espol Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas

AÑO: **2024**

MATERIA: **Álgebra lineal**

EVALUACIÓN: Segunda

TIEMPO DE DURACIÓN: **120 minutos**

PERIODO: **PRIMER TERMINO**

PROFESORES: Bracamonte Mireya, Laveglia Franca, Martin Carlos, Pastuizaca María Nela, Ramírez John, Valdiviezo Janet, Vielma Jorge.

FECHA: 29 de agosto de 2024

COMPROMISO DE HONOR

Yo, ……….…………. al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que puedo usar un lápiz o esferográfico; que solo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen. No debo, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a las que se entreguen en esta evaluación y NO USARE calculadora. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.

Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptar la declaración anterior.

"Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".

FIRMA: ______________________________ ***NÚMERO DE MATRÍCULA:*** ________________ ***PARALELO:*** ______

1. ***(10 Puntos)***

Evalúe la veracidad de las siguientes proposiciones. Marque **"Verdadero"** si la proposición es completamente cierta en todos los casos. Si encuentra alguna situación en la que la proposición no se cumpla, marque **"Falso"**.

Recuerde: solo las proposiciones completamente verdaderas deben marcarse como "Verdadero". En cualquier otro caso, marque "Falso"

Tenga en cuenta las siguientes reglas: **Cada selección incorrecta anulará una correcta. Su calificación final será el máximo entre 0 y la suma total de respuestas correctas bajo esta modalidad.**

a. Sean V un espacio con producto interno $(\cdot \mid \cdot)$ y u, v dos vectores ortogonales en V. Entonces

- $\{u, v\}$ es un conjunto linealmente independiente. Verdadera: _____ Falsa: _____
- u y $u + v$ son ortogonales si u es no nulo Verdadera: _____ Falsa: _____
- Si $W = gen\{v\}$ entonces $u \in W^{\perp}$ Verdadera: _____ Falsa: _____
- Si $||u|| = ||v||$ entonces $u = v$ Verdadera: _____ Falsa: _____

b. Sea A una matriz con polinomio característico $p(\lambda) = (\lambda - 2)(2 - \lambda)(3 - \lambda)^4(\lambda^2 + \lambda + 1)$. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- A es una matriz 8×8 Verdadera: _____ Falsa: ____
- 2 es un valor propio con multiplicidad algebraica 2 Verdadera: _____ Falsa: ____
- A es una matriz simétrica Verdadera: _____ Falsa: ____

c. Sea A una matriz, tal que $E_1 = gen\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ y $E_2 = gen\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ son sus espacios propios.

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- El polinomio característico de A, tiene grado 2 — Verdadera: ____ Falsa: _____
- A es diagonalizable — Verdadera: ____ Falsa: _____
- A es diagonalizable ortogonalmente — Verdadera: ____ Falsa: _____

2. *(20 Puntos)*

Construir, en caso de ser posible, una Transformación lineal $T: P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{2X2}(\mathbb{R})$ tal que

$$Ker(T) = gen\{x^2 - x, x + 1, x^2 - 3x - 2\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in Im(T)$$

3. (25 Puntos)

Considere el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^3$ con el producto interno:

$\forall\, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$: $\langle v_1, v_2 \rangle = {v_1}^t A v_2$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Sea $W = Gen\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Determine:

a. El complemento ortogonal de W.

b. La proyección ortogonal de $v = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ sobre W.

4. *(25 Puntos)*

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 3 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a. Determinar los valores de α y β, para los cuales 3 es un autovalor de la matriz A.

b. Determinar los valores de α y β, para los cuales $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un autovector de la matriz A.

c. Para $\alpha = 0$, ¿la matriz A es diagonalizable? En caso afirmativo, encuentra una matriz diagonal semejante a A.

5. (20 Puntos)

Sea B una matriz invertible de orden n.

Demuestre que la transformación lineal $T: M_{nxn}(\mathbb{R}) \to M_{nxn}(\mathbb{R})$ definida por: $T(A) = AB$ es un isomorfismo.