Año:	2024	Periodo:	II PAO
Materia:	Ecuaciones Diferenciales y Álgebra Lineal	Profesores:	Jesús Aponte, Eduardo Rivadeneira, Luis Fernando Mejías
Evaluación:	Primera	Fecha:	18 de noviembre de 2024

COMPROMISO DE HONOR

Yo, ______________________________, al firmar este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que solo puedo un lápiz o esferográfico y borrador, que sólo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen y que cualquier instrumento de comunicación que hubiere traído debo apagarlo y depositarlo donde se me indique, junto con cualquier otro material que se encuentre acompañándome. No debo, además, consultar libros, notas, ni apuntes adicionales a los que se entreguen en esta evaluación. Los temas debo desarrollarlos de manera ordenada.
Firmo al pie del presente compromiso, como constancia de haber leído y aceptado la declaración anterior.

"Como estudiante de ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".

Firma: ____________________ Número de matrícula: ____________ Paralelo: ______

1. (10 puntos) Determine la estabilidad de las soluciones de equilibrio de la ecuación diferencial

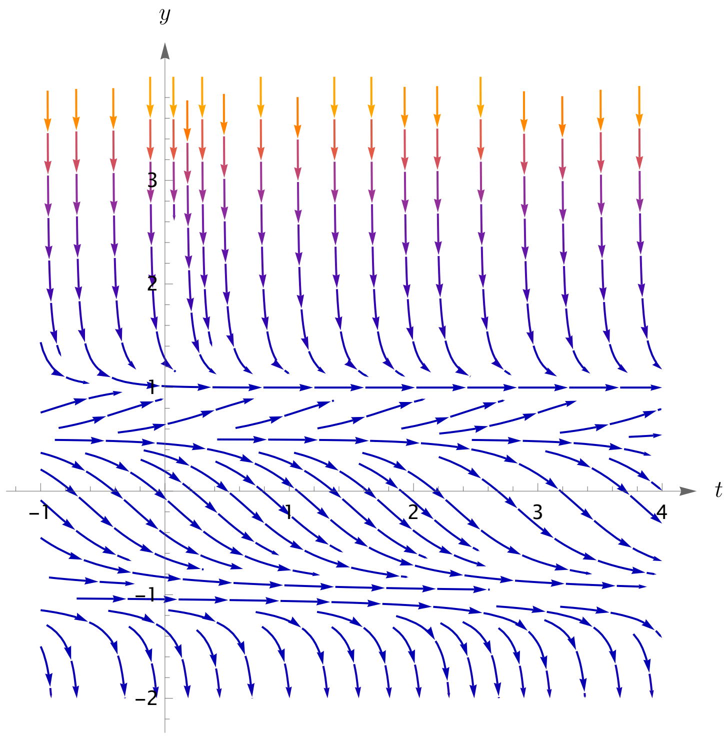
$$y' = (1-y)(2y-1)(1+y)^2$$

y use esa información para hacer un bosquejo del diagrama de flujo de la ecuación.

Solución: Las soluciones de equilibrio son $y(t) \equiv -1$, $y(t) \equiv \frac{1}{2}$ y $y(t) \equiv 1$. Un análisis de signos de y' como en el siguiente cuadro nos permitará estudiar su estabilidad:

y \ Factor	$(1-y)$	$(2y-1)$	$(1+y)^2$	$(1-y)(2y-1)(1+y)^2$
$(-\infty,-1)$	$+$	$-$	$+$	$-$
$(-1,1/2)$	$+$	$-$	$+$	$-$
$(1/2,1)$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(1,+\infty)$	$-$	$+$	$+$	$-$

Las soluciones serán crecientes en la franja del plano donde $y' > 0$, es decir, cuando y está en el intervalo intervalos $(1/2, 1)$; las soluciones serán decrecientres en la franja del plano donde $y' < 0$, es decir, cuando y está en los intervalos $(-\infty,-1)$, $(-1,1/2)$ y $(1,+\infty)$. Eso nos permite concluir que $y(t) \equiv -1$ es una solución semiestable, $y(t) \equiv 1/2$ es una solución inestable y $y(t) \equiv 1$ es una solución estable. Basado en esta información, el diagrama de flujos será similar al siguiente:



Rúbrica:

Identifica las soluciones de equilibrio.	1–2 puntos
Determina la estabilidad de las soluciones de equilibrio	1–5 puntos
Hace un bosquejo correcto del diagrama de flujos	1–3 puntos

2. (10 puntos) Resuelva el siguiente problema de valor inicial

$$y' + (\operatorname{tg} t)y = \operatorname{sen} 2t,\ t \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}), \quad y(0) = 2.$$

Solución: El factor integrante de esta ecuación es

$$e^{\int \operatorname{tg} t\, dt} = e^{-\ln|\cos t|} = \frac{1}{\cos t}.$$

Multiplicamos la ecuación por el factor integrante:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos t}(y' + (\operatorname{tg} t)y) &= \frac{\operatorname{sen} 2t}{\cos t} \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{y(t)}{\cos t}\right) &= 2\operatorname{sen} t \\
\frac{y(t)}{\cos t} &= 2\int \operatorname{sen} t\, dt + c \\
y(t) &= -2\cos^2 t + c\cos t.
\end{aligned}$$

Como $y(0) = 2$, debe tenerse que

$$2 = y(0) = -2\cos^2 0 + c\cos 0 = -2\cdot 1^2 + c\cdot 1 \implies c = 4.$$

Por tanto, la solución al PVI planteado es

$$y(t) = -2\cos^2 t + 4\cos t.$$

Rúbrica:

Identifica que la EDO es lineal de primer orden y calcula correctamente el factor integrante (o solución homogénea).	1–4 puntos
Multiplica la EDO por el factor integrante y despeja $y(t)$ (o calcula la solución particular por variación de parámetros).	1–4 puntos
Halla la solución general y resuelve el PVI.	1–2 puntos

3. (10 puntos) A las 11:09 p.m., una experta forense llega a la escena de un crimen donde se acaba de encontrar un cadáver. Inmediatamente, toma la temperatura del cuerpo y descubre que es de $26,7\,^{\circ}\mathrm{C}$. También observa que el termostato programable muestra que la habitación se ha mantenido a una temperatura constante de $20\,^{\circ}\mathrm{C}$ durante los últimos 3 días. Después de recoger pruebas de la escena del crimen, se toma la temperatura del cuerpo una vez más y se descubre que es de $25,8\ ^{\circ}\mathrm{C}$. Esta última lectura de temperatura se tomó exactamente una hora después de la primera. Al día siguiente, el detective investigador le pregunta al experto forense: "¿A qué hora murió nuestra víctima?" Suponiendo que la temperatura corporal de la víctima era normal ($37\,^{\circ}\mathrm{C}$) antes de la muerte, ¿qué le dice al detective?

Solución: Sea $T = T(t)$ la temperatura del cadáver, luego de t horas. En el momento justo antes de la muerte la temperatura de la víctima era $37\,^{\circ}\mathrm{C}$, por lo que podemos escribir

$$T(0) = 37\,^{\circ}\mathrm{C}.$$

Transcurrido un tiempo de t_0 horas desde la muerte de la víctima, la temperatura era de $26,7\,^{\circ}\mathrm{C}$, de manera que

$$T(t_0) = 26,7\,^{\circ}\mathrm{C}.$$

Luego de una hora, la nueva medición es de $25,8\,^{\circ}\mathrm{C}$, que podemos expresarlo como

$$T(t_0+1) = 25,8\,^{\circ}\mathrm{C}.$$

Como la temperatura de la habitación fue constante e igual a $20\,^{\circ}\mathrm{C}$, podemos suponer que $T(t)$, por la ley de enfriamiento de Newton, es solución del problema de valor inicial

$$T' = k(20-T),\ k>0, \quad T(0) = 37.$$

La solución general de ecuación diferencial lineal de primer orden es

$$T(t) = (37e^{-kt} + 20(1-e^{-kt}))\,^{\circ}\mathrm{C} = (17e^{-kt}+20)\,^{\circ}\mathrm{C}$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} 26,7\,^{\circ}\mathrm{C} &= T(t_0) = (17e^{-kt_0}+20)\,^{\circ}\mathrm{C}, \\ 25,8\,^{\circ}\mathrm{C} &= T(t_0+1) = (17e^{-k(t_0+1)}+20)\,^{\circ}\mathrm{C}. \end{aligned}$$

De la primera ecuación nos queda que $6,7 = 17e^{-kt_0}$; de la segunda que $5,8 = 17e^{-kt_0}e^{-k} = 6,7e^{-k}$. Por tanto,

$$k = \ln 67 - \ln 58.$$

Finalmente, para obtener t_0 usamos que $6,7 = 17e^{-kt_0}$. Nos queda

$$\begin{aligned} \frac{6,7}{17} = e^{-kt_0} &\implies -kt_0 = \ln 67 - \ln 170 \\ &\implies t_0 = \frac{\ln 170 - \ln 67}{\ln 67 - \ln 58} \approx 6,45. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el forense fue asesinado aproximadamente 6 horas, 27 minutos antes de las 11:09 p.m., *i.e.*, a las 4:41 p.m.

Rúbrica:

Identifica que se trata de un fenómeno modelable a través de la ecuación de enfriamiento de Newton y determina la ecuación que gobierna el fenómeno	1-2 puntos
Usa los datos para determinar la constante k del modelo	1–4 puntos
Halla la hora de muerte de la víctima	1–4 puntos

4. (10 puntos) Calcule el generado por el conjunto de vectores $X = \{(1,1,1,1,0),(1,0,0,1,1)\}$ en $\mathbb{R}^5$. Dado un vector $(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5) \in \operatorname{gen} X$, escríbalo como combinación lineal de los vectores de X.

Solución: $(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5) \in \operatorname{gen} X$ si, y solamente si, (y_1,y_2,y_3,y_4,y_5) es solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}.$$

Hagamos reducción por filas sobre la matriz ampliada de este sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & : & y_1 \\ 1 & 0 & : & y_2 \\ 1 & 0 & : & y_3 \\ 1 & 1 & : & y_4 \\ 0 & 1 & : & y_5 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_4 \to f_4 - f_1]{\substack{f_2 \to f_2 - f_1 \\ f_3 \to f_3 - f_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & : & y_1 \\ 0 & -1 & : & -y_1 + y_2 \\ 0 & -1 & : & -y_1 + y_3 \\ 0 & 0 & : & -y_1 + y_4 \\ 0 & 1 & : & y_5 \end{bmatrix} \xrightarrow[f_5 \to f_5 + f_2]{f_3 \to f_3 - f_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & : & y_1 \\ 0 & -1 & : & -y_1 + y_2 \\ 0 & 0 & : & -y_2 + y_3 \\ 0 & 0 & : & -y_1 + y_4 \\ 0 & 0 & : & -y_1 + y_2 + y_5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2 \to -f_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & : & y_1 \\ 0 & 1 & : & y_1 - y_2 \\ 0 & 0 & : & -y_2 + y_3 \\ 0 & 0 & : & -y_1 + y_4 \\ 0 & 0 & : & -y_1 + y_2 + y_5 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_1 \to f_1 - f_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & : & y_2 \\ 0 & 1 & : & y_1 - y_2 \\ 0 & 0 & : & -y_2 + y_3 \\ 0 & 0 & : & -y_1 + y_4 \\ 0 & 0 & : & -y_1 + y_2 + y_5 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{gen} X = \left\{ (y_1,y_2,y_3,y_4,y_5) \colon \begin{aligned} -y_2 + y_3 &= 0 \\ -y_1 + y_4 &= 0 \\ -y_1 + y_2 + y_5 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Por otro lado,

$$(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5) = y_2(1,1,1,1,0) + (y_1 - y_2)(1,0,0,1,1).$$

Rúbrica:

Halla las condiciones sobre las coordenadas de (y_1,y_2,y_3,y_4,y_5) para estar en $\operatorname{gen} X$.	1–5 puntos
Escribe (y_1,y_2,y_3,y_4,y_5) como compbinación lineal de los vectores en X.	1–5 puntos

5. Sean $M_{3\cdot 3}$ el espacio vectorial de las matrices 3×3 y $W \subset M_{3\cdot 3}$ la colección matrices tales que las entradas de sus diagonales son iguales.

(a) (5 puntos) Demuestre que W es un subespacio de $M_{3\cdot 3}$.

Solución: Una matriz típica en W tiene la forma

$$\begin{bmatrix} a & b & a \\ c & a & d \\ a & e & a \end{bmatrix},$$

por lo que ciertamente $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \in W$. Sean $\left[\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ c_1 & a_1 & d_1 \\ a_1 & e_1 & a_1 \end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix} a_2 & b_2 & a_2 \\ c_2 & a_2 & d_2 \\ a_2 & e_2 & a_2 \end{smallmatrix}\right] \in W$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ c_1 & a_1 & d_1 \\ a_1 & e_1 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & a_2 \\ c_2 & a_2 & d_2 \\ a_2 & e_2 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \\ c_1 + c_2 & a_1 + a_2 & d_1 + d_2 \\ a_1 + a_2 & e_1 + e_2 & a_1 + a_2 \end{bmatrix} \in W,$$

y

$$\alpha \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ c_1 & a_1 & d_1 \\ a_1 & e_1 & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 & \alpha a_1 \\ \alpha c_1 & \alpha a_1 & \alpha d_1 \\ \alpha a_1 & \alpha e_1 & \alpha a_1 \end{bmatrix} \in W.$$

Por tanto, W es un subepsacio vectorial de $M_{3\cdot 3}$.

Rúbrica:

Demuestra que W es un subespacio de $M_{3\cdot 3}$	1–5 puntos

(b) (5 puntos) Halle una base para W.

Solución: Para Una matriz típica en W se tiene que

$$\begin{bmatrix} a & b & a \\ c & a & d \\ a & e & a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

De aquí, se deduce fácilmente que

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

es una base para W.

Rúbrica:

Halla una base para W	1–5 puntos