

<b>AÑO:</b>	2024	<b>PERÍODO:</b>	I PAO	<b>MATERIA:</b>	Cálculo de una variable
<b>PROFESORES:</b>	Álvarez I., Avilés J., Baquerizo G., Carrión L., Cordero M., Díaz R., García E., Hernández C., Laveglia F., López E., Mejía M., Ramos M., Toledo X., Valdiviezo J.				
<b>EVALUACIÓN:</b>	SEGUNDA		<b>FECHA:</b>	26/agosto/2024	

Examen:	50
Lección:	35
Quiz:	10
Deber:	5
Total:	100

1. (5 PUNTOS) La eficiencia  $E$  (en porcentaje) del operador de una máquina, se ha definido como una función del tiempo  $t$  (en horas de trabajo); y, está dada para  $0 \leq t \leq 8$ , por la siguiente integral indefinida:

$$E(t) = \int \left( -8t + \frac{89}{3} \right) dt$$

- (a) (4 PUNTOS) Obtenga la expresión para  $E(t)$ , si se conoce que la eficiencia del operador, cuando ha trabajado 2 horas, es de 76%; es decir,  $E(2) = 76$ .
- (b) (1 PUNTO) Calcule la eficiencia del operador, cuando ha trabajado 3 horas. Aproxime su respuesta con dos decimales.

**Solución:**

Se aplica la PROPIEDAD DE LINEALIDAD:

$$E(t) = -8 \int t dt + \frac{89}{3} \int dt$$

$$E(t) = -4t^2 + \frac{89}{3}t + C ; C \in \mathbb{R}$$

Pero:

$$E(2) = -4(2)^2 + \frac{89}{3}(2) + C = 76$$

$$C = 76 + 16 - \frac{178}{3} = 92 - \frac{178}{3} = \frac{98}{3}$$

$$\therefore E(t) = -4t^2 + \frac{89}{3}t + \frac{98}{3} ; 0 \leq t \leq 8$$

Se evalúa la función  $E$ , cuando  $t = 3$ :

$$E(3) = -4(3)^2 + \frac{89}{3}(3) + \frac{98}{3} = -36 + 89 + \frac{98}{3} = 53 + \frac{98}{3} = \frac{257}{3} \approx 85.67$$

$\therefore$  La eficiencia del operador, cuando ha trabajado 3 horas, es del 85.67%.

2. (7 PUNTOS) Obtenga la familia de antiderivadas correspondiente a:

$$\int x^3 [\ln(x)]^2 dx$$

**Solución:**

Se aplica la TÉCNICA DE INTEGRACIÓN POR PARTES por primera vez:

$$\begin{array}{l|l}
 u = [\ln(x)]^2 & dv = x^3 dx \\
 du = 2\ln(x) \left(\frac{1}{x}\right) dx & v = \frac{x^4}{4}
 \end{array}$$

$$\int x^3 [\ln(x)]^2 dx = [\ln(x)]^2 \left(\frac{x^4}{4}\right) - \int \left(\frac{x^4}{4}\right) \left(2 \ln(x) \left(\frac{1}{x}\right) dx\right)$$

$$\int x^3 [\ln(x)]^2 dx = \frac{x^4}{4} [\ln(x)]^2 - \frac{1}{2} \int x^3 \ln(x) dx$$

Se aplica la TÉCNICA DE INTEGRACIÓN POR PARTES por segunda vez:

$$\begin{array}{l|l}
 u = \ln(x) & dv = x^3 dx \\
 du = \frac{1}{x} dx & v = \frac{x^4}{4}
 \end{array}$$

Entonces:

$$\int x^3 [\ln(x)]^2 dx = \frac{x^4}{4} [\ln(x)]^2 - \frac{1}{2} \left( \ln(x) \left(\frac{x^4}{4}\right) - \int \left(\frac{x^4}{4}\right) \left(\frac{1}{x} dx\right) \right)$$

$$\int x^3 [\ln(x)]^2 dx = \frac{x^4}{4} [\ln(x)]^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{x^4}{4} \ln(x) - \frac{1}{4} \int x^3 dx \right)$$

$$\int x^3 [\ln(x)]^2 dx = \frac{x^4}{4} [\ln(x)]^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{x^4}{4} \ln(x) - \frac{1}{4} \left(\frac{x^4}{4}\right) \right) + C$$

$$\boxed{\therefore \int x^3 [\ln(x)]^2 dx = \frac{x^4}{4} [\ln(x)]^2 - \frac{x^4}{8} \ln(x) + \frac{x^4}{32} + C ; C \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\therefore \int x^3 [\ln(x)]^2 dx = \frac{x^4}{4} \left( [\ln(x)]^2 - \frac{1}{2} \ln(x) + \frac{1}{8} \right) + C ; C \in \mathbb{R}}$$

3. (6 PUNTOS) Dada la función  $h$  tal que:

$$h(x) = \int_2^{\sqrt[3]{x}} \cos(\pi u^2) du$$

Determine la pendiente  $m_t$  de la recta tangente a  $h$  en el punto cuya abscisa es 8.

**Solución:**

Para determinar la pendiente requerida, primero se debe obtener  $h'(x)$ , utilizando el PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO:

$$h'(x) = \frac{d}{dx} \left( \int_2^{\sqrt[3]{x}} \cos(\pi u^2) du \right)$$

$$h'(x) = \cos(\pi (\sqrt[3]{x})^2) \cdot \frac{d}{dx} (\sqrt[3]{x})$$

$$h'(x) = \cos\left(\pi x^{\frac{2}{3}}\right) \cdot \frac{d}{dx} \left(x^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$h'(x) = \cos\left(\pi x^{\frac{2}{3}}\right) \left(\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}\right)$$

$$h'(x) = \frac{\cos(\pi \sqrt[3]{x^2})}{3 \sqrt[3]{x^2}}$$

Para obtener el valor de la pendiente  $m_t$  de la recta tangente, se evalúa la abscisa dada  $x = 8$  y se simplifica:

$$m_t = h'(8) = \frac{\cos(\sqrt[3]{8^2} \pi)}{3 \sqrt[3]{8^2}} = \frac{\cos(((2^3)^2)^{1/3} \pi)}{3 ((2^3)^2)^{1/3}} = \frac{\cos(4\pi)}{3(4)} = \frac{1}{12}$$

$$\boxed{\therefore m_t = \frac{1}{12}}$$

4. (8 PUNTOS) Aplicando las propiedades de la integral definida, evalúe:

(a) (4 PUNTOS)  $\int_{-1}^2 |x - 1| dx$

**Solución:**

Se descomponen la función valor absoluto, con base en su definición:

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1, & x \geq 1 \\ -(x - 1), & x < 1 \end{cases}$$

Se aplica la PROPIEDAD ADITIVA de las integrales definidas:

$$\int_{-1}^2 |x - 1| dx = \int_{-1}^1 (1 - x) dx + \int_1^2 (x - 1) dx$$

$$\int_{-1}^2 |x - 1| dx = \left( x - \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_{-1}^1 + \left( \frac{1}{2} x^2 - x \right) \Big|_1^2$$

$$\int_{-1}^2 |x - 1| dx = \left( 1 - \frac{1}{2} (1^2) \right) - \left( -1 - \frac{1}{2} (-1)^2 \right) + \left( \frac{1}{2} (2^2) - 2 \right) - \left( \frac{1}{2} (1^2) - 1 \right)$$

$$\int_{-1}^2 |x - 1| dx = \frac{1}{2} - \left( -\frac{3}{2} \right) + 0 - \left( -\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\therefore \int_{-1}^2 |x - 1| dx = \frac{5}{2}}$$

(b) (4 PUNTOS)  $\int_0^{24\pi} |\text{sen}(x)| dx$

**Solución:**

La función  $y = \text{sen}(x)$  tiene período fundamental  $T = 2\pi$ . Para la función en el integrando  $|\text{sen}(x)|$ , el período fundamental se reduce a la mitad, esto es,  $\pi$ .

Por lo que:

$$\int_0^{24\pi} |\text{sen}(x)| dx = \underbrace{\int_0^{\pi} |\text{sen}(x)| dx + \int_{\pi}^{2\pi} |\text{sen}(x)| dx + \dots + \int_{23\pi}^{24\pi} |\text{sen}(x)| dx}_{24 \text{ veces}}$$

Considerando la periodicidad, se suman las integrales; y, dado que la función  $y = \text{sen}(x)$  es positiva en el intervalo  $[0, \pi]$ , se reemplaza  $|\text{sen}(x)|$  como  $\text{sen}(x)$ :

$$\int_0^{24\pi} |\text{sen}(x)| dx = 24 \left( \int_0^{\pi} |\text{sen}(x)| dx \right) = 24 \left( \int_0^{\pi} \text{sen}(x) dx \right)$$

Se evalúa la integral definida:

$$\int_0^{24\pi} |\text{sen}(x)| dx = 24(-\cos(x)) \Big|_0^{\pi} = -24(\cos(x)) \Big|_0^{\pi}$$

$$\int_0^{24\pi} |\text{sen}(x)| dx = -24(\cos(\pi) - \cos(0)) = -24(-1 - 1) = -24(-2)$$

$$\therefore \int_0^{24\pi} |\text{sen}(x)| dx = 48$$

**5. (6 PUNTOS) Dada la siguiente integral impropia:**

$$I = \int_0^{+\infty} e^{x-e^x} dx$$

- (a) (1 PUNTO) Indique su definición mediante el límite correspondiente.
- (b) (2 PUNTOS) Obtenga la familia de antiderivadas para la función en el integrando.
- (c) (3 PUNTOS) Evalúe la integral impropia, y concluya, si converge o diverge.

**Solución:**

Se trata de una integral impropia con un límite de integración infinito, por lo que:

$$I = \int_0^{+\infty} e^{x-e^x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{x-e^x} dx$$

Se aplica una de las propiedades de los exponentes a la función en el integrando:

$$I = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^x e^{-e^x} dx$$

Se emplea la TÉCNICA DE SUSTITUCIÓN O CAMBIO DE VARIABLE para obtener la familia de antiderivadas de la función en el integrando:

$$u = -e^x \quad \rightarrow \quad du = -e^x dx$$

$$\int e^x e^{-e^x} dx = - \int e^{-e^x} (-e^x dx) = - \int e^u du = -e^u + C = -e^{-e^x} + C$$

$$\int e^x e^{-e^x} dx = -\frac{1}{e^{e^x}} + C$$

Se evalúa la antiderivada en los extremos y se obtiene el límite correspondiente:

$$I = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^x e^{-e^x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{e^{e^x}} \right) \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{e^{e^b}} + \frac{1}{e^{e^0}} \right)$$

$$I = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{e^{e^b}} + \frac{1}{e^1} \right) = - \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{e^b}} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{e} = - \underbrace{\frac{1}{e^{+\infty}}}_0 + \frac{1}{e}$$

$$\boxed{\therefore I = \frac{1}{e}}$$

Con lo cual, se concluye que la integral impropia es convergente.

6. (10 PUNTOS) Calcule el área  $A$  de la siguiente región  $R$  definida en el plano cartesiano:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 4 - x \leq y \leq 4 - (x - 2)^2 \wedge (1 \leq x \leq 3)\}$$

Para el efecto, realice lo siguiente:

- (3 PUNTOS) Bosqueje la región  $R$  en el plano cartesiano adjunto, identificando puntos característicos y etiquetas adecuadas.
- (3 PUNTOS) Dibuje la(s) franja(s) representativa(s) y establezca la(s) expresión(es) para el cálculo de su(s) área(s).
- (4 PUNTOS) Plantee y evalúe la(s) integral(es) definida(s) correspondiente(s) para el cálculo del área  $A$ .

**Solución:**

La región referida se establece en el primer cuadrante, considerando que en ella intervienen: la parábola cóncava hacia abajo, con vértice en  $V(2, 4)$ , cuyas intersecciones con el eje  $X$  se presentan cuando  $x = 0$  o  $x = 4$ ; dos rectas verticales en  $x = 1$  y  $x = 3$ ;

y, una recta oblicua con pendiente  $-1$  con puntos de intersección con los ejes en  $(4, 0)$  y  $(0, 4)$ .

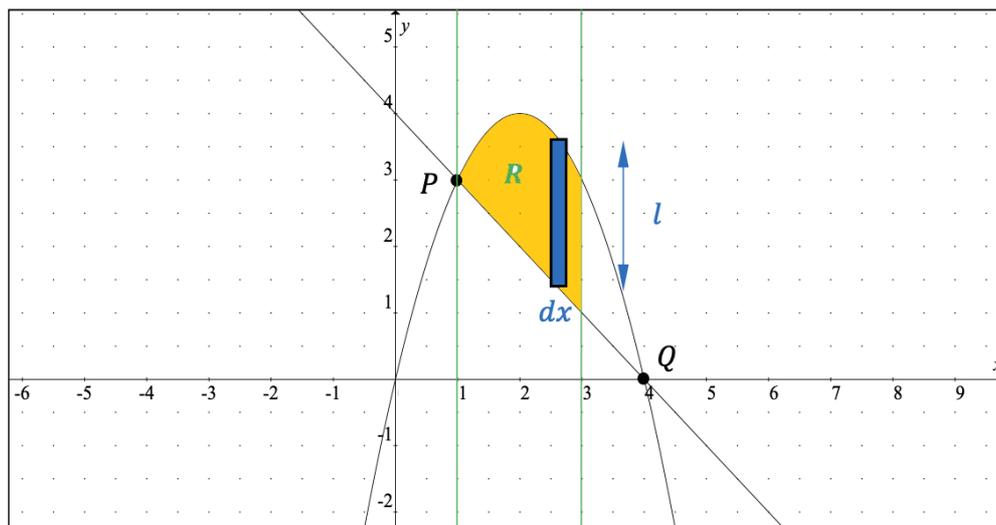
Luego, se determinan las coordenadas de los puntos de intersección entre las funciones que limitan la región:

$$\begin{aligned}
 4 - x &= 4 - (x - 2)^2 \\
 x &= (x - 2)^2 \\
 x &= x^2 - 4x + 4 \\
 x^2 - 5x + 4 &= 0 \\
 (x - 1)(x - 4) &= 0 \\
 (x = 1) \vee (x = 4)
 \end{aligned}$$

Evaluando alguna de las dos funciones se obtienen las ordenadas respectivas, y, por ende, los pares ordenados que representan los puntos de intersección entre ambas funciones:

$$P(1, 3) \wedge Q(4, 0)$$

La representación gráfica de la región  $R$  se muestra a continuación:



Se establece la expresión para el área de la franja representativa:

$$\begin{aligned}
 dA &= l \, dx \\
 dA &= (y_{sup} - y_{inf}) \, dx \\
 dA &= (4 - (x - 2)^2) - (4 - x) \, dx \\
 dA &= (-x^2 + 5x - 4) \, dx \\
 dA &= (-x^2 + 5x - 4) \, dx ; x \in [1, 3]
 \end{aligned}$$

Luego, el área  $A$  de la región, se plantea y se calcula así:

$$A = \int_1^3 (-x^2 + 5x - 4) \, dx = \left[ -\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 4x \right]_1^3$$

$$A = \left( -\frac{1}{3}(27) + \frac{5}{2}(9) - 4(3) \right) - \left( -\frac{1}{3}(1) + \frac{5}{2}(1) - 4(1) \right)$$

$$A = -9 + \frac{45}{2} - 12 + \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4$$

$$A = -17 + \frac{40}{2} + \frac{1}{3} = -17 + 20 + \frac{1}{3} = 3 + \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\therefore A = \frac{10}{3}u^2}$$

7. (8 PUNTOS) En una empresa, se requiere reemplazar, con una varilla de acero, un tramo de la línea de producción, para lo cual, se ha modelado la forma de dicho tramo, a escala real, según la siguiente curva  $C$  dada en coordenadas paramétricas:

$$C: \begin{cases} x(t) = 2t^2 \\ y(t) = \frac{4}{3}t^3 \end{cases} ; 0 \leq t \leq \sqrt{3}$$

Si  $x$  e  $y$  están dadas en *metros* y además el proveedor cuenta con varillas de acero que miden 6, 9 o 12 *metros* de longitud, determine mediante el cálculo correspondiente, cuál es la varilla que se debe adquirir.

**Solución:**

Se identifica la necesidad de calcular la longitud del tramo por reemplazar, como la longitud  $L$  de la curva paramétrica  $C$ , en el intervalo dado.

La longitud  $L$  de la curva se calculará con la expresión:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Se construye la expresión subradical, obteniendo las derivadas, elevándolas al cuadrado y sumándolas:

$$\frac{dx}{dt} = 4t \quad \Bigg| \quad \frac{dy}{dt} = 4t^2$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (4t)^2 + (4t^2)^2 = 16t^2 + 16t^4 = 16t^2(1 + t^2)$$

Por la definición de valor absoluto; cuando  $t \in [0, \sqrt{3}]$ , se cumple que  $|t| = t$ . Luego, reemplazando en el integrando, se tiene que:

$$L = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{16t^2(1+t^2)} dt = \int_0^{\sqrt{3}} 4|t|\sqrt{1+t^2} dt = \int_0^{\sqrt{3}} 4t\sqrt{1+t^2} dt$$

Se evalúa la integral definida mediante la TÉCNICA DE SUSTITUCIÓN O CAMBIO DE VARIABLE:

$$u = 1 + t^2 \quad \rightarrow \quad du = 2t dt$$

$$\begin{cases} t = 0 & \rightarrow & u = 1 \\ t = \sqrt{3} & \rightarrow & u = 4 \end{cases}$$

$$L = 2 \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+t^2} (2t dt) = 2 \int_1^4 \sqrt{u} du = 2 \int_1^4 u^{1/2} du$$

$$L = 2 \left( \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right) \Big|_1^4 = \frac{4}{3} (4^{3/2} - 1^{3/2}) = \frac{4}{3} (8 - 1)$$

$$\boxed{\therefore L = \frac{28}{3} m \approx 9.33 m}$$

Con base en el cálculo realizado, se recomienda la adquisición de una varilla que mida 12 metros de longitud.