espol Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas

Año:	2024	Periodo:	I PAO
Materia:	Ecuaciones Diferenciales y Álgebra Lineal	Profesores:	Jesús Aponte, Carlos Martín Luis Fernando Mejías
Evaluación:	Tercera	Fecha:	16 de septiembre de 2024

COMPROMISO DE HONOR

Yo, ________________________________, al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que solo puedo un lápiz o esferográfico y borrador, que sólo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen y que cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído debo apagarlo y depositarlo donde se me indique, junto con cualquier otro material que se encuentre acompañándome. No debo, además, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a los que se entreguen en esta evaluación. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.
Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptado la declaración anterior.

"Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".

Firma: ____________________ Número de matrícula: ________________ Paralelo: ________

1. (20 puntos) Un virus se propaga según el modelo logístico en un poblado de 7 mil habitantes. Cuando el virus es detectado hay 500 personas infectadas. Después de 3 días existen 1500 personas infectadas. ¿Cuánto tiempo ha de transcurrir para que 3/4 partes del poblado esté infectado con el virus?

Solución: Sea $P(t)$ la cantidad de personas infectadas después de t días. Por hipótesis, $P(t)$ satisface la ecuación logística

$$P = rP\left(1 - \frac{P}{7000}\right), \quad P(0) = 500,$$

donde $r > 0$. Luego,

$$P(t) = \frac{7000}{1 + \left(\frac{7000}{500} - 1\right)e^{-rt}} = \frac{7000}{1 + 13e^{-rt}}.$$

Para hallar r, note que $P(3) = 1500$, de modo que

$$\begin{aligned} 1500 = \frac{7000}{1 + 13e^{-rt}} &\implies 1 + 13e^{-3r} = \frac{7000}{1500} \\ &\implies e^{-3r} = \frac{11}{39} \\ &\implies r = \frac{\ln 3 + \ln 13 - \ln 11}{3}. \end{aligned}$$

Queremos el tiempo t para el cual $P(t) = \frac{3}{4} \cdot 7000$. Se tiene que,

$$\begin{aligned}
\frac{7000}{1+13e^{-rt}} = \frac{3}{4} \cdot 7000 &\implies \frac{1}{1+13e^{-rt}} = \frac{3}{4} \\
&\implies 1 + 13e^{-rt} = \frac{4}{3} \\
&\implies 13e^{-rt} = \frac{1}{3} \\
&\implies e^{rt} = 3 \cdot 13 \\
&\implies rt = \ln 3 + \ln 13 \\
&\implies t = \frac{\ln 3 + \ln 13}{r} \\
&\implies t = \frac{3(\ln 3 + \ln 13)}{\ln 3 + \ln 13 - \ln 11} \approx 8,68.
\end{aligned}$$

Rúbrica:

Plantea correctamente el PVI que modela el fenómeno.	1–2 puntos
Determina el modelo	1–6 puntos
Usa la condición $P(3) = 1500$ para calcular r.	1–6 puntos
Determina el tiempo, en días, que transcurrió para que 3/4 partes del poblado esté infectado.	1–6 puntos

2. (20 puntos) Sea W el conjunto de polinomios p de grado menor igual que 2 que satisfacen la identidad

$$p''(t) - 2p(1) = 0, \, \forall \, t \in \mathbb{R}.$$

Verifique que W es un subespacio vectorial de P_2 y halle una base para W. Luego, extienda tal base a una base de P_2.

Solución: Sea $p(t) = a + bt + ct^2$ un polinomio arbitrario en P_2. Entonces, $p \in W$ si, y solamente si,

$$p''(t) - 2p(1) = 0,$$

o equivalentemente si, y solamente si,

$$2c - 2(a + b + c) = -2(a + b) = 0.$$

Por tanto, $p(t)$ está en W si y solamente si $a = -b$. Así,

$$p(t) = a + bt + ct^2 = a - at + ct^2 = a(1 - t) + bt^2.$$

Esto demuestra que $W = \text{gen}\{1 - t, t^2\}$, de manera que W es un subespacio vectorial de P_2 (al ser el generado de un conjunto de vectores). Como $1 - t$ y t^2 son de diferentes grados, uno de ellos no puede ser múltiplo del otro, lo que implica que $1 - t$, t^2 son linealmente independientes. En consecuencia, $\dim W = 2$. Para extender $\{1 - t, t^2\}$ a una base de P_2, simplemente le agregamos un vector que no esté en W. Por ejemplo, el polinomio 1 no está en W. Por tanto, $\{1 - t, t^2, 1\}$ es una base de P_2.

Rúbrica:

Demuestra que W es un subespacio de P_2.	1–6 puntos
Halla una base para W	1–8 puntos
Extiende tal base a una base para P_2	1–6 puntos.

3. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la única transformación lineal que satisface

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (1,1,1,0) \\ T(0,1,0) &= (0,1,1,1) \\ T(1,0,1) &= (1,1,0,0) \end{aligned}$$

(a) (10 puntos) ¿Qué condiciones debe satisfacer un vector (y_1, y_2, y_3, y_4) para pertenecer a $\mathrm{Im}(T)$?

Solución: Como los vectores $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(1,0,1)$ son l.i., como es fácil verificar, ellos conforman una base de $\mathbb{R}^3$, y en consecuencia

$$\mathrm{Im}(T) = \mathrm{gen}\{(1,1,1,0), (0,1,1,1), (1,1,0,0)\}.$$

Sean (y_1, y_2, y_3, y_4) un vector en $\mathrm{Im}(T)$. Entonces, existen números reales c_1, c_2, y c_3 tales que $c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 = (y_1, y_2, y_3, y_4)$. De aquí, obtenemos que (c_1, c_2, c_3) satisface el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}.$$

Hagamos reducción por filas sobre la matriz ampliada de este sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & : & y_1 \\ 1 & 1 & 1 & : & y_2 \\ 1 & 1 & 0 & : & y_3 \\ 0 & 1 & 0 & : & y_4 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_3 \to f_3 - f_1]{f_2 \to f_2 - f_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & : & y_1 \\ 0 & 1 & 0 & : & -y_1 + y_2 \\ 0 & 1 & -1 & : & -y_1 + y_3 \\ 0 & 1 & 0 & : & y_4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_4 \to f_3 - f_2]{f_3 \to f_3 - f_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & : & y_1 \\ 0 & 1 & 0 & : & -y_1 + y_2 \\ 0 & 0 & -1 & : & -y_2 + y_3 \\ 0 & 0 & 0 & : & y_1 - y_2 + y_4 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_3 \to -f_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & : & y_1 \\ 0 & 1 & 0 & : & -y_1 + y_2 \\ 0 & 0 & 1 & : & y_2 - y_3 \\ 0 & 0 & 0 & : & y_1 - y_2 + y_4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_1 \to f_1 - f_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & y_1 - y_2 + y_3 \\ 0 & 1 & 0 & : & -y_1 + y_2 \\ 0 & 0 & 1 & : & y_2 - y_3 \\ 0 & 0 & 0 & : & y_1 - y_2 + y_4 \end{bmatrix}.$$

Se tiene entonces que $\mathrm{Im}(T) = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \colon y_1 - y_2 + y_4\}$

Rúbrica:

Determina de forma abstracta qué debe ser $\mathrm{Im}(T)$	1–4 puntos
Determina de forma explícita cuál es la condición que garantiza que $(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathrm{Im}(T)$	1–6 puntos

(b) (10 puntos) Halle la regla de correspondencia de T.

Solución: Primero veamos cómo se escribe un vector arbitrario (x_1, x_2, x_3) como combinación lineal de los vectores $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(1,0,1)$. Si c_1, c_2 y c_3 son números reales satisfaciendo

$$(x_1, x_2, x_3) = c_1(1,0,0) + c_2(0,1,0) + c_3(1,0,1),$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
x_1 &= c_1 + c_3, \\
x_2 &= c_2, \\
x_3 &= c_3.
\end{aligned}
$$

De aquí, se obtiene que

$$(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3)(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(1, 0, 1).$$

Por tanto,

$$
\begin{aligned}
T(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 - x_3)T(1, 0, 0) + x_2 T(0, 1, 0) + x_3 T(1, 0, 1) \\
&= (x_1 - x_3)(1, 1, 1, 0) + x_2(0, 1, 1, 1) + x_3(1, 1, 0, 0) \\
&= (x_1, x_1 + x_2, x_1 - x_3 + x_2, x_2).
\end{aligned}
$$

Rúbrica:

Escribe un vector arbitrario (x_1, x_2, x_3) como combinación lineal de los vectores $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(1, 0, 1)$	1–4 puntos
Halla la regla de correspondencia de T	1–6 puntos

4. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

(a) (10 puntos) Demuestre que A es diagonalizable y halle una matriz invertible P tal que

$$P^{-1}AP$$

sea una matriz diagonal.

Solución: Se tiene que

$$\begin{aligned} \det(tI - A) &= \det \begin{bmatrix} t-1 & -2 & -2 \\ -2 & t-1 & -2 \\ 2 & 2 & t+3 \end{bmatrix} \\ &= (t-1)(t+1)^2, \end{aligned}$$

de manera que los valores propios son -1 y 1. Los espacios propios correspondientes son

$$E_{-1} = \text{gen}\{(1,0,1),(0,1,-1)\}$$

y

$$E_1 = \{(-1,-1,1)\}.$$

Luego, una base para $\mathbb{R}^2$ se compone de los vectores

$$\{(1,0,-1),(0,1,-1),(-1,-1,1).\}$$

Sea

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 11 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces, $P^{-1}AP = D$, donde

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rúbrica:

Calcula correctamente el polinomio característico y los valores propios	1–2 puntos
Calcula correctamente vectores los vectores propios correspondientes y demuestra que A es diagonalizable	1–6 puntos
Halla la matriz invertible P que $P^{-1}AP$ es una matriz diagonal	2 puntos

(b) (10 puntos) Calcule A^{100}.

Solución: De la parte (a) se tiene que $A = PDP^{-1}$, así

$$\begin{aligned}
A^{100} &= (PDP^{-1})^{100} \\
&= PD^{100}P^{-1} \\
&= P \begin{bmatrix} (-1)^{100} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{100} \end{bmatrix} P^{-1} \\
&= PIP^{-1} \\
&= I.
\end{aligned}$$

Rúbrica:

Calcula A^{100}	1–10 puntos

5. (20 puntos) Resuelva el PVI

$$y'' + 4y = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \le t < 5, \\ (t-5)/5, & \text{si } 5 \le t < 10, \\ 1, & \text{si } t \ge 10, \end{cases} \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$

Solución: Primero, escribimos el lado derecho de la ecuación en la forma

$$\frac{t-5}{5}H(t-5) - \left(1 - \frac{t-5}{5}\right)H(t-10) = \frac{(t-5)H(t-5) - H(t-10)(t-10)}{5}.$$

Aplicamos transformadas de Laplace a la ecuación diferencial y usamos las condiciones iniciales para obtener

$$(s^4+4)Y(s) = \frac{e^{-5s} - e^{-10s}}{5s^2},$$

o

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{e^{-5s} - e^{-10s}}{5s^2(s^4+4)} \\ &= \frac{e^{-5s}}{5}\left(\frac{1/4}{s^2} - \frac{1/4}{s^2+4}\right) - \frac{e^{-10s}}{5}\left(\frac{1/4}{s^2} - \frac{1/4}{s^2+4}\right). \end{aligned}$$

Luego,

$$y(t) = \frac{H(t-5)(1/4(t-5) - 1/8\operatorname{sen} 2(t-5)) - H(t-10)(1/4(t-10) - 1/8\operatorname{sen} 2(t-10))}{5}.$$

Rúbrica:

Aplica correctamente la transformada de Laplace	1–2 puntos
Calcula correctamente $Y(s)$ y la descompone en fracciones parciales	1–6 puntos
Aplica correctamente la transformada inversa de Laplace	1–6 puntos
Resuelve el PVI.	1–6 puntos