2. (30%) Sea $V = M_{2x2}$. Dados los conjuntos

$$H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / \; 2a+1 = 3+b+d-2 \right\}, \quad H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & a+c \\ a+d & 1 \end{pmatrix} / \; a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$H_3 = Gen\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad H_4 = \{ A \in M_{2x2} / \det(A) \neq 0 \}.$$ Determine:

a. ¿Cuáles son subespacios vectoriales de V?

b. La base y la dimensión de dos de los subespacios obtenidos en (a), así como de su intersección.

c. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Determine si $A + B$ pertenecen a la unión de los subespacios obtenidos en (a).

$H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / \; 2a - b - d = 0 \right\}$

$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \to 2a_1 - b_1 - d_1 = 0$

$+ \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \to 2a_2 - b_2 - d_2 = 0$

$2a_1 + 2a_2 - (b_1+b_2) - (d_1+d_2) = 0$

$2(a_1+a_2) - (b_1+b_2) - (d_1+d_2) = 0$

$\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix} \quad 2(a_1+a_2) - (b_1+b_2) - (d_1+d_2)$ cumple

$2\alpha a - \alpha b - \alpha d = 0$ cumple

$H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & a+c \\ c+d & d \end{pmatrix} / \; d = 1 \right\}$

$\begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_1+c_1 \\ c_1+d_1 & d_1 \end{pmatrix} / \; d_1 = 1$

$\begin{pmatrix} a_2+b_2 & a_2+c_2 \\ c_2+d_2 & d_2 \end{pmatrix} / \; d_2 = 1$

$d_1 + d_2 = 2$

$d_1 + d_2 = 1$ no cumple

$H_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / \; \det(A) \neq 0 \right\}$

$\det(A_1) \neq 0$

$\det(A_2) \neq 0$

$\det(A_1 + A_2) \neq 0$

$\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix}$ no cumple

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a+b \end{pmatrix}$

$d = -a+b$, $c = 0$

$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} / \; d_1 = -a_1 + b_1 \wedge c_1 = 0$

$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} / \; d_2 = -a_2 + b_2 \wedge c_2 = 0$

$d_1 + d_2 = -(a_1+a_2) + (b_1+b_2)$

$\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix}$ $d_1+d_2 = -(a_1+a_2)+(b_1+b_2)$, $c_1+c_2 = 0$ cumple

$\alpha d_1 = -\alpha a_1 + \alpha b_1$

$c_1 = c_2 = 0$ cumple