espol Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas

AÑO: **2024**

MATERIA: **Álgebra lineal**

EVALUACIÓN: Primera

TIEMPO DE DURACIÓN: **120 minutos**

PERIODO: **PRIMER TERMINO**

PROFESORES: Bracamonte Mireya, Laveglia Franca, Martin Carlos, Pastuizaca Maria Nela, Ramírez John, Valdiviezo Janet, Vielma Jorge.

FECHA: 04 de julio de 2024

COMPROMISO DE HONOR

Yo, ……………………………………………………………………………………………………..…………… al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que puedo usar un lápiz o esferográfico; que solo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen. No debo, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a las que se entreguen en esta evaluación y NO USARE calculadora. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.

Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptar la declaración anterior.

"Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".

FIRMA: ______________________ ***NÚMERO DE MATRÍCULA:*** ______________ ***PARALELO:*** _______

1. *(10 Puntos)*

Indicar si cada afirmación es **verdadera** o **falsa**, para lo cual debe marcar con una X, de la siguiente forma: *Verdadera*: _X__ y de forma similar si es falsa. Tenga en cuenta las siguientes reglas: **Cada selección incorrecta anulará una correcta. Su calificación final será el máximo entre 0 y la suma total de respuestas correctas bajo esta modalidad.**

Sea V un $\mathbb{K}$ −espacio vectorial. Entonces,

a. Si existe $v \in S$ que es combinación lineal de los vectores en $S - \{v\}$, entonces S es un conjunto linealmente dependiente.

Verdadera: _____ Falsa: _____

b. Si B es un conjunto que genera a V entonces B es una base de V

Verdadera: _____ Falsa: _____

c. Si S es un conjunto linealmente dependiente y $S \subseteq B$ entonces B también es un conjunto linealmente dependiente.

Verdadera: _____ Falsa: _____

d. Si S es un conjunto linealmente independiente y $B \subseteq S$ entonces B es linealmente independiente.

Verdadera: _____ Falsa: _____

e. Sean H y W dos subespacios vectoriales de V, tales que

$H = gen\,\{v_1, v_2, v_3\} \quad y \quad W = gen\,\{v_1, v_4, v_5\}.$

Entonces se puede concluir que $H \cap W = gen\,\{v_1\}$.

Verdadera: _____ Falsa: _____

2. ***(20 Puntos)***

Considere un sistema lineal de 4 ecuaciones y 4 incógnitas de la forma $\mathbf{AX}=\mathbf{b}$ y la matriz ampliada obtenida de este sistema $\left(\mathbf{A}|\mathbf{b}\right)$, si al escalonar esta matriz se obtienen las matrices indicadas más abajo. En cada caso justificadamente:

- Determine si existe solución, en caso afirmativo indique el conjunto solución.
- Si no existe solución, justifique e indique si es posible determinar una condición bajo la cual dicha solución exista.

a. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

c. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$

b. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-b \end{array}\right)$

d. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -a \end{array}\right)$

3. *(25 Puntos)*

Considere el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^3$, con las operaciones usuales definidas en $\mathbb{R}^3$.

Sean H_1 y H_2 dos subespacios vectoriales de V, dados por:

$$H_1 = gen\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\} \quad \text{y} \quad H_2 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + 3z = 0\right\}.$$

Determinar:

a. Si $H_1 \cup H_2$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

b. $H_1 \cap H_2$.

c. Si $H_1 \oplus H_2 = \mathbb{R}^3$.

4. *(20 Puntos)*

Considere el espacio vectorial $H = \{p(x) \in P_2(\mathbb{R}) / p'(2) = p(-1)\}$, con las operaciones usuales definidas en $P_2(\mathbb{R})$.

a. Pruebe que $\beta_1 = \{1 - x + x^2, -2 - 4x + 2x^2\}$ es una base de H.

b. Si $\beta_2 = \{v_1, v_2\}$ es otra base de H y $C = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ es la matriz de cambio de base de β_2 a β_1, encuentre los vectores $v_1\ y\ v_2$.

b. Encuentre el vector $u \in H$, si se conoce que $[u]_{\beta_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

5. (25 Puntos)

Sea V un $\mathbb{K}$ −espacio vectorial y sean U, W dos subespacios vectoriales de V. Demostrar que $U + W$ es un subespacio vectorial de V.