Año:	2024	Periodo:	I PAO
Materia:	Ecuaciones Diferenciales y Álgebra Lineal	Profesores:	Jesús Aponte, Carlos Martín Luis Fernando Mejías
Evaluación:	Segunda	Fecha:	26 de agosto de 2024

COMPROMISO DE HONOR

Yo, ____, al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que solo puedo un lápiz o esferográfico y borrador, que sólo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen y que cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído debo apagarlo y depositarlo donde se me indique, junto con cualquier otro material que se encuentre acompañándome. No debo, además, consultar libros, notas ni apuntes adicionales a los que se entreguen en esta evaluación. Los problemas debo resolverlos de manera ordenada.
Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptado la declaración anterior.

"Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".

Firma: __________________________ Número de matrícula: __________________ Paralelo: __________

1. (10 puntos) Halle la solución general de ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' + 4y = 3\sec^2(2t),\ 0 < t < \pi/4.$$

Solución: La solución general de la ecuación homogénea asociada es

$$y_h(t) = c_1\cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t,\ 0 < t < \pi/4.$$

Una solución particular a la ecuación dada es

$$y_p(t) = v_1(t)\cos 2t + v_2(t)\operatorname{sen} 2t,\ 0 < t < \pi/4,$$

donde

$$v_1(t) = -\int \frac{3\sec^2 2t \operatorname{sen} 2t}{W[\cos 2t, \operatorname{sen} 2t](t)}\,dt = -\frac{3}{2}\int \sec 2t \tan 2t\,dt = -\frac{3}{4}\sec 2t$$

y

$$v_2(t) = \int \frac{3\sec^2 2t \cos 2t}{W[\cos 2t, \operatorname{sen} 2t](t)}\,dt = \frac{3}{2}\int \sec 2t\,dt = \frac{3}{4}\ln(\sec 2t + \tan 2t).$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación planteada es

$$\begin{aligned} y_h(t) = y_h(t) + y_p(t) =& c_1\cos 2t + c_2\operatorname{sen} 2t - \frac{3}{4}\sec(2t)\cos 2t + \frac{3}{4}\ln(\sec 2t + \tan 2t)\operatorname{sen} 2t \\ =& c_1\cos 2t + c_2\operatorname{sen} 2t - \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\ln(\sec 2t + \tan 2t)\operatorname{sen} 2t. \end{aligned}$$

Rúbrica:

Halla la solución general homogénea.	1-2 puntos
Usa variación de parámetros para hallar una solución particular.	1–7 puntos
Halla la solución general	1 punto

2. Considere la base $\mathcal{B} = \{(1,2,1),(1,0,0),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la única transformación lineal que satisface

$$\begin{aligned} T(1,2,1) &= (0,0,0) \\ T(1,0,0) &= (1,2,1) \\ T(0,0,1) &= (1,0,0). \end{aligned}$$

(a) (3 puntos) Halle la matriz de T respecto a la base $\mathcal{B}$.

Solución:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rúbrica:

Halla la matriz de T respecto a la base $\mathcal{B}$	1–3 puntos.

(b) (4 puntos) Calcule todos los valores propios de T y sus correspondientes espacios propios.

Solución: Podemos calcular el polinomio característico de T usando la matriz $[T]_{\mathcal{B}}$:

$$p_T(t) = p_{[T]_{\mathcal{B}}}(t) = \begin{vmatrix} t & -1 & 0 \\ 0 & t & -1 \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix} = t^3.$$

Luego, el único valor propio de T es 0. El espacio propio asociado a este valor propio es simplemente el núcleo de T. Note que $(1,2,1) \in \mathrm{N}(T)$, por lo que la dimensión del núcleo es al menos 1. Sin embargo, la matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ es escalón reducida por filas, y tiene dos filas no nulas, de donde $\dim \mathrm{N}(T) = 1$. Por tanto, $\mathrm{N}(T) = \mathrm{gen}\{(1,2,1)\}$.

Rúbrica:

Demuestra que 0 es el único valor propio de T	1–2 puntos.
Calcula correctamente el espacio propio asociado al valor propio 0 de T	1–2 puntos.

(c) (3 puntos) Calcule las dimensiones del núcleo de T y de la imagen de T.

Solución: De la parte (b) y el teorema del núcleo y la imagen, se tiene que $\dim \mathrm{N}(T) = 1$ y $\dim \mathrm{Im}(T) = 2$. Note que esta información también puede a partir de $[T]_{\mathcal{B}}$, pues el rango de filas de esta matriz es exactamente 2.

Rúbrica:

Calcula correctamente las dimensiones del núcleo de T y de la imagen de T.	1–3 puntos.

3. Sea u un número real y $H_u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal dada por

$$H_u(x, y) = (\cosh(u)x + \operatorname{senh}(u)y, \operatorname{senh}(u)x + \cosh(u)y).$$

(a) (3 puntos) Halle la matriz de H_u respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Solución: Se tiene

$$H_u(1, 0) = (\cosh u, \operatorname{senh} u),$$

y

$$H_v(0, 1) = (\operatorname{senh} u, \cosh u),$$

por lo que, matricialmente, H_u se expresa como

$$H_u \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh u & \operatorname{senh} u \\ \operatorname{senh} u & \cosh u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Rúbrica:

Calcula correctamente la matriz de H_u respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$.	1–3 puntos.

(b) (3 puntos) Demuestre que H_u es un isomorfismo.

Solución: Note que

$$\begin{vmatrix} \cosh u & \operatorname{senh} u \\ \operatorname{senh} u & \cosh u \end{vmatrix} = \cosh^2(u) - \operatorname{senh}^2(u) = 1,$$

de manera que

$$\operatorname{Im}(H_u) = \operatorname{Col}\left(\begin{bmatrix} \cosh u & \operatorname{senh} u \\ \operatorname{senh} u & \cosh u \end{bmatrix} \right) = \mathbb{R}^2.$$

Por tanto, H_u es un isomorfismo.

Rúbrica:

Demuestra que H_u es un isomorfismo.	1–3 puntos.

(c) (4 puntos) Sean v otro número real. Use las representaciones matriciales de H_u y H_v para demostrar que

$$H_{u+v} = H_u H_v.$$

Sugerencia: Recuerde las identidades trigonométricas hiperbólicas $\cosh(u + v) = \cosh u \cosh v + \operatorname{senh} u \operatorname{senh} v$ y $\operatorname{senh}(u + v) = \operatorname{senh} u \cosh v + \cosh u \operatorname{senh} v$

Solución: Tenemos,

$$\begin{aligned} H_u H_v \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cosh u & \operatorname{senh} u \\ \operatorname{senh} u & \cosh u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh v & \operatorname{senh} v \\ \operatorname{senh} v & \cosh v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cosh u \cosh v + \operatorname{senh} u \operatorname{senh} v & \operatorname{senh} u \cosh v + \cosh u \operatorname{senh} v \\ \operatorname{senh} u \cosh v + \cosh u \operatorname{senh} v & \cosh u \cosh v + \operatorname{senh} u \operatorname{senh} v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cosh(u+v) & \operatorname{senh}(u+v) \\ \operatorname{senh}(u+v) & \cosh(u+v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= H_{u+v} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Rúbrica:

Demuestra que $H_{u+v} = H_u H_v$.	1–3 puntos.

4. (10 puntos) Resuelva el PVI

$$y' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} y, \quad y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Solución: El polinomio caracter'sitico de esta matriz es

$$p(t) = t^2 - 2t - 8 = (t-4)(t+2)$$

De donde se obtienen los valores propios 4 y -2. Los espacios propios correspondientes son

$$E_4 = \text{gen}\{(1,1)\},$$

y

$$E_{-2} = \text{gen}\{(-1,1)\}.$$

De aquí obtenemos las soluciones l.i.

$$y_1(t) = e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; y_2(t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y la solución general es por tanto

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = \begin{bmatrix} e^{4t} & -e^{-2t} \\ e^{4t} & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Si $y(0) = (1, -1)$, entonces

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, la solución al PVI es

$$y(t) = \begin{bmatrix} e^{4t} & -e^{-2t} \\ e^{4t} & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Rúbrica:

Calcula correctamente el polinomio característico y los valores propios	1–2 puntos
Calcula correctamente vectores los vectores propios correspondientes	1–3 puntos
Halla la solución general	1–3 puntos
Resuelve el PVI	1–2 puntos

5. Considere un sistema de masa y resorte sin amortiguamiento que consiste de un objeto de masa $m = 1\,\mathrm{kg}$ y coeficiente de elasticidad $k = 4\,\mathrm{N/m}$. Suponga que sobre el objeto también actúa una fuerza externa dada por

$$f(t) = \begin{cases} 1\,\mathrm{N}, & \text{si } \pi \le t < 3\pi; \\ 0\,\mathrm{N}, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea $x = x(t)$ la posición del objeto, en metros, después de t segundos.

(a) (3 puntos) Plantee la ecuación diferencial que modela el movimiento del objeto.

Solución: La ecuación diferencial que modela este fenómeno es

$$\ddot{x} + 4x = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi \le t < 3\pi; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Rúbrica:

Plantea correctamente la ecuación diferencial que modela el movimiento del objeto.	1–3 puntos.

(b) (7 puntos) Halle la solución a la ecuación planteada en la parte (a) para las condiciones iniciales $x(0) = 3\,\text{m}$ y $\dot{x}(0) = 7\,\text{m/seg}$.

Solución: Primero notemos que $f(t) = H(t-\pi) - H(t-3\pi)$. Así, el PVI que modela el fenómeno es

$$\ddot{x} + 4x = H(t-\pi) - H(t-3\pi), \quad x(0) = 3,\ \dot{x}(0) = 7.$$

Para resolver este PVI, usamos transformadas de Laplace:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\ddot{x}\} + 4\mathcal{L}\{x\} &= \mathcal{L}\{H(t-\pi) - H(t-3\pi)\} \\
s^2X - sx(0) - \dot{x}(0) + 4X &= \frac{e^{-\pi s}}{s} - \frac{e^{-3\pi s}}{s} \\
(s^2+4)X &= \frac{e^{-\pi s}}{s} - \frac{e^{-3\pi s}}{s} + 3s + 7 \\
X(s) &= \frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+4)} - \frac{e^{-3\pi s}}{s(s^2+4)} + \frac{3s+7}{s^2+4} \\
&= e^{-\pi s}\left(\frac{1}{4}\frac{1}{s} - \frac{1}{4}\frac{s}{s^2+4}\right) - e^{-3\pi s}\left(\frac{1}{4}\frac{1}{s} - \frac{1}{4}\frac{s}{s^2+4}\right) + 3\frac{s}{s^2+4} + \frac{7}{2}\frac{2}{s^2+4}.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} \\
&= H(t-\pi)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2(t-\pi)\right) - H(t-3\pi)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2(t-3\pi)\right) + 3\cos 2t + \frac{7}{2}\operatorname{sen} 2t.
\end{aligned}$$

Rúbrica:

Aplica correctamente la transformada de Laplace	1 punto
Calcula correctamente $X(s)$ y la descompone en fracciones parciales	1–2 puntos
Aplica correctamente la transformada inversa de Laplace	1–2 puntos
Resuelve el PVI.	1–2 puntos