendo $x = a$ en la representación en series de potencias de $f$ y sus derivadas tenemos

$$c_0 = f(a)$$

$$c_1 = f'(a)$$

$$c_2 = f''(a)/2!$$

$$C_3 = \frac{f'''(a)}{3!}$$

y en general

$$C_n = \frac{f^n(a)}{n!} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (9)$$

De (8) y (9) podemos escribir la serie de potencias de $f$ en $(x - a)$ como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!\,(x-a)^n} = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!\,(x-a)^2} + \dots + \frac{f^n(a)}{n!\,(x-a)^n} + \dots \quad (10)$$

La serie en (10) se llama **serie de Taylor** de $f$ en $a$. El caso especial de (10) cuando $a = 0$, es la ecuación (7), la cual se llama **serie de Maclaurin**.

**Ejemplo.** Hallar la serie de Maclaurin para $e^x$

**Solución:** Si $f(x) = e^x$, $f^n(x) = e^x$ para todo $x$; por lo tanto, $f^n(0) = 1$ para todo $n$. Así, de (7) tenemos la serie de Maclaurin para $e^x$:

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

**Ejemplo.** Hallar la serie de Taylor para seno x en a.

**Solución:** Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\operatorname{sen} x$, $f'''(x) = -\cos x$, y así sucesivamente.

De este modo, de la formula (9), $c_0 = \operatorname{sen} a$, $c_1 = \cos a$,

$c_2 = (-\operatorname{Sen} a)/2!$, $c_3 = (-\cos a)/3!$, etc. La serie de Taylor requerida se obtiene de (10), y es

$$sena + cosa(x-a) - sena\frac{(x-a)^2}{2!} - cosa\frac{(x-a)^3}{3!} + sena\frac{(x-a)^4}{4!} + \ldots$$

Podemos deducir que una representación en serie de potencias es única. Es decir, si dos funciones tienen los mismos valores en algún intervalo que contenga al número a, y si ambas funciones tienen una representación en serie de potencias en (x - a), entonces estas series deben ser las mismas, por que los coeficientes en las series se obtienen de los valores de las funciones y sus derivadas en a. Por lo tanto, si una función tiene una representación en serie de potencias en (x - a), dicha serie debe ser su serie de Taylor en a. Por ello , la serie de Taylor para una función no tiene que obtenerse usando la formula (10). Cualquier método que dé una serie de potencias en (x - a) la cual representa la función, será la serie de Taylor de la función en a.

**Ejemplo.** Para encontrar la serie de Taylor para $e^x$ en a, escribimos $e^x = e^a e^{x-a}$ y luego usando la serie (11), donde x se sustituye por (x - a). Entonces

$$e^x = e^a\left[1 + (x-a) + \frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{(x-a)^3}{3!} + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} + \ldots\right]$$

## BIBLIOGRAFIA


**APOSTOL**, T. 1960 Análisis Matemático - Editorial Reverté, S.A. Barcelona.

**FULKS**, W. 1991 Cálculo Avanzado - Editorial Limusa. México.

**HAASER-LASALLE-SULLIVAN**. Análisis Matemático 2.

**KAPLAN**, W. 1967 Cálculo Avanzado - Compañia Editorial Continental, S.A. México

**LARSON-HOSTETLER**. 1987 Cálculo y Geometría Analítica. Mc. Graw Hill - México

**PURCELL-VARBERG**. Cálculo con Geometría Analítica Prentice-Hall-hispanoamericana, S.A. México

**SPIVAK**, M. CALCULUS: Cálculo Infinitesimal. Editorial Reverté. S.A., España

**THOMAS**, G. 1966 Cálculo Infinitesimal. - Aguilar S.A. de Ediciones, Madrid.

**VIGNAUX**, J. 1959 Matemática Superior para Ingenieros y Físicos. Editorial Nigar S.R.L. Buenos Aires.