

AÑO: 2024

PERIODO: **PRIMER TERMINO**

MATERIA: **Álgebra lineal**

PROFESORES: Bracamonte Mireya, Laveglia Franca, Martin Carlos, Pastuzaca Maria Nela, Ramirez John, Valdiviezo Janet, Vielma Jorge.

EVALUACIÓN: Primera

TIEMPO DE DURACIÓN: **120 minutos**

FECHA: 04 de julio de 2024

**COMPROMISO DE HONOR**

Yo, ..... al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que puedo usar un lápiz o esferográfico; que solo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen. No debo, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a las que se entreguen en esta evaluación y NO USARE calculadora. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.

**Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptar la declaración anterior.**

"Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".

FIRMA: \_\_\_\_\_

NÚMERO DE MATRÍCULA: \_\_\_\_\_

PARALELO: \_\_\_\_\_

**1. (10 Puntos)**

Indicar si cada afirmación es **verdadera** o **falsa**, para lo cual debe marcar con una X, de la siguiente forma: Verdadera:  y de forma similar si es falsa. Tenga en cuenta las siguientes reglas: **Cada selección incorrecta anulará una correcta. Su calificación final será el máximo entre 0 y la suma total de respuestas correctas bajo esta modalidad.**

Sea  $V$  un  $\mathbb{K}$  –espacio vectorial. Entonces,

a. Si existe  $v \in S$  que es combinación lineal de los vectores en  $S - \{v\}$ , entonces  $S$  es un conjunto linealmente dependiente.

Verdadera: \_\_\_\_\_ Falsa: \_\_\_\_\_

b. Si  $B$  es un conjunto que genera a  $V$  entonces  $B$  es una base de  $V$

Verdadera: \_\_\_\_\_ Falsa: \_\_\_\_\_

c. Si  $S$  es un conjunto linealmente dependiente y  $S \subseteq B$  entonces  $B$  también es un conjunto linealmente dependiente.

Verdadera: \_\_\_\_\_ Falsa: \_\_\_\_\_

d. Si  $S$  es un conjunto linealmente independiente y  $B \subseteq S$  entonces  $B$  es linealmente independiente.

Verdadera: \_\_\_\_\_ Falsa: \_\_\_\_\_

e. Sean  $H$  y  $W$  dos subespacios vectoriales de  $V$ , tales que

$$H = \text{gen} \{v_1, v_2, v_3\} \quad \text{y} \quad W = \text{gen} \{v_1, v_4, v_5\}.$$

Entonces se puede concluir que  $H \cap W = \text{gen} \{v_1\}$ .

Verdadera: \_\_\_\_\_ Falsa: \_\_\_\_\_

**2. (20 Puntos)**

Considere un sistema lineal de 4 ecuaciones y 4 incógnitas de la forma  $\mathbf{AX}=\mathbf{b}$  y la matriz ampliada obtenida de este sistema  $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ , si al escalonar esta matriz se obtienen las matrices indicadas más abajo. En cada caso justificadamente:

- Determine si existe solución, en caso afirmativo indique el conjunto solución.
- Si no existe solución, justifique e indique si es posible determinar una condición bajo la cual dicha solución exista.

a. 
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

c. 
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

b. 
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-b \end{array}\right)$$

d. 
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -a \end{array}\right)$$

**3. (25 Puntos)**

Considere el espacio vectorial  $V = \mathbb{R}^3$ , con las operaciones usuales definidas en  $\mathbb{R}^3$ .

Sean  $H_1$  y  $H_2$  dos subespacios vectoriales de  $V$ , dados por:

$$H_1 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + 3z = 0 \right\}.$$

Determinar:

- a. Si  $H_1 \cup H_2$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^3$ .
- b.  $H_1 \cap H_2$ .
- c. Si  $H_1 \oplus H_2 = \mathbb{R}^3$ .

**4. (20 Puntos)**

Considere el espacio vectorial  $H = \{p(x) \in P_2(\mathbb{R}) / p'(2) = p(-1)\}$ , con las operaciones usuales definidas en  $P_2(\mathbb{R})$ .

- a. Pruebe que  $\beta_1 = \{1 - x + x^2, -2 - 4x + 2x^2\}$  es una base de  $H$ .
- b. Si  $\beta_2 = \{v_1, v_2\}$  es otra base de  $H$  y  $C = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$  es la matriz de cambio de base de  $\beta_2$  a  $\beta_1$ , encuentre los vectores  $v_1$  y  $v_2$ .
- b. Encuentre el vector  $u \in H$ , si se conoce que  $[u]_{\beta_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

**5. (25 Puntos)**

Sea  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial y sean  $U, W$  dos subespacios vectoriales de  $V$ . Demostrar que  $U + W$  es un subespacio vectorial de  $V$ .