

6.-Sea X_1 la cantidad de agua, en miles de litros, que se almacena en las cisternas de un condominio a las 6h00 de cada lunes; y X_2 la cantidad de agua que se ha consumido en la semana previa, medida momentos antes de que se reabastecen las cisternas; las cisternas se reabastecen una vez por semana. Bajo estas condiciones, $X_3 = X_1 - X_2$ es entonces la cantidad de agua remanente en las cisternas al momento de reabastecerlas. Determinar la media μ_3 de X_3 , si se conoce que la densidad conjunta de $(X_1, X_2)^T$ está determinada por:

$$f(x_1, x_2) = kx_1; S = \{(x_1, x_2) \mid 0 < x_2 < x_1 < 3\}$$

Determine también la Matriz de Varianzas y Covarianzas de $\mathbf{X}^T = (X_1, X_2)$.
Determinar además la varianza de X_3 . 15%

7.- Luego de trabajar con $n = 20$ datos, se utiliza el modelo de Regresión Múltiple siguiente:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \varepsilon$$

encontrándose que la MCE = 4; y, que, siendo \mathbf{X} la Matriz de Diseño, se llega a que $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ es igual a:

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0.8 & 0.3 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.8 & 0.2 & 7.0 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.1 & 4.2 \end{bmatrix}$$

Con esta información, determine:
a) La varianza del estimador de Mínimos Cuadrados de β_1 ; b) El estimador de la covarianza entre b_1 y b_3 ; c) El estimador de la $\text{var}(3b_1 - 4b_3)$; y, d) El valor p del contraste de Hipótesis $H_0: \beta_1 = 0$ vs. $H_1: \beta_1 \neq 0$ si se sabe que el valor del estimador $b_1 = 0.63$. 15%

8.-Sean X_1 y X_2 variables aleatorias uniformes con parámetros $\alpha = \theta$; $\beta = \theta + 1$ que además son independientes e idénticamente distribuidas; determine y grafique la distribución conjunta de X_1 y X_2 y calcule el valor de la covarianza entre las dos variables. 5%

9.-Con X_1 y X_2 las dos variables del problema anterior se postula el siguiente contraste de hipótesis:

$$H_0: \theta = 0 \text{ vs } H_1: \theta > 0$$

Se definen las siguientes regiones críticas:
 $C_1: \{\text{Rechace } H_0 \text{ en favor de } H_1 \text{ si } X_1 > 0.85\}$ (Prueba 1) y $C_2: \{\text{Rechace } H_0 \text{ en favor de } H_1 \text{ si } X_1 + X_2 > k\}$ (Prueba 2)

Bajo estas condiciones, determine el valor de k para que la segunda prueba tenga el mismo nivel de significancia α que la primera. 15%

10.-Con los datos del tema 1, construya intervalos de confianza para la media y la varianza de la población; la confianza debe ser 95% en ambos casos y explique además sobre el significado de tal expresión: 95% de confianza. (Bono, hasta 10%)

Atención, va a necesitar los siguientes datos:

$$t(9; 0.025) = 2.398;$$

$$\chi^2(9; 0.975) = 19.02; \chi^2(9; 0.025) = 2.70.$$