RUBRICA DEL PRIMER EXAMEN DE CALCULO VECTORIAL
PAO 1 2024-2025

TEMA 1: Dados los puntos: P (1,2,1), Q (-1,2,3)

a) Encuentre la ecuación de la esfera que tiene como diámetro al segmento PQ
b) Encuentre la ecuación del plano que es tangente a la esfera hallada en a) en el punto P (1,2,1).
c) ¿Cuál es la distancia entre la recta que pasa por P y Q, con el punto (0,0,2)

Solución:

a) Determina el punto medio O: (0,2,2), determina mediante el cálculo de la distancia el radio de la esfera: $r = \sqrt{2}$, y con ello escribe correctamente la ecuación de la esfera: Hasta 4 puntos.
b) Determina el vector normal del plano por ejemplo (-2,0,2), y con el punto dado obtiene la ecuación del plano tangente: $x - z = 0$. Hasta 3 puntos.
c) Determina la ecuación de la recta: $(x, y, z) = (1,2,1) + t(-2,0,2), \quad t \in \mathbb{R}$. Con ello, usa la fórmula respectiva y halla la distancia entre la recta y el punto dado y resulta: d = 2. Hasta 3 puntos.

TEMA 2: Dada la siguiente función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x+y}, & x \neq -y \\ 0\,, & x = -y \end{cases}$$

a) Determine la continuidad de f en el punto $(0,0)$.
b) Hallar las derivadas direccionales de f en el punto $(0,0)$.
c) De acuerdo al resultado obtenido en (b), que puede decir respecto a las derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$.
d) De acuerdo a los resultados obtenidos en (a) y (c), que puede decir respecto a la diferenciabilidad de f en el punto $(0,0)$.

Solución:

a) Obtiene el valor del límite respectivo, el cual no existe, y lo compara con el valor de la función en el punto de interés y concluye que f no es continua en (0,0). Hasta 3 puntos.
b) Aplica la definición de las derivadas direccionales y obtiene que la derivada direccional de f en el punto $(0,0)$, sólo existe en dos direcciones, es decir, para $u = (\pm 1$,0). Hasta 3 puntos.
c) Usando el resultado obtenido en (b), se puede afirmar que la derivada parcial de f respecto a x existe, y está dada por $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, mientras que la derivada parcial de f respecto a y no existe. Hasta 2 puntos.
d) Como f no es continua en el punto $(0,0)$ (por (a)), f no es diferenciable en el punto $(0,0)$. Por otro lado, usando (c) podemos concluir también, que f no es diferenciable en el punto $(0,0)$, ya que una de las derivadas parciales de f no existe en el punto $(0,0)$. Hasta 2 puntos.

TEMA 3: Para la función escalar $z = f(u, v)$ se conoce que f es de clase C^2 en $\mathbb{R}^2$,

$u = \alpha x$ y $v = \beta y$ con $\alpha, \beta > 0$ constantes. Si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(\alpha, \beta) = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}$$

Calcule:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1, 1) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1, 1)$$

Solución: Primero obtiene correctamente las expresiones generales para las segundas derivadas esto es:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \quad ; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \beta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

Hasta 6 puntos.

Luego con esto se deduce que:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

Evaluando este resultado con $x_0 = y_0 = 1$ se verifica que $u_0 = \alpha \ y \ v_0 = \beta$ y así finalmente:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,1) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1,1) = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$$

Hasta 4 puntos.

TEMA 4: La función $T(x, y) = ln(2x^2 + 3xy - y)$ da la temperatura de la superficie de una montaña en la latitud x y longitud y. Unos montañeros están perdidos en la posición $(1,2)$ y corren el riesgo de morir congelados.

a) ¿En qué dirección deben moverse para evitar el riesgo de congelación lo más rápidamente posible?
b) Si se mueven en una dirección equivocada de manera que la longitud decrece la mitad de lo que aumenta la latitud, ¿aumentará o disminuirá el riesgo de hipotermia?
c) ¿En qué dirección, si es que existe, deben moverse para que la temperatura permanezca constante?

Solución:

a) Estando en la posición $(1,2)$, para evitar el riesgo de congelarse lo más rápidamente posible, los montañeros deben moverse en la dirección del gradiente de la función temperatura, así calculando el gradiente resulta: $\nabla T(1,2) = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Hasta 3 puntos.

b) Ahora, los montañeros se moverán en una dirección desconocida $V = (x, y)$ tal que, si x aumenta un valor a, entonces y disminuirá un valor $\frac{a}{2}$, o, lo que es igual, se moverán en una dirección $V = \left(a, -\frac{a}{2}\right) = \left(1, -\frac{1}{2}\right)$, el mismo que, haciéndolo unitario queda así $v = \frac{\left(1,-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}} = \frac{\left(1,-\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Notamos que las derivadas parciales $\frac{\partial T}{\partial x}$ y $\frac{\partial T}{\partial y}$ son continuas en una vecindad del punto $(1,2)$, por lo que T es diferenciable en $(1,2)$. Luego, la derivada direccional en el punto $(1,2)$ y en la dirección del vector $v = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ la podemos obtener con la siguiente expresión:

$$\frac{\partial T}{\partial v}(1,2) = \nabla T(1,2) \cdot v$$
$$\frac{\partial T}{\partial v}(1,2) = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$
$$\frac{\partial T}{\partial v}(1,2) = \frac{10}{3\sqrt{5}} - \frac{1}{3\sqrt{5}}$$
$$\frac{\partial T}{\partial v}(1,2) = \frac{9}{3\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$
$$\frac{\partial T}{\partial v}(1,2) = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

Como la variación que experimenta la temperatura es de signo positivo, esto es que en esa dirección la temperatura aumentará, entonces el riesgo de hipotermia disminuye. Hasta 3 puntos.

c) Ahora suponga $v = (a, b)$ la dirección en la que se debe mover para que la variación de la temperatura será cero, si se considera el vector $v = (a, b)$ unitario, entonces:

$$a^2 + b^2 = 1.$$

$$\frac{\partial T}{\partial v}(1,2) = \nabla T(1,2) \cdot v$$
$$0 = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right) \cdot (a, b)$$
$$0 = \frac{5a}{3} + \frac{b}{3}$$
$$-\frac{5a}{3} = \frac{b}{3}$$
$$b = -5a$$

Como:

$$a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a^2 + (-5a)^2 = 1 \Rightarrow a^2 + 25a^2 = 1$$
$$a = \pm\frac{1}{\sqrt{26}} \Rightarrow b = \pm\frac{5}{\sqrt{26}}$$

Entonces:

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{26}}, \frac{5}{\sqrt{26}}\right), v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{26}}, -\frac{5}{\sqrt{26}}\right), v_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{26}}, \frac{5}{\sqrt{26}}\right), v_4 = \left(-\frac{1}{\sqrt{26}}, -\frac{5}{\sqrt{26}}\right).$$

Pero, v_1 y v_4 no satisfacen la ecuación $b = -5a$

Por lo tanto, las direcciones en las que pueden moverse los montañistas para no experimentar cambio en la temperatura son:

$$v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{26}}, -\frac{5}{\sqrt{26}}\right)$$

$$v_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{26}}, \frac{5}{\sqrt{26}}\right)$$

Hasta 4 puntos.

TEMA 5: Dado $f(x, y, z) = x^2 y e^{(x+z^2+1)}$

a) Obtenga el polinomio de Taylor de segundo orden de $f(x)$ alrededor del punto $(-1,1,0)$.
b) Usando el polinomio obtenido en (a) aproxime la función $f(x)$ alrededor del punto $(-0.9\ , 1.1,\ 0.1)$

Solución:

a) Plantea la fórmula de Taylor de manera correcta, obteniendo las respectivas derivadas y de ello escribe:

$$\boldsymbol{P_2(x, y, z) = f(-1, 1, 0) + (f_x\, f_y\, f_z).\begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x+\ \ 1\ \ y-1\ \ z).\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{P_2(x, y, z) = 1 + (-1\ \ 1\ \ 0).\begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x+\ \ 1\ \ y-1\ \ z).\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix}}$$

Lo que resulta en el siguiente polinomio de segundo grado:

$$\boxed{P_2(x, y, z) = -x - xy - \frac{x^2}{2} + z^2 - \frac{1}{2}}$$

Hasta 7 puntos.

b) Remplaza correctamente los valores en el polinomio obtenido y luego de reducir resulta:

$$\boxed{P_2(-0.9, \quad 1.1, \quad 0.1) = \frac{199}{200}}$$

Hasta 3 puntos.