FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Año: 2023	**Período:** II PAO
Materia: Estadística Matemática	**Profesor:** Christian E. Galarza
Evaluación: Primera	**Fecha:** 22/11/2023

COMPROMISO DE HONOR

Yo, ____ al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que puedo usar una calculadora *ordinaria* para cálculos aritméticos, un lápiz o esferográfico; que solo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen; y, cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído, debo apagarlo y depositarlo en la parte anterior del aula, junto con algún otro material que se encuentre acompañándolo. No debo además, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a las que se entreguen en esta evaluación. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.
Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptar la declaración anterior.

"Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".

Firma: __________________ **Número de matrícula:** __________ **Paralelo:** _____

Tema 1. **[10 pts]** Demuestre que:

a) **[5 pts]** Si $X_n \xrightarrow{\text{D}} c$, entonces $X_n \xrightarrow{\text{P}} c$, para $c \in \mathbb{R}$.

b) **[5 pts]** Sean X y Y dos variables aleatorias con una función de densidad conjunta $f_{X,Y}(x,y)$, y supongamos que las integrales necesarias existen y son finitas. Luego,

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]].$$

Tema 2. **[10 pts]** Se escoge al azar un punto $P = (X,Y)$ del cuadrado unitario $(0,1)\times(0,1)$. Sea Θ el ángulo formado entre el eje x y el segmento que une el origen y el punto P. Encuentre la densidad de Θ.

Tema 3. **[25 pts]** Sean $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n de la variable aleatoria X con función de densidad de probabilidad dada por

$$f(x|\theta) = \frac{x}{\theta^2}e^{-x/\theta}, x \geq 0, \theta > 0.$$

a) **[5 pts]** Encuentre el estimador por el Método de los Momentos de θ y demuestre que este converge en probabilidad al parámetro, i.e., $\hat{\theta}_{MM} \xrightarrow{\text{P}} \theta$.

b) **[10 pts]** Determine el estimador de Máxima Verosimilitud de θ y verifique que coincide con el estimador anterior $\hat{\theta}_{MM}$. Demuestre además que este es un estimador eficiente.

c) [**5 pts**] Calcule el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\gamma}_{MV}$ para $\gamma = \mathbb{V}\text{ar}[X]$ y verifique que es un estimador asintóticamente insesgado.

d) [**5 pts**] Determine la distribución asintótica (aproximada en grandes muestras) de $\hat{\gamma}_{MV}$.

Tema 4. [**10 pts**] Considere un experimento que consiste en lanzamientos independientes y sucesivos de un dado equilibrado. Si el resultado es 1, 2 o 3, anotamos en una hoja de papel el número 1. Si la cara del dado es igual a 4, anotamos el número 2, y si es igual a 5 o 6, anotamos el número 3. Sea N el número de lanzamientos necesarios para que el producto de los números anotados supere 100000. Estime la probabilidad de que $N \leq 25$.

Tema 5. [**15 pts**] Sea $Y_n \sim \text{Gamma}(n, \beta)$.

a) [**5 pts**] Demuestre que $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$, donde $X_i \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Exp}(\beta)$.

b) [**10 pts**] Pruebe que

$$\frac{Y_n - n\beta}{\sqrt{Y_n}} \xrightarrow{\text{D}} N(0, \beta).$$