Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas — espol	**Escuela Superior Politécnica del Litoral** **Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas**	
	Materia: Matemáticas Discretas	**Fecha:** 07/02/2024
	Profesores: Cristhian Hernández, Ebner Pineda	
	Periodo y Año: II PAO 2024	
	Estudiante:	
	Cédula:	
	Paralelo:	

EXAMEN DE TERCERA EVALUACIÓN

COMPROMISO DE HONOR

Al leer este compromiso, reconozco que el presente examen está diseñado para ser resuelto de manera individual, que puedo usar un lápiz o una esferográfica, que los temas voy a desarrollarlos en forma ordenada, que a lo sumo puedo comunicarme con la persona responsable de la recepción del examen, y, NO USARÉ calculadora alguna o cualquier instrumento de comunicación ajeno al desarrollo del examen. No debo consultar libros, ni notas, ni apuntes adicionales a las que se proporcionen para esta evaluación.

Acepto el presente compromiso, como constancia de haber leído y al estar de acuerdo con la declaración.

____

"Como estudiante de la ESPOL me comprometo a combatir la mediocridad y actuar con honestidad, por eso no copio ni dejo copiar".

1. (20 puntos) Califique las siguientes proposiciones como verdaderas o falsas. Si la proposición es verdadera, demuéstrela formalmente; en caso contrario, proporcione un contraejemplo.

   (a) Para toda $n \in \mathbb{N}$, k_n (el grafo completo de n vértices) tiene $\dfrac{n(n-1)}{2}$ aristas. (6 puntos).

(b) Si $M = 3^{2024} + 3^{2025}$ y $N = 2^{2024} + 2^{2025}$, entonces el $mcm(M, N) = 6^{2024}$. (6 puntos).

(c) Si G_1 y G_2 son dos grafos arbitrarios que comparten las siguientes características:

- Mismo número de vértices.
- Mismo número de aristas.
- Hay k vértices de grado p en G_1 si y solo si hay k vértices de grado p en G_2.

Entonces se puede afirmar que G_1 y G_2 son isomorfos. (8 puntos).

2. (20 puntos) Sea $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ una función definida por:

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2.$$

Demuestre que 3 divide a $f(x, y)$ si y solo si 3 divide a $(x - y)^2$.

3. (20 puntos) Usando inducción matemática, demuestre que cualquier árbol binario completo de altura h, tiene exactamente $2^{h+1} - 1$ vértices, siempre que todos sus vértices terminales estén en el mismo nivel.

4. (20 puntos) Diseñe un grafo no dirigido $G = (V, E)$ **SIN LAZOS** que cumpla las siguientes condiciones:

   - Tener al menos un ciclo de Euler.
   - Tener al menos un ciclo de Hamilton.
   - Tener 5 vértices.
   - Tener al menos dos vértices con grado 2.
   - Fijando un ciclo de Euler C_E y un ciclo de Hamilton C_H, debe existir al menos una arista que sea parte de C_E pero no de C_H.

   Se requiere que en su solución detalle lo siguiente:

   - Conjunto V.
   - Conjunto E.
   - Ciclo C_E.
   - Ciclo C_H.
   - Dibujo del grafo que diseñó con las etiquetas de las aristas y los vértices respectivamente.

5. (20 puntos) Dado el grafo de la figura adjunta. Usando el algoritmo de Dijkstra, determine la distancia más corta para ir desde el vértice **A** hasta el vértice **J** indicando uno de los posibles caminos con esa longitud. Detalle paso a paso su procedimiento.